ΜΑΘΗΜΑ ΙΙΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Α) ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. και ότι η συνάρτηση $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ είναι φραγμένη.

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Άρα $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy = 0.$$

ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Ομοίως $\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right| \le 1 \iff 2|x||y| \le x^2+y^2 \iff (|x|-|y|)^2 \ge 0.$

Άρα $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$$

(Μηδενική επί φραγμένη)

iii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y^2z+xyz+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

$$\left|\frac{x^3+y^2z+xyz+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^2|z|+|x|\cdot|y|\cdot|z|+|z|^3}{\|(x,y,z)\|^2}$$

$$\boxed{|x| \leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\|(x,y,z)\|}} \leq \frac{4\|(x,y,z)\|^3}{\|(x,y,z)\|^2} = 4\|(x,y,z)\| \to 0$$

καθώς $(x,y,z)\to(0,0,0)$.

Άρα από Κ. Παρεμβολής και το όριο που ψάχνουμε είναι 0.

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2x^4+y^4}{x^2+y^2}, \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \dfrac{y^3-2xy^2}{x^2+y^2}\right)$

Τα όρια είναι 0, διότι:

$$\left|\frac{2x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{2|x|^4+|y|^4}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{2\|(x,y)\|^4+\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = 3\|(x,y)\|^2 \to 0$$

καθώς $(x,y)\to(0,0)$.

Άρα από Κρ. Παρεμβολής, έχουμε ότι και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

Ομοίως $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \|(x,y)\| \to 0$

άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$,

και $\left|\frac{y^3-2xy^2}{x^2+y^2}\right| \le 3\|(x,y)\| \to 0$

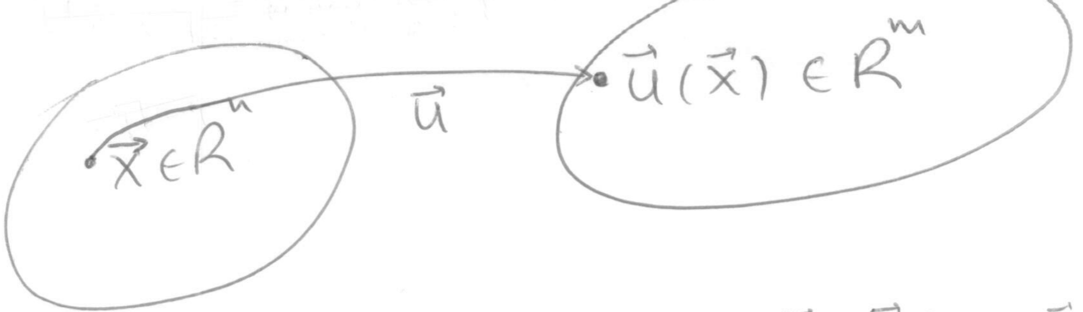
Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-2xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

Τελικά:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2x^4+y^4}{x^2+y^2}, \frac{x^3}{x^2+y^2}, \frac{y^3-2xy^2}{x^2+y^2}\right) = (0,0,0)$$

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$$\vec{u}: R^n \to R^m$$



$$\begin{cases} \vec{u}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y}), & \vec{x},\vec{y} \in R^n \\ \vec{u}(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{u}(\vec{x}), & \vec{x} \in R^n, \lambda \in R \end{cases}$$

Γενικότερα: $\vec{u}(\kappa\vec{x}+\lambda\vec{y}) = \kappa\vec{u}(\vec{x}) + \lambda\vec{u}(\vec{y})$, $\kappa,\lambda \in R$

π.χ. ένας πίνακας $A \in R^{m \times n}$ είναι μια τέτοια γραμμική απεικόνιση από τον $\underline{R^n \longrightarrow R^m}$ στον R^m!

Έστω $\vec{x} \in R^{n \times 1}$

$$A \cdot \vec{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \text{- - - - - - - -} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in R^{m \times 1}$$

Αντίστροφα αν $\vec{u}(x,y,z) = (x+y, 2x+5z, 9x+10y+11$

Ποιος είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση; $\vec{u} : R^3 \to R^3$ $(A \in R^{3 \times 3})$

Εφόσον $\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + 0z \\ 2x + 0y + 5z \\ 9x + 10y + 11z \end{pmatrix} =$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Άσκηση: Να βρεθεί ο πίνακας που αντιστοιχεί στις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις:

i) $\vec{u}(x,y) = (14x, 18x+y, 13y)$

ii) $\vec{u}(x,y,z) = (x+y, y+z)$

iii) $\vec{u}(x,y,z) = (2x-y, x+z, 5y-z, 11y+z)$

(Υπόδειξη: σχηματίστε το διάνυσμα όπως στο τέλος σελ. 4 και πάρτε τους συν/τές!)

Γ. ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

i) $f(x,y,z) = x^2y^2 + e^z \text{συν}(xy) + xy^2z + \text{τοξεφ}(xy) + \log(x^4+1)$

Να υπολογιστούν $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ στο $(1,2,3)$

ii) $f(x,y) = x^5y^2 + e^{xy}\text{συν}y + \log(x^2+2y^2+1) + \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{y}\right)$

Να υπολογιστούν $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)$

Παρατήρηση: Η τοξεφ είναι γνωστή συνάρτηση

ώστε $y = \arctan x \iff x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$y = \text{τοξεφ}(x) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

και $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{τοξεφ}(x) + c$

Λύσεις

i) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - e^z y\,\eta\mu(xy) + y^2 z + \frac{1}{1+x^2y^2}\,y + \frac{4x^3}{x^4+1}\cdot\frac{1}{\ln 10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 - e^z x\,\eta\mu(xy) + 2xyz + \frac{1}{1+x^2y^2}\,x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sigma\upsilon\nu(xy)\,e^z + xy^2$$

Οπότε βρίσκω στο ζητούμενο σημείο $(1,2,3)$.

ii) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^2 + y e^{xy}\,\sigma\upsilon\nu y + \frac{2x}{x^2+2y^2+1}\cdot\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^5y + x e^{xy}\,\sigma\upsilon\nu y - e^{xy}\,\eta\mu y + \frac{4y}{x^2+2y^2+1}\cdot\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

... στη συνέχεια υπολογίζω στο $(2,5)$.