Ασκήσεις - Μάθημα 10

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α. Διπλά ολοκληρώματα

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \}$$

$\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς $\qquad x$-απλό

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ενώς αν D y-απλό

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Αν $f = 1$, εμβαδόν του D.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1) $D = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x \}$

$$z = f(x,y) = 2x + 2y + 1$$

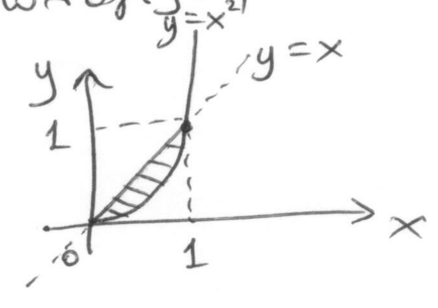
$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (2x + 2y + 1)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2xy + y^2 + y \Big|_{x^2}^{x} \right) dx =$$

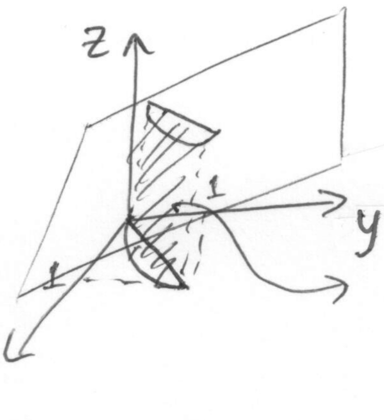
$$= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 + x - x^4\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

Αν $z = f(x,y) = 1$ τότε υπολογίζουμε το εμβαδό που ορίζει η D:



Τώρα

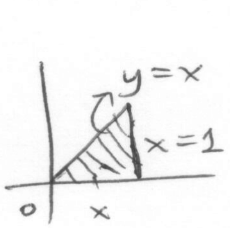


$$V\left(\Sigma(f,D)\right) = \frac{7}{15}$$

2) $I = \iint_D e^{-x^2}\, dx\, dy$ (Μη υπολ. κατά ολοκλ. αλλαγή σειράς)

$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\} =$ y-απλό

$= \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ x-απλό



$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{-x^2} y \Big|_0^x\right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx =$$

$$= \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

3) Αλλαγή συντεταγμένων στο R^2 (μετασχηματισμός)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)\, \left| J_{\vec{T}(r,\theta)} \right| dr\,d\theta$$

Ορίζουσα Jacobi κτλ.

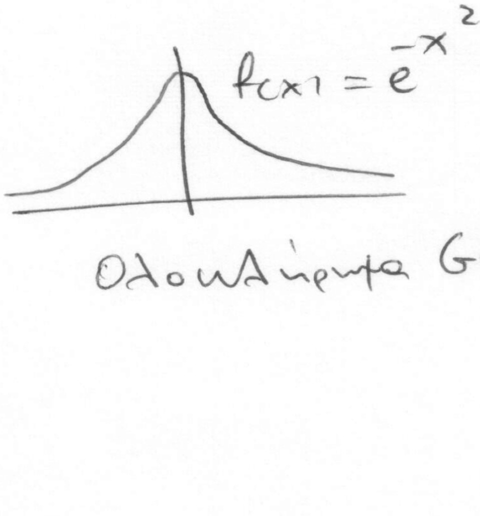
Να υπολογιστεί:

i) $I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ με $D_a = \{(x,y) \in R^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$

($\acute{\eta}$ $D_a = \{ \vec{x} \in R^2 : \|\vec{x}\|_2 \leq a \}$)

ii) Ν.δ.ο. $\lim_{a \to +\infty} I_a = \pi$.

iii) Ν.δ.ο. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$



Ολοκλήρωμα Gauss

iv) Ν.δ.ο. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Λύση:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\Rightarrow x^2+y^2=r^2$, $r\in[0,a]$, $\theta\in[0,2\pi]$

i) $$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r e^{-r^2}\,dr\right)d\theta =$$

με $\left| |J_{\vec{T}(r,\theta)}| \right| = |r|$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^a\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-a^2}}{2}+\frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2}\right) = \pi\left(1-\frac{1}{e^{a^2}}\right) = I_a$$

ii) $$\lim_{a\to+\infty} I_a = \lim_{a\to+\infty}\pi\left(1-\frac{1}{e^{a^2}}\right) = \pi.$$

iii) $$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

iv) $f(x) = e^{-x^2}$, άρτια συνάρτηση $\left(f(-x)=f(x)\right)$

συνεπώς $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

άρα $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

B. Τριπλά Ολοκληρώματα

1) $D = [0,1] \times [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ με $f(x,y,z) = xe^y z^2 + y^2 \sigma\upsilon\nu z$

$$I = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (xe^y z^2 + y^2 \sigma\upsilon\nu z)\,dz\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left[xe^y \frac{z^3}{3} + y^2 \eta\mu z\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\frac{\pi^3}{24} xe^y + y^2\right) dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\pi^3}{24} xe^y + \frac{y^3}{3}\right]_1^2 dx =$$

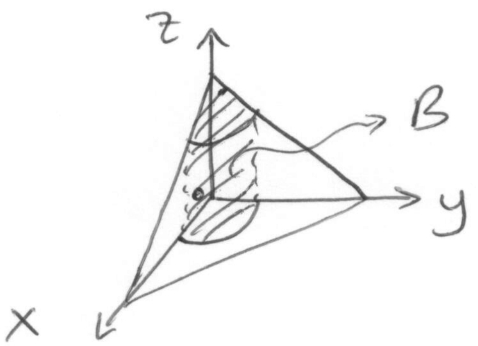
$$= \int_0^1 \left(\frac{\pi^3 e}{24}(e-1)x + \frac{7}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi^3 e}{24}(e-1)\frac{x^2}{2} + \frac{7}{3}x \Big|_0^1 = \frac{\pi^3 e(e-1)}{48} + \frac{7}{3}$$

Αν $f(x,y,z)=1$ τότε υπολογίζουμε τον όγκο $V(D)$ που ορίζει η επιφάνεια D.

