ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΜΑΘΗΜΑ IV

Ορισμός Διαφορικού:

Έστω $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, και $\vec{p} \in A$ σταθερό.

(A ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$)

$\vec{f}$ διαφορίσιμη στο $\vec{p} \iff \exists\ \vec{u}_{\vec{p}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Γραμμική Συνάρτηση)

ώστε $$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{p}+\vec{h}) - f(\vec{p}) - \vec{u}_{\vec{p}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

Αν $\exists\ \vec{u}_{\vec{p}}$ είναι μοναδική και συμβολίζουμε

$\vec{u}_{\vec{p}} = d\vec{f}(\vec{p})$ και καλείται διαφορικό της $\vec{f}$ στο $\vec{p}$.

- Το διαφορικό είναι γραμμική συνάρτηση, άρα:

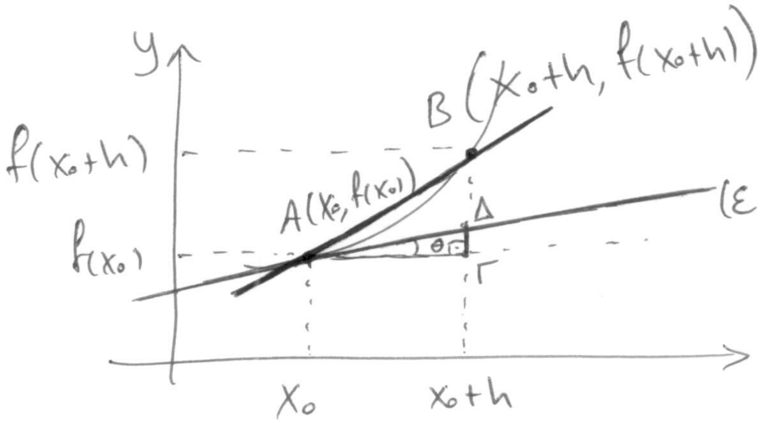
  i) $d(\vec{f}+\vec{g})\vec{p} = d\vec{f}(\vec{p}) + d\vec{g}(\vec{p})$

  ii) $d(\lambda\vec{f})(\vec{p}) = \lambda\, d\vec{f}(\vec{p}),\ \lambda \in \mathbb{R}$

- Το διαφορικό είναι γραμμική προσέγγιση της μεταβολής.

Εφαρμογή στο $\mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f παρ/μη



$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Έστω $h>0$ $\quad h = \Delta x = x_0 + h - x_0$, $\boxed{df(x) = f'(x)\cdot h = f'(x)\Delta x}$

Μεταβολή (στον $y'y$): $\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$

Από εξ. εφαπτομένης: $y_\Delta = f'(x_0)\cdot h + f(x_0)$

για $x = x_0 + h$

$$\Delta\left(x_0+h,\ f'(x_0)\cdot h + f(x_0)\right)$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{(\Delta\Gamma)}{h} \iff f'(x_0)\, h = (\Delta\Gamma)$$

$$df(x_0) = (\Delta\Gamma)$$

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h =$$

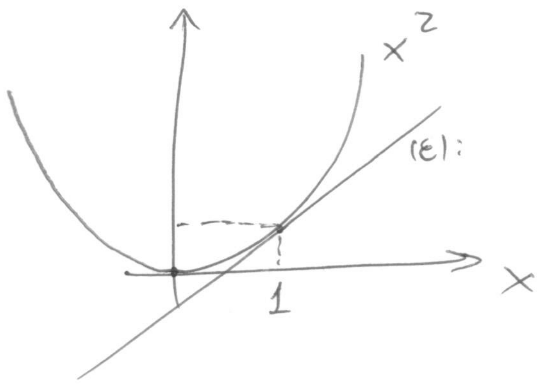
$$= h\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\Delta f(x_0) - df(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\left\{h\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right]\right\} = 0$$

$$\Delta f(x_0) \simeq df(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h \quad \text{για } h \to 0.$$

