ΑΣΚΗΣΕΙΣ II

1) Τα ανοιχτά n-ορθογώνια

- $R^o = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$

είναι ανοικτά σύνολα και τα κλειστά n-ορθογώνια

- $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n]$

είναι κλειστά σύνολα του R^n.

- Απόδειξη:
θ.δ.ο. $\forall \vec{c} \in R^o \ \exists\ \delta > 0$ τ.ω. $S(\vec{c}, \delta) \subseteq R^o$.

Έστω $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots c_n) \in R^o$

$c_1 \in (a_1, b_1) \Rightarrow \exists\ r_1 > 0 : (c_1 - r_1, c_2 + r_1) \subseteq (a_1, b_1)$

$c_2 \in (a_2, b_2) \Rightarrow \exists\ r_2 > 0 : (c_2 - r_2, c_2 + r_2) \subseteq (a_2, b_2)$

$\vdots$

$c_n \in (a_n, b_n) \Rightarrow \exists\ r_n > 0 : (c_n - r_n, c_n + r_n) \subseteq (a_n, b_n)$

$r = \min\{r_1, r_2, \dots r_n\} > 0$

Θεωρούμε $\delta = r$.

Έστω $\vec{x} \in S(\vec{c}, r) \Leftrightarrow \|\vec{x} - \vec{c}\| < r \Leftrightarrow$

$|x_i - c_i| \leq \|\vec{x} - \vec{c}\| < r \leq r_i \Rightarrow$

$x_i \in (c_i - r_i, c_i + r_i) \subseteq (a_i, b_i) \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Άρα $\vec{x} \in R^o \Rightarrow S(\vec{c}, r) \subseteq R^o \ \forall\ \vec{c} \in R^o$.

• Θα δείξουμε ότι το R^c είναι ανοικτό.

Έστω ότι R^c δεν είναι ανοικτό.

Άρα $\exists$ $\vec{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^c$:

$\forall \varepsilon>0$ $\quad S(\vec{c},\varepsilon) \cap R \neq \emptyset$.

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon = \frac{1}{\nu} > 0$

$\exists$ $\vec{x}_\nu = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \dots x_n^{(\nu)})$ τ.ω. $\vec{x}_\nu \in S(\vec{c}, \frac{1}{\nu}) \cap R$

Εφόσον $\vec{x}_\nu \in R \Longleftrightarrow a_i \leq x_i^{(\nu)} \leq b_i$

και $\vec{x}_\nu \in S(\vec{c}, \frac{1}{\nu}) \Leftrightarrow |x_i^{(\nu)} - c_i| \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{c}\| < \frac{1}{\nu} \xrightarrow{\nu\to+\infty}$

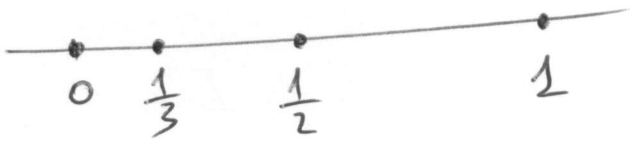
$x_i^{(\nu)} \xrightarrow[\nu]{} c_i$ άρα και $c_i \in [a_i, b_i]$

Άτοπο, διότι $\vec{c} \in R^c$

2) $A := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$A', \partial A$

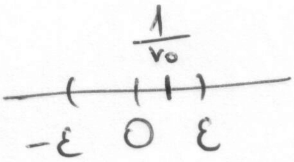
Το A ανοικτό ή κλειστό; Φραγμένο, συμπαγές;



$0 \in A' \iff \forall \varepsilon>0 \quad (S(0,\varepsilon)\setminus\{0\})\cap A \neq \emptyset$

διότι $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\quad 0<\frac{1}{\nu_0}<\varepsilon$ ώστε

$\frac{1}{\nu_0} \in A \cap \left((-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{0\}\right)$, δηλ.



Δεν ισχύει για άλλο σημείο, άρα $A'=\{0\}$.

$\partial A = \{x\in\mathbb{R} : \forall \varepsilon>0 \ (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ και $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A^c \neq \emptyset\}$

Εδώ $\partial A = A$ και εφόσον $A'\subseteq A \iff A$ κλειστό

Προφανώς A φραγμένο, άρα A συμπαγές

3) Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων f. (αποδ. ότι δεν υπάρχουν)

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\,ημ\left(\dfrac{x+y}{4}\right)$, $(x_0,y_0)=(\pi,\pi)$

v) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{ημ(x+y)}{x+y}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

vii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2-1}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

viii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

ix) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

x) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

xi) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+|z|}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

xii) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} (1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{\eta\mu(x^2+y^2+z^2)}}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

• Για τις περιπτώσεις που το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις στο (x_0,y_0) ή (x_0,y_0,z_0), αντίστοιχα.

