Μάθημα 15ο

30-4

Άσκηση. Έστω $\omega(x,y,z) = x + 2y + z^2$ και όπ

$x = r/s,\ y = r^2 + \ln s,\ z = 2s.$

(i) Να βρεθούν οι $\frac{\partial}{\partial r}(\omega\circ\vec{\varphi})$, $\frac{\partial}{\partial s}(\omega\circ\vec{\varphi})$ με χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

(ii) Επαληθεύσατε το αποτέλεσμα.

Απαντήσεις. (i) Έχουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{tikzcd}
(r,s) \arrow[r, "\vec{\varphi}"] \arrow[dr, "\omega\circ\varphi"'] & (x,y,z) \arrow[d, "\omega"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

με τύπο $(\omega\circ\varphi)(r,s) = \omega(x(r,s), y(r,s), z(r,s))$

$= \omega(r/s, r^2+\ln s, 2s)$

Υπολογίζουμε τους πίνακες των διαφορικών των $\vec{\varphi}, \omega$ στα αντίστοιχα σημεία:

$$J_{(r_0,s_0)}(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{pmatrix}_{(r_0,s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/s & -r/s^2 \\ 2r & 1/s \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{(r_0,s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/s_0 & -r_0/s_0^2 \\ 2r_0 & 1/s_0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{και}$$

$$J_{\vec{\varphi}(r_0,s_0)}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{\varphi}(r_0,s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2s \end{pmatrix}_{\vec{\varphi}(r_0,s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2z(r_0,s_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4s_0 \end{pmatrix}.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, θα έχουμε πως:

$$J(\omega\circ\vec{\varphi})_{(r_0,s_0)} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(\omega\circ\vec{\varphi}) \quad \frac{\partial}{\partial s}(\omega\circ\vec{\varphi}) \right)_{(r_0,s_0)}$$

$$= J_{\vec{\varphi}(r_0,s_0)}(\omega) \cdot J_{(r_0,s_0)}(\vec{\varphi})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4s_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s_0 & -r_0/s_0^2 \\ 2r_0 & 1/s_0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/s_0 + 4r_0 + 8s_0 \\ -r_0/s_0^2 + 2/s_0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_0 + 4r_0 + 8s_0 \\ -r_0/s_0^2 + 2/s_0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Επαλήθευση:

$$(\omega\circ\vec{r})(r,s) = x(r,s) + 2y(r,s) + z^2(r,s)$$

$$= r/s + 2(r^2 + \ln s) + 4s^2$$

οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\omega\circ\vec{r})(r,s) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{s} + 2(r^2+\ln s) + 4s^2 \right)$$

$$= \frac{1}{s} + 4r,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\omega\circ\vec{r})(r,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(r/s + 2(r^2+\ln s) + 4s^2 \right)$$

$$= 1/s + 2/s + 8s.$$

(*)

Άσκηση. Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμη.

Ο τελεστής Laplace $\nabla^2 f$ της f, ορίζεται ως

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(Ορίζουμε $\nabla^2 f \equiv 0 \iff f$ αρμονική)

Εάν $F(r,\varphi) = f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = f(r\,\text{συν}\varphi, r\,\text{ημ}\varphi)$

Να αποδειχθεί ότι:

(i) $$\|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2$$

(ii) $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

(*)

Απαντήσεις. (i) Έχουμε την σύνθεση F των συναρτήσεων:

$$\begin{tikzcd} (r,\varphi) \arrow[r, "\vec{g}"] \arrow[dr, dashed, "F = f\circ \vec{g}"'] & (x,y) \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\vec{g}(r,\varphi) = (r\,\text{συν}\varphi, r\,\text{ημ}\varphi)$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma\upsilon\nu\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\eta\mu\varphi)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\,\eta\mu\varphi$$

και επίσης

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\,\sigma\upsilon\nu\varphi) + \qquad (r\,\eta\mu\varphi)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\,\eta\mu\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\,r\,\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Υπολογίζουμε τώρα

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\varphi\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left(-r\,\eta\mu\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right.$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \|\nabla f\|^2, \text{ ΟΕΔ.}$$

(ii) Απαιτητικό. Αφήνεται ως άσκηση.