2) Να υπολογιστεί ο όγκος στερεού B, εντός του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και μεταξύ των $z=0$ και $x+y+z=5$, $x,y,z \geq 0$.

Λύση



Ο κύλινδρος στο xy-επιπ. είναι: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4,\ x\geq 0, y\geq 0\}$

ή $D=\{(x,y): 0\leq x\leq 2$ και $0\leq y\leq \sqrt{4-x^2}\}$

οπότε $B=\{(x,y,z): (x,y)\in D$ και $0\leq z\leq 5-x-y\}$

δηλ. xy-απλό σύνολο.

$$V(B)=\iiint_B dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{5-x-y} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 5-x-y\ dy\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[5y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(5\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left[10 \arcsin\frac{x}{2} + \frac{5x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2x + \frac{x^3}{6} \right]_0^2$$

$$= 5\pi - \frac{16}{3}$$

όπου

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx \overset{x=2\sin u \Leftrightarrow u = \arcsin\frac{x}{2}}{\underset{dx = 2\cos u\, du}{=}} \int 4\cos^2 u\, du =$$

$$= 4\int \frac{(1+\cos 2u)}{2} du = 2\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right) =$$

$$= 2u + 2\cos u \sin u = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$$

και

$$\int x\sqrt{4-x^2}\, dx \overset{4-x^2=t}{=} -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} =$$

$$dt = -2x\,dx$$

$$x\,dx = -\frac{1}{2}dt$$

$$= -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

3) Αλλαγή συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} f(\vec{T}(u,v,w))\,\left| J_{\vec{T}}(u,v,w) \right| du\,dv\,dw$$

i) Κυλινδρικές: $\vec{T}(r,\theta,z) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, z)$

$$\left| J_{\vec{T}}(r,\theta,z) \right| = |r|$$

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B με $x,y,z \geq 0$ που περιβάλλεται από τις $x^2+y^2=9$, $3z = x^2+y^2$.

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9,\ 3z \leq x^2+y^2,\ x,y,z \geq 0\}$$

$$\vec{T}^{-1}(B) = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq z \leq \frac{r^2}{3}\}$$

$$V(B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \left(\int_0^{r^2/3} r\,dz \right) dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \frac{r^3}{3}\,dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3^4}{12}\,d\theta =$$

$$= \frac{27\pi}{8}$$

ii) <u>Σφαιρικός:</u>

$$\vec{T}(r,\theta,\varphi) = (r\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi,\ r\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi,\ r\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

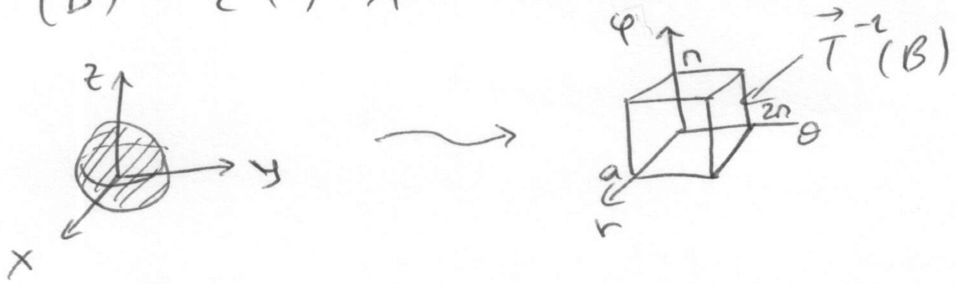
$$r>0\ ,\quad \theta\in[0,2\pi]\ ,\ \varphi\in[0,\pi]$$

$$\left|\,\left|J_{\vec{T}}(r,\theta,\varphi)\right|\,\right| = r^2\eta\mu\varphi$$

Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\le a^2\},\ a>0$$

$$\vec{T}^{-1}(B) = \{(r,\theta,\varphi):\ 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$$



$$V(B) = \iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} 1_B \left|J_{\vec{T}}\right|\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2\eta\mu\varphi\,dr\right)d\theta\right]d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\eta\mu\varphi\,\frac{a^3}{3}\,d\theta\right)d\varphi = \int_0^\pi 2\pi\,\eta\mu\varphi\,\frac{a^3}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi \eta\mu\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

4) Υπολογίστε το τριπλό ολ.

$$I = \iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz,$$ όπου B το στερεό μεταξύ των επιπέδων $x=0,\ y=0,\ z=4$ και το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$. Ποιος είναι ο όγκος $V(B)$;

Λύση:

$$\vec{T}^{-1}(B)=\{(r,\theta,z):\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2,\ r^2\le z\le 4\}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 (4r^2-r^4)\,dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)d\theta = \frac{64}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{32}{15}\pi$$

Ο όγκος είναι:

$$V(B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[rz \right]_{r^2}^4 dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (4r - r^3) \, dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi$$