Παράδειγμα:

Έστω $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



Να υπολογιστεί το $df(1)$ $(x_0 = 1)$

$f'(x) = 2x$

Μεταβολή: $\Delta f(x_0)(h) \overset{h>0}{=} f(x_0+h) - f(x_0) =$
$= (x_0+h)^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0 h \overset{x_0=1}{=} h^2 + 2h.$

Διαφορικό: $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \overset{x_0=1}{=} \boxed{2}h$

Το διαφορικό είναι γραμμική προσέγγιση της μεταβολής. (h^2 μικρό σε σχέση με το $2h$).

$\Delta f(1)(h) = h^2 + 2h$, $df(1)(h) = 2h$

για $h = 0{,}01$ (μικρό)

$\Delta f(1)(0{,}01) = 10^{-4} + 0{,}02 =$, $df(1)(0{,}01) = 0{,}02$
$= 0{,}0201$

Άρα $\Delta f(1)(0{,}01) \simeq df(1)(0{,}01)$

Εύρεση Διαφορικού (στην πράξη)

$d\vec{f}(\vec{p}) : R^n \to R^m$ Γραμμική Συνάρτηση ή Πίν. $A_{m\times n}$

- $n = m = 1$ $\quad f : A(\subseteq R) \to R \quad p \in A$

$$df(p)(h) = f'(p)\cdot h$$

Ο Πίνακας του διαφορικού εδώ είναι στοιχείο του R και είναι το $f'(p)$.

- $n \geq 2,\ m = 1 \quad f : A(\subseteq R^n) \to R \quad (A_{1\times n} : \text{διαν.})$

$$df(\vec{p})\vec{h} = \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{h}, \quad \vec{h}\in R^n$$

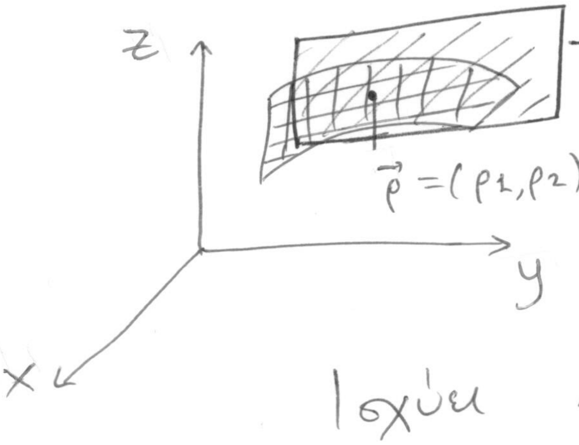
$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ανάδελτα}}}{\nabla} f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\vec{p})$$ ο πίνακας διαφορικού διάστασης $1\times n$.

- $n, m \geq 2$ ο πίνακας του $d\vec{f}(\vec{p})$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{J_{\vec{f}} \text{ ή } d\vec{f}} (\vec{p})$$ ο πίνακας Jacobi της $\vec{f}$ στο $\vec{p}$

Εφαρμογή στον R^2:

Έστω $f: A(\subseteq R^2) \to R$



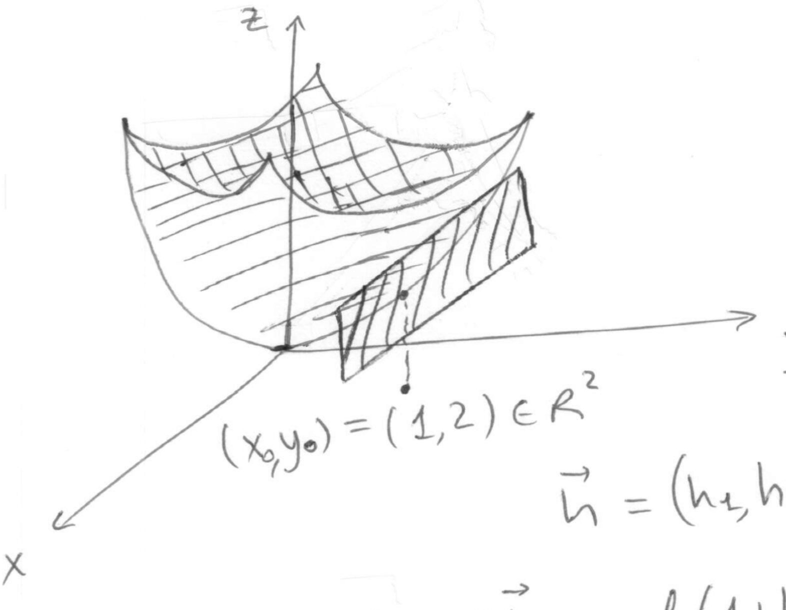
→ Γραμμικοποίηση της f μέσω διαφορικού!

Ισχύει $\Delta \vec{f}(\vec{p}) \simeq d\vec{f}(\vec{p})$

Παράδειγμα:

$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad , (x,y) \in R^2 \quad (f: R^2 \to R)$

$df \in R^{1\times 2}$



Να βρεθεί το $df(1,2)$ και να υπολογιστεί για $\vec{h} = (0.01, 0.02)$

$\vec{h} = (h_1, h_2) = (\Delta x, \Delta y) \quad \begin{pmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{pmatrix}$

Μεταβολή: $\Delta f(1,2)\vec{h} = f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) =$

$= (1+h_1)^2 + (2+h_2)^2 - 1^2 - 2^2 =$

$= \cancel{1} + h_1^2 + 2h_1 + \cancel{4} + 4h_2 + h_2^2 - \cancel{1} - \cancel{4} =$

$= 2h_1 + 4h_2 + h_1^2 + h_2^2$

Διαφορικό:

$$\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$$

$$\boxed{df(\vec{p})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{h}}$$

$$df(1,2)\vec{h} = (2,4)\cdot(h_1, h_2) = 2h_1 + 4h_2$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι $\Delta f(1,2)(\vec{h}) = df(1,2)\vec{h} + \|\vec{h}\|_2^2$

Ο υπολογισμός της μεταβολής δεν είναι πάντα απλός.

Εδώ για $\vec{h} = (0.01, 0.02)$

$$\Delta f(1,2)(0.01, 0.02) = 0.02 + 0.08 + 10^{-4} + 4\cdot 10^{-4} =$$
$$= 0.1 + 5\cdot 10^{-4} = 0.1005$$

ενώ $df(1,2)(\vec{h}) = 2\cdot 0.01 + 4\cdot 0.02 = 0.1 \simeq \Delta f(1,2)(\vec{h})$

Κριτήριο ύπαρξης Διαφορικού:

Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ και $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots, n$

και είναι συνεχείς στο $\vec{p} \in A$ τότε $(\Rightarrow)$

$$\exists \text{ το } d\vec{f}(\vec{p})$$

Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει!

π.χ. $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

Ασκήσεις:

$A_{1\times 2}$

1) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \quad (x,y) \in R^2 \quad (f: R^2 \to R)$

Βρείτε το $df(0,1)$, $df(2,5)$ και τους αντ. πίνακες.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{συνεχείς στον } R^2$$

$\exists\, df(x_0,y_0) \quad \forall (x_0,y_0) \in R^2$

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \vec{h} =$$

$$= 2x_0 \cdot h_1 + 8y_0 \cdot h_2 \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot h_2 \right)$$

- $df(0,1) = 0\cdot h_1 + 8h_2 = 8h_2$, $\underbrace{\nabla f(0,1) = (0,8)}_{\text{πίνακας διαφ.}}$

- $df(2,5) = 4h_1 + 40h_2$, $\underbrace{\nabla f(2,5) = (4,40)}_{\text{πίνακας διαφ.}}$

2) $f(x,y,z) = e^x \sigma\upsilon\nu y + \tau o\xi \epsilon\varphi(z)$ $(f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

Να βρεθεί το $df(0,5,10)$ και ο πιν. διαφορ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x \sigma\upsilon\nu y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -e^x \eta\mu y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow$

$\exists$ το $df(\vec{p})$, $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0)$.