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & , (x,y)\neq(x_0,y_0) \\ \lambda & , (x,y)=(x_0,y_0) \end{cases}$$

ή αντίστοιχα

$$g(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & , (x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0) \\ \lambda & , (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

i) Επιλέγουμε 2 διαφορετικές διαδρομές

• $y=x$ $\qquad f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

• $y=-x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $\nexists$ το όριο.

ii) $\boxed{\begin{array}{c}\text{Βασική ανισότητα:}\\ |x|\le\sqrt{x^2+y^2}\\ |x|\le\|(x,y)\|\end{array}}$ $\qquad f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|^3}{x^2+y^2}\le\frac{|x|\,\cancel{\|(x,y)\|^2}}{\cancel{\|(x,y)\|^2}}=|x|$$

Από Κ. Παρεμβολής $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=0.$

• Για να είναι συνεχής η $g(x,y)$ στο $(0,0)$ πρέπει $\lambda=0$.

iii) $$f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$$

Επιλέγω 2 διαφορετικές διαδρομές

• $y=0$ $\qquad$ • $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1. \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{-y^2}=-1$$

Άρα $\nexists$ το όριο.

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\pi)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\ \eta\mu\left(\frac{x+y}{4}\right) = \pi$

• Για να είναι συνεχής στο (π,π) η $g(x,y)$ πρέπει $\lambda=\pi$.

v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x+y)}{x+y} \overset{x+y=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$

• Για να είναι συνεχής η $g(x,y)$ στο $(0,0)$ πρέπει $\lambda = 1$.

vi) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Επιλέγω $y=x$ και $x=-y$

$f(x,x) = \frac{1}{2x}$

$f(-y,y) = \frac{-y}{2y^2} = -\frac{1}{2y}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = +\infty$

$\lim\limits_{y\to 0^+} f(-y,y) = -\infty.$

Άρα $\nexists$ το όριο.

vii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2-1} = 0$

• Για να είναι η $g(x,y)$ συνεχής στο $(0,0)$ θα πρέπει το $\lambda=0$.

viii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$

• Για να είναι συνεχής η $g(x,y)$ στο $(0,0)$ θα πρέπει $\lambda = 0$.

ix) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

Επιλέγω 2 διαδρομές $y=0$ και $y=\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} =$

Άρα $\nexists$ το όριο.

x) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

Επιλέγω τις διαδρομές

• $y=z=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

• $x=z=0$

$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

• $x=y=z$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$

Άρα το όριο $\nexists$.

xi) $$f(x,y,z) = \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+|z|}$$

Κοντά στο 0 θεωρούμε ότι $|z| \geq z^2$

$$\left|\frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+|z|}\right| \leq \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\|(x,y,z)\|^6}{\|(x,y,z)\|^2} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array}}$$

$$= \|(x,y,z)\|^4 \to 0$$

καθώς $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Οπότε από κρ. παρεμβολής

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

- Για να είναι η $g(x,y,z)$ συνεχής στο $(0,0,0)$ πρέπει $\lambda = 0$.

xii) $$f(x,y,z) = \left(1 + \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{x^2+y^2+z^2=t}\right)^{\frac{1}{\varepsilon\varphi(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{t\to 0^+} (1+t)^{\frac{1}{\varepsilon\varphi t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon\varphi t}\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{\varepsilon\varphi t}} = e,$$ εφόσον

ισχύει $$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\varepsilon\varphi t} \overset{DLH}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{(t+1)\sigma\upsilon\nu t} = 1.$$

- Για να είναι $g(x,y,z)$ συνεχής στο $(0,0,0)$ πρέπει $\lambda = e$.

4) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{xy}-1}{x}, \dfrac{1}{x^2+1}, \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} e^{y} \right) & , x \neq 0 \\ (y, 1, 0) & , x = 0 \end{cases}$

iv) $\vec{f}(x,y,z) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+z^2} \right) & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ (1, 0) & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Λύση:

i) $\left| \dfrac{xy}{|x|+|y|} \right| \leq \dfrac{|x| \cdot |y|}{|x|} = |y| \to 0$ καθώς το $y \to 0$. Οπότε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|} = 0$,

άρα f συνεχής στο $(0,0)$.

ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

Το $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2} = 1.$$

όμως $$\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Επιλέγω $y = x$ και $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{2x^2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \lim_{y\to 0}\left(1+\frac{y^2}{y^2}\right) = 2.$$

Άρα το όριο $\nexists$.

iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{xy}-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y e^{x}}{1} = y.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} e^{y} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \vec{f}(x,y) = (y, 1, 0)$$, άρα η $\vec{f}$ συνεχής

στο $x_0 = 0$.

iv) Για το $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy - z^2}{x^2+y^2+z^2}$

επιλέγω $y = x$, $z = 0$ και $x = y = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{z\to 0} -\frac{z^2}{z^2} = -1.$

Άρα το όριο $\nexists$, δεν έχει νόημα η συνέχεια