(6) Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι C^1 και ισχύει, $\forall \lambda > 0$,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} f(x_1, \dots, x_n) \qquad (1)$$

Ν.δ.ο. $\underline{x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)}$. (Euler)

($\alpha \in \mathbb{R}$)

Αποδ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας. Ορίζουμε

$$\mathbb{R}_{\lambda} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n_{(x_1,\dots,x_n)} - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\lambda}$$

όπου $\varphi(\lambda) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))$

και έχει νόημα η σύνθεση $h = f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Υπολογίζουμε

$$h'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\{f(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))\} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n$$

$$= \nabla f(\varphi(\lambda)) \cdot x \qquad (2)$$

Επίσης έχουμε

$$h(\lambda)=f(\varphi_1(\lambda),..,\varphi_n(\lambda))=f(\lambda x_1,..,\lambda x_n)$$

$$=\lambda^{\alpha} f(x_1,..,x_n)$$

από την (1). Παραγωγίζοντας:

$$h'(\lambda)=\alpha\lambda^{\alpha-1} f(x_1,..,x_n) \quad (3).$$

Εξισώνοντας τις (2), (3):

$$\nabla f(\varphi(\lambda))\cdot x=\alpha\lambda^{\alpha-1} f(x)$$

και για $\lambda=1$:

$$\nabla f(\varphi(1))\cdot x=\nabla f(x)\cdot x=\alpha f(x$$

Εφαρμογή.

Έστω σώμα μάζας M στο κέντρο οποίο βρίσκεται στο σημείο $(0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$. Εάν μάζα m τοποθετηθεί στο σημείο $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ τότε θα δεχθεί δύναμη $\vec{F}=-\nabla V$, όπου V η συνάρτηση βαρυτικού δυναμικού με τύπο

$$V(x,y,z)=-GMm/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}.$$

(i) Να δείξετε ότι η V είναι ομογενής βαθμού $\alpha=$

(ii) Ισχύει $(x,y,z)\cdot\vec{F}=-V$.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό. Θεωρούμε $\vec{x}_0 \in A$ σταθερό και τυχόν $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\|=1$. Καθώς το A είναι ανοικτό, υπάρχει διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο 0, τέτοιο ώστε $\vec{x}_0 + t\vec{a} \in A$ για $t \in I$. Ορίζεται συνεπώς η συνάρτηση $g: I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$, $t \in I$. Εάν $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$, η σύνθεση $h = f \circ g : I \to \mathbb{R}$ θα είναι διαφορίσιμη, και από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \nabla f(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) \cdot \vec{a}, \quad t \in I$$

Ειδικότερα, θα υπάρχει η $h'(0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{a}$.

Ορισμός. Έστω f ως ανωτέρω. Η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ της f στο $\vec{x}_0 \in A$ προς την κατεύθυνση $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$\boxed{D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{a}}$$

Παρατηρήσεις.

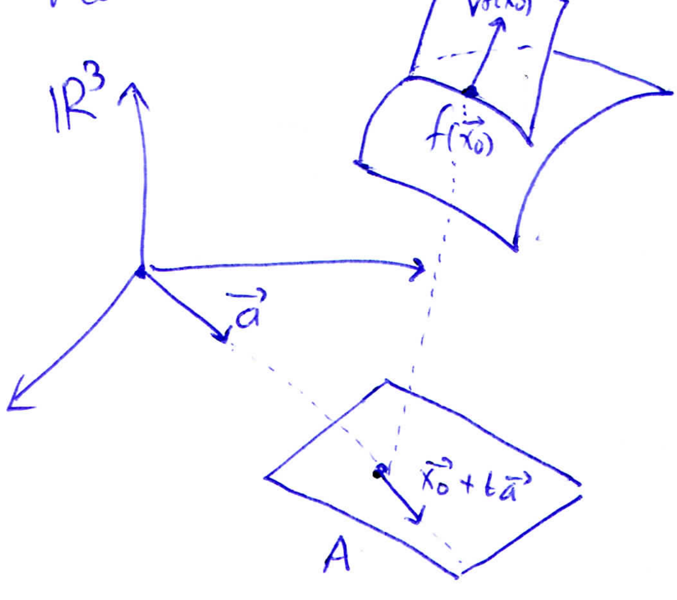
(i) Για $\vec{a} = \vec{e_i}$ το i διάνυσμα της συνήθους βάσης, είναι $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = D_{\vec{e_i}} f(\vec{x_0}) = \vec{e_i} \cdot \nabla f(\vec{x_0})$
$= \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$.