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(e^{x_0} \sigma\upsilon\nu y_0, -e^{x_0} \eta\mu y_0, \frac{1}{1+z_0^2}\right)$$

ο πίνακ. διαφ. διάστασης 1×3.

Άρα εδώ $\nabla f(0,5,10) = \left(\sigma\upsilon\nu 5, -\eta\mu 5, \frac{1}{101}\right)$

<u>Διαφορικό:</u> $df(x_0,y_0,z_0)(\vec{h}) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{h}$

Εδώ $df(0,5,10)(h_1,h_2,h_3) = h_1 \sigma\upsilon\nu 5 - h_2 \eta\mu 5 + \frac{h_3}{101}$

Ερώτηση: αν αλλάζει το (x_0, y_0, z_0) αλλάζει

- το διαφορικό ?
- ο πίνακας του διαφορικού ?

3) $\vec{f}(x,y) = \left(x^2+1,\ \text{τοξεφ}(y)\right)$ $\quad \left(\vec{f}: R^2 \to R^2\right)_{A_{2\times 2} = J_{\vec{f}}}$

Βρείτε $d\vec{f}(5,6)$ και τον πίνακα διαφ.

$f_1(x,y) = x^2+1$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0$

Συνεχείς $\Rightarrow \exists$ το $df_1(x_0,y_0)$

$df_1(5,6) = 10h_1 + 0h_2 = 10h_1$

$f_2(x,y) = \text{τοξεφ}(y)$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2}$

Συνεχείς $\Rightarrow \exists$ το $df_2(x_0,y_0)$

$df_2(5,6) = 0\cdot h_1 + \dfrac{1}{37}h_2 = \dfrac{1}{37}h_2$

$$d\vec{f}(5,6)(h_1,h_2) = \left(10h_1 + 0h_2,\ 0h_1 + \frac{1}{37}h_2\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{1}{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Άρα $\quad J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{1}{37} \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$

4) $\vec{f}(x,y) = \left(x^2+y^4,\ \sigma\upsilon\nu(x^3),\ \ln(y^2+5)\right)$

Βρείτε $d\vec{f}(1,2)$, $J_{\vec{f}}(1,2)$ $\qquad \vec{f}: R^2 \to R^3$

$f_1(x,y) = x^2+y^4$,

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4y^3$,

Συνεχείς στο R^2

$\Rightarrow \exists\ df_1(1,2)$

$df_1(1,2)(h_1,h_2) =$

$= 2h_1 + 32h_2$

$f_2(x,y) = \sigma\upsilon\nu(x^3)$,

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -3x^2\eta\mu(x^3)$,

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

Συνεχείς στο R^2

$\Rightarrow \exists\ df_2(1,2)$

$df_2(1,2)(h_1,h_2) =$

$= -3\eta\mu 1\, h_1 + 0h_2$

$f_3(x,y) = \ln(y^2+5)$

$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$,

$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+5}$

Συνεχείς στο R^2

$\Rightarrow \exists$ το $df_3(1,2)$

$df_3(1,2)(h_1,h_2) =$

$= 0h_1 + \frac{4}{9}h_2$

$$d\vec{f}(1,2)(h_1,h_2) = \left(2h_1+32h_2,\ -3\eta\mu 1\, h_1,\ \frac{4}{9}h_2\right)$$

$$J_{\vec{f}}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 32 \\ -3\eta\mu 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \in R^{3\times 2},$$

διότι $J_{\vec{f}}(1,2)\cdot\underbrace{(h_1,h_2)}_{\vec{h}} = d\vec{f}(1,2)(h_1,h_2)$