

Ανάλυση II - 21/03/2011 - μάθημα 12

Διαφορίση / Γραμμικοποίηση $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$

Θεωρούμε συνάρτηση f και \vec{p} οπού

$$\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{p} \in A \quad (A \text{ ανοικτό } \subseteq \mathbb{R}^n)$$

Η f είναι διαφορίση στο \vec{p}

$$\Leftrightarrow \text{αν υπάρχει } \vec{u}_{\vec{p}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Γραμμική
Συνάρτηση

$$\text{ώστε } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p}) - \vec{u}_{\vec{p}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

Εάν $\exists \vec{u}_{\vec{p}}$ είναι novadism,

$$\text{συμβολίζουμε } \vec{u}_{\vec{p}} = \boxed{d\vec{f}(\vec{p})} \quad (n \times m, f(\vec{p})) \text{ ή } d_1 \vec{f}(\vec{p})$$

και καλείται διαφορίση

της f στο \vec{p}

$$\text{λεοδιώματα } f(\vec{p} + \vec{h}) = f(\vec{p}) + d\vec{f}(\vec{p})(\vec{h}) + \underbrace{\|\vec{h}\| \vec{q}(\vec{h})}_{\text{σφάλμα}}$$

$$\mu\epsilon \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \vec{q}(\vec{h}) = \vec{0} = \vec{q}(\vec{0})$$

σφάλμα
της
γραμμικοποίησης

Την $\mathbf{L}(\vec{\rho} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{\rho}) + d\vec{f}(\vec{\rho})(\vec{h})$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$
 καλούμε Γραμμικοποίηση της \vec{f} στο $\vec{\rho}$

Ιδιότητες / Αλγεβρικές

$$\vec{f}, \vec{g} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{\rho} \in A$$

Εστω $\exists d\vec{f}(\vec{\rho}), d\vec{g}(\vec{\rho})$. Τότε:

$$i) d(\vec{f} + \vec{g})(\vec{\rho}) = d\vec{f}(\vec{\rho}) + d\vec{g}(\vec{\rho})$$

$$ii) d(\lambda \vec{f})(\vec{\rho}) = \lambda d\vec{f}(\vec{\rho}), \lambda \in \mathbb{R}$$

• Κανόνας της Αλυσίδωτης παραχώρησης
 (κανόνας Αλυσίδας ή διαδοχ. σύνδεσης συναρτήσεων)

$$\begin{array}{ccc}
 A (\subseteq \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\vec{f}} & B (\subseteq \mathbb{R}^m) \\
 \searrow \vec{g} \circ \vec{f} & & \downarrow \vec{g} \\
 & & \mathbb{R}^e
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\vec{f}(\vec{\rho})} & \mathbb{R}^m \\
 \searrow d(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{\rho}) & & \downarrow d\vec{g}(\vec{f}(\vec{\rho})) \\
 & & \mathbb{R}^e
 \end{array}$$

$$\exists d\vec{f}(\vec{\rho}), \exists d\vec{g}(\vec{f}(\vec{\rho}))$$

$$\text{Τότε } d(\vec{g}_0 \circ \vec{f})(\vec{\rho}) = d\vec{g}_0(\vec{f}(\vec{\rho})) \cdot d\vec{f}(\vec{\rho})$$

ο πίνακας

$$d(\vec{g}_0 \circ \vec{f})(\vec{\rho}) = \underbrace{\text{πιν}(d\vec{g}_0(\vec{f}(\vec{\rho}))) \cdot \text{πιν}(d\vec{f}(\vec{\rho}))}_{\text{γινόμενο πινάκων.}}$$

Ιδιότητες / Αναλυτικές

$$1) \vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\vec{\rho} \in A$. Τα E_{ξ} ns είναι ισοδύναμα:

$$(a) \exists d\vec{f}(\vec{\rho}), \quad (b) \exists df_1(\vec{\rho}), \dots, df_m(\vec{\rho})$$

$$\text{Τότε } \boxed{d\vec{f}(\vec{\rho}) = (df_1(\vec{\rho}), \dots, df_m(\vec{\rho}))}$$

$$2) f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } \exists df(\vec{\rho})$$

$$\text{Τότε } df(\vec{\rho})(\vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\rho}), \quad i = 1, \dots, n$$

Απόδειξη (του 12) (δεν εστιαζόμαστε)

$$\vec{h} = t \vec{e}_1$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p}) - df(\vec{p})(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{p} + t\vec{e}_1) - f(\vec{p}) - \underbrace{df(\vec{p})(t\vec{e}_1)}_{=0}}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{p} + t\vec{e}_1) - f(\vec{p}) - df(\vec{p})(\vec{e}_1)}{t} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{p}) = df(\vec{p})(\vec{e}_1)$$