(ii) Ενδέχεται η f να μην είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$, αλλά η $h'(0)$ να υπάρχει. Δηλαδ[ή] η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν το $\nabla f(\vec{x_0})$ δεν ορίζεται.

(iii) Η ύπαρξη του $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ στο $\vec{x_0}$ ως π[ρος] κάθε $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, δεν συνεπάγεται ούτε καν την συνέχεια της f στο $\vec{x_0}$.

Γεωμετρική Ερμηνεία.

Για $n=2$



Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot$ μας δίνει την μεταβολή της f στο $\vec{x_0}$, για διάφο[ρες] κατευθύνσεις $\vec{a}$.

<u>Ερώτημα.</u> Για ποιές κατευθύνσεις $\vec{a}$ η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ γίνεται μέγιστη/ελάχιστη;

<u>Απάντηση.</u> Απο τις ιδιότητες του εσ. γινομέν[...]
θα έχουμε πως

– Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ είναι μέγιστη όταν $\vec{a} = \frac{\nabla f(\vec{x_0}) \ldots}{\|\nabla f(\vec{x_0}) \ldots}$

– Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ είναι ελάχιστη όταν $\vec{a} = -\frac{\nabla f(\vec{x_0}) \ldots}{\|\nabla f(\vec{x_0}) \ldots}$

<u>Άσκηση.</u> Έστω $f(x,y,z) = xyz\, e^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπ[...]
ποθεί η $D_{\vec{a}} f(0,1,1)$ στην κατεύθυνση $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots$

<u>Απάντηση.</u> Υπολογίζουμε το $\nabla f(0,1,1) =$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(0,1,1)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xyz e^{x^2+y^2+z^2}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(xyz e^{x^2+y^2+z^2}\right), \ldots \right.$$

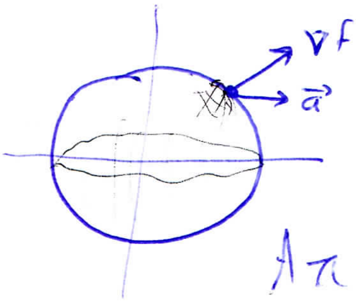
$$= \left(yz e^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2 y e^{x^2+y^2+z^2},\ xz e^{x^2+y^2+z^2} + 2xy^2 e^{x^2+y^2+z^2},\ xy e^{x^2+y^2+z^2} + 2xyz^2 e^{x^2+y^2 \ldots} \right.$$

$= (e^2, 0, 0)$ και άρα $D_{\vec{a}} f(0,1,1) =$

$= \nabla f(0,1,1) \cdot \vec{a} = e^2/\sqrt{2}$.

<u>Άσκηση.</u> Έστω $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και το σημείο $(1,1,1)$. Για ποιές κατευθύνσεις $\vec{a}$ η $D_{\vec{a}} f(1,1,1)$ παρουσιάζει μέγιστη αύξηση; Για ποιές ελάχιστη; Για ποιές μηδενική;

<u>Απάντηση.</u> Η σχέση $f(x,y,z) = c$, $c>0$ ορίζει μία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$, ακτίνας $\sqrt{c}$.



Είναι $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

άρα $\nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$.

Από τα προηγούμενα,

Η αύξηση είναι μέγιστη όταν $\vec{a} = \dfrac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$

$= \dfrac{(2,2,2)}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Η αύξηση είναι ελάχιστη όταν $\vec{a} = -\dfrac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Για μηδενική αύξηση θέλουμε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και επιλύουμε την $D_{\vec{a}} f(1,1,1) = 0$.

(Άσκηση!)