ΜΑΘΗΜΑ V – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

1) Έστω $\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{xy}{z}, \ln(xy) + e^{zx} \right)$

Να βρεθεί το $d\vec{f}(1,2,1)$, $J_{\vec{f}}(1,2,1)$

$\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^2$ άρα $J_{\vec{f}} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

• $f_1(x,y,z) = \frac{xy}{z}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{z}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x}{z}$,

$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{xy}{z^2}$ συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\exists \; df_1(1,2,1)\underbrace{(h_1,h_2,h_3)}_{\vec{h}} =$

$= h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,1) + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2,1) + h_3 \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,2,1) =$

$= 2h_1 + h_2 - 2h_3$

• $f_2(x,y,z) = \ln(xy) + e^{zx}$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{x} + ze^{zx}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = xe^{zx}$ συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \text{ το } df_2(1,2,1)(h_1,h_2,h_3) =$$

$$= h_1(1+e) + \frac{1}{2}h_2 + eh_3$$

$$d\vec{f}(1,2,1)(h_1,h_2,h_3) = \left(2h_1 + h_2 - 2h_3, (1+e)h_1 + \frac{1}{2}h_2 + eh_3\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1+e & \frac{1}{2} & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

και $$J_{\vec{f}}(1,2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1+e & \frac{1}{2} & e \end{pmatrix}$$

Πότε μια συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Υπάρχει το διαφορικό της f στο $(0,0)$;

Λύση:

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (1,0) \text{ , εφόσον}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)\Big|_{x=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\Big|_{y=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\boxed{\exists\, df(\vec{p}) \iff \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{p}+\vec{h}) - f(\vec{p}) - \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0}$$

$$\lim_{\vec{h}\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(h_1,h_2)}{\|\vec{h}\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

Παρατηρούμε ότι εάν θέσουμε

$\underline{h_1 = h_2 = h > 0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{h^3}{2^{3/2}|h|^3}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Άρα δεν είναι μηδέν, συνεπώς η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Προσοχή το όριο μπορεί να υπάρχει!!

3) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

<u>Λύση:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)\Big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\Big|_{y=0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{\vec{h}\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1^2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + 2h_1 - (2h_1+0h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{\|(h_1,h_2)\|^2} = 0 \quad, \text{ διότι}$$

$$\left|\frac{h_1^2 h_2}{\|(h_1,h_2)\|^2}\right| = \frac{|h_1|^2|h_2|}{\|(h_1,h_2)\|^2} \leq \frac{\|(h_1,h_2)\|^3}{\|(h_1,h_2)\|^2} =$$

$$= \|(h_1,h_2)\| \to 0$$

καθώς $h_1, h_2 \to 0$.

Άρα $\exists\, df(0,0)(h_1,h_2) = 2h_1 + 0h_2$

Είναι συνεχής η f στο $\vec{p}=\vec{0}$;

Ναι εφόσον διαφορίσιμη, το αντίστροφο γενικώς δεν ισχύει!

$$\exists\, df(\vec{p}) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ συνεχής στο } \vec{p}$$

+ σελ. 133-135 – Μαθ. 13 – 2010/2011

Κανόνας Αλυσίδας για το Διαφορικό:

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$ και αν

f, g παρ/μες τότε $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

- Αν $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ διαφ. στο $\vec{x}\in A$, $f(A)\subseteq B$ και $g: B \to \mathbb{R}^l$ διαφ. στο $f(\vec{x})$ τότε: $g\circ f: A \to \mathbb{R}^l$ διαφ. στο $\vec{x}$ με $\boxed{D(\vec{g}\circ\vec{f})_{\vec{x}} = D\vec{g}_{f(\vec{x})}\circ D\vec{f}_{\vec{x}}}$

- Αν

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[rr, bend right, "\vec{h}=\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\vec{g}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

τότε $J\vec{h} \in \mathbb{R}^{l\times n}$

όπου $\vec{h}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$= \big(h_1(x_1, x_2 \dots x_n), h_2(x_1, x_2, \dots x_n), \dots h_l(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$

Δηλαδή

$$J\vec{h}_{\vec{t}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial h_l}{\partial t_1} & \dfrac{\partial h_l}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_l}{\partial t_n} \end{pmatrix}_{\vec{t}_0}$$

Όμως $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ και για

$\vec{g}$ θα είναι ένας $l \times m$ πίνακας,

$\vec{f}$ θα είναι ένας $m \times n$ πίνακας

$$J_{\vec{g}} = \begin{array}{cc} & m \\ l & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial g_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_l}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_l}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{\vec{f}(\vec{t}_0)} \end{array}$$

$$J\vec{f} = \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial t_n} \end{pmatrix}_{\vec{t}_0} \end{array}$$

Ισχύει $J(\vec{g} \circ \vec{f})_{\vec{t}_0} = J(\vec{g})_{\vec{f}(\vec{t}_0)} \cdot J\vec{f}_{\vec{t}_0}$

Αναλυτικά το στοιχείο $J\vec{h}_{i,j}$ προκύπτει ως γιν. i-γραμμής του $1^{ου}$ επί j-στήλης του $2^{ου}$ πίνακα.

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_j} + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_m}\frac{\partial f_m}{\partial t_j}$$

για $i = 1, \dots, l$ και $j = 1, \dots, n$.

Η j-στήλη του $J\vec{h}$ είναι

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_j} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial t_j} \end{pmatrix}_{\vec{t}_0} = \left.\frac{\partial h}{\partial t_j}\right|_{\vec{t}_0}$$

Άρα $$J\vec{h}_{\vec{t}_0} = \underbrace{\left(\left.\frac{\partial h}{\partial t_1}\right|_{\vec{t}_0}, \left.\frac{\partial h}{\partial t_2}\right|_{\vec{t}_0}, \dots \left.\frac{\partial h}{\partial t_n}\right|_{\vec{t}_0} \right)}_{\text{Διανυσματική μορφή του Jacobi}} =$$

$$= \boxed{\nabla_{\vec{t}_0} \vec{h}}\,,$$ δηλαδή

$$(D\vec{h})_{\vec{t}_0}(\vec{s}) = (\nabla_{\vec{t}_0}\vec{h}) \cdot \vec{s}$$: Εσωτ. γινόμενο

Άσκηση: Υπολογίστε την παράγωγο

$$(\vec f \circ \vec\varphi)'(1,1)$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\vec\varphi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\vec f} \mathbb{R}^3, \qquad \vec\varphi(u,v) = (u+2v, uv, u^2+v)$$

$$\vec h = \vec f \circ \vec\varphi \qquad \vec f(x,y,z) = (x^2+y, yz, x^2 z)$$

$$(\vec f \circ \vec\varphi)'(1,1) = \nabla_{(1,1)} \vec h = \nabla \vec f_{\vec\varphi(1,1)} \cdot \nabla \vec\varphi_{(1,1)} =$$

$$= J_{\vec f \, \vec\varphi(1,1)} \cdot J_{\vec\varphi(1,1)}$$

$$J_{\vec\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ v & u \\ 2u & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec\varphi(1,1) = (3,1,2)$$

$$J_{\vec f} = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & z & y \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec f \circ \vec\varphi)'(1,1) = J_{\vec f_{(3,1,2)}} \cdot J_{\vec\varphi_{(1,1)}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 4 & 3 \\ 30 & 33 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$