Κρίσιμα υπαρχής διαγ. $df(\vec{p})$

Ⓐ $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$, $(i=1, \dots, n)$
 Ποζιόμε (δυνατότητα)

$$\text{αρχικά: } \nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\vec{p})$$

και αναπαράσσουμε Ανάλυση/William της f στο \vec{p}

T. E. E. 1.

$$a) \exists df(\vec{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b) \exists \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p}) - \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$$\text{Тоже } \boxed{df(\vec{p})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{h}} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$

$$df(\vec{p})(h_1 \vec{e}_1 + \dots + h_n \vec{e}_n) =$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{p}) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{h}$$

$$\textcircled{B} f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ на } \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n$$

на ива отворени от $\vec{p} \in A$)

$$\text{Тоже } \exists df(\vec{p})$$

То ависимо ду режи !! (Б. дѣла)

Πινакας διαφορικών στο \vec{p}

της $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\vec{p} \in A$)

Το $df(\vec{p}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Γραμμική αντιστοιχία

$\vec{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική (Πινакας της \vec{u}) =
 $= (u_1, u_2, \dots, u_m)$

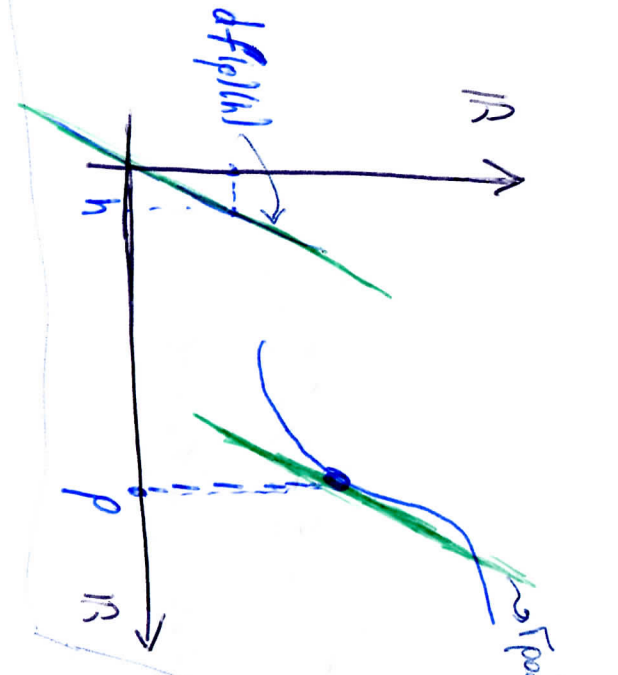
$= \begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1) & u_2(\vec{e}_2) & \dots & u_n(\vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m(\vec{e}_1) & u_m(\vec{e}_2) & \dots & u_m(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$

• $n = m = 1$, $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in A$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - df(p)(h)}{h} (= df(p)(h) \cdot h) = 0 \Rightarrow$

$df(p)(h) = f'(p) \cdot h$

Πινакας: $(f'(p))$ Παράγωγος / κλίση.



$$df(p|h) = f'(p)h, h \in \mathbb{R}$$

$n \geq 2, m = 1,$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

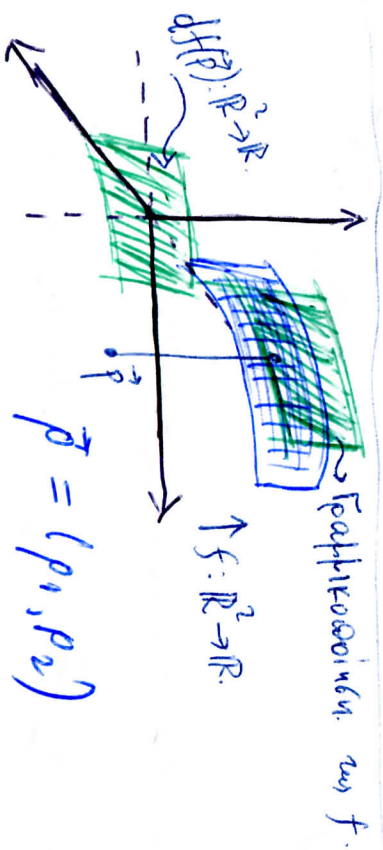
$$df(p|\vec{h}) = \nabla f(p) \cdot \vec{h}, h \in \mathbb{R}^n$$

(τινάκας του $df(p|\vec{h}) =$

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (p) \text{ Αριθ. 2 η/3 η/4 η/5}$$

• $n, m \geq 2$ (τινάκας του $df(p|\vec{h}) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h} \\ \vdots \\ \vec{h} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Τινάκας} \\ \text{Jacobi} \\ \text{της} \\ f \text{ στο } p \end{matrix}$$



Ασκησης

1) $f(x) = x^2, x \in [0, +\infty)$.

Να υπολογιστεί το $df(1)$, $df(10)$
και ο πίνακας του.

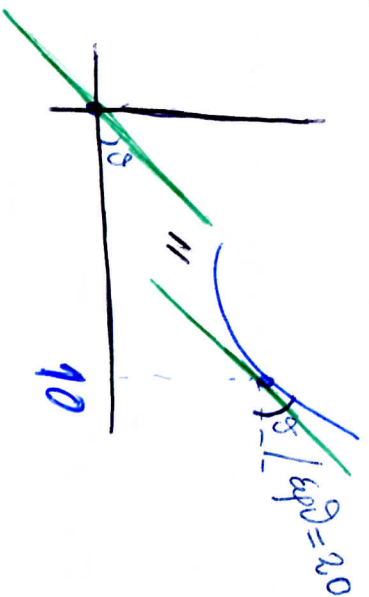
$$df(x)(h) = 2h, \quad h \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2$$

$$2 = df(x)(1)$$

$$df(10)(h) = 20h, \quad h \in \mathbb{R}$$

$$df(10)(1) = 20$$

$$f'(10) = 20$$



2) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Διηγ. $df(0, 1), df(2, 5)$ και του αντίστοιχου πίνακα.

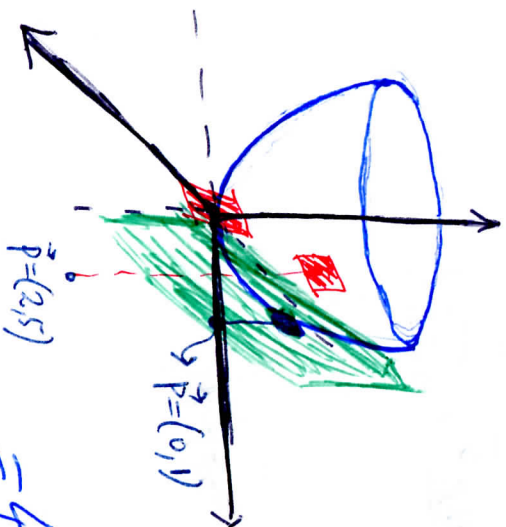
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 8y \end{aligned} \right\} \text{συνεχώς στον } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists df(x_0, y_0) \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h_1, h_2) =$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$df(0, 1)(h_1, h_2) = 0h_1 + 8h_2 = 8h_2, \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

Υαρολογησις (Επιπερασις) τῶν ἐπιπροσφορῶν



Πινακας

$$df(0, 1) = (0, 8)$$

$$df(2, 5)(h_1, h_2) =$$

$$= 4h_1 + 40h_2, \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$df(2, 5) = (4, 40)$$

3) $f(x, y, z) = e^x \cdot \sin x + \cos yz,$
 Να βρ. $df(0, 5, 10),$ Πινακας

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^x \sin yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -e^x \sin yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Συνεχῆς στὸν $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$df(x_0, y_0, z_0)(h_1, h_2, h_3) = Rf(x_0, y_0, z_0)$$

$$= h_1 e^{x_0} \sin y_0 z_0 - h_2 e^{x_0} \sin y_0 z_0$$

$$+ h_3 \frac{1}{1+z_0^2}$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$df(0, 5, 10)(h_1, h_2, h_3) =$$

$$= h_1(e^0 \sigma \nu 5) - h_2(e^0 \eta \mu 5) + h_3 \frac{1}{1+10^2}$$

$$\text{πivanas } \nabla f(0, 5, 10) = (\sigma \nu 5, -\eta \mu 5, \frac{1}{101})$$

$$4) \vec{f}(x, y) = (x^2 + 1, \tau \sigma \zeta \epsilon \varphi y),$$

$$d\vec{f}(5, 6), \text{ πivanas.}$$

$$\bullet f_1(x, y) = x^2 + 1, \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x, \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\text{Συνοχεις} \Rightarrow \exists df_1(x_0, y_0) \text{ π.ο.}$$

$$\bullet f_2(x, y) = \tau \sigma \zeta \epsilon \varphi y, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \Rightarrow \exists df_2(x_0, y_0) \text{ π.ο.}$$

$$\Rightarrow \exists d\vec{f}(5, 6) = (df_1(5, 6), df_2(5, 6))$$

$$d\vec{f}(5, 6)(h_1, h_2) = (10h_1 + 0h_2, 0h_1 + \frac{1}{37}h_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{f}}(5, 6) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/37 \end{pmatrix}$$