Ασκήσεις 7

Ανάπτυγμα Taylor

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad \text{βαθμ.} \leq n$$

1-D:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$x \in \mathbb{R}$.

- Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ με n-τάξης παραγώγους και $x_0 \in (a,b)$:

$$\boxed{T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

με

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0)$$

$$T'_{n,x_0}(x_0) = f'(x_0)$$

$$T''_{n,x_0}(x_0) = f''(x_0)$$

$$T^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

T_{n,x_0} έχει ίδια τιμή στο $x = x_0$ με την f και ίδιες παραγώγους στο $x = x_0$ με την f.

- Είναι το πολ. Taylor (αν $x_0 = 0$ λέγ. Maclaurin)

Υπόλοιπο Taylor (αντ. Maclaurin για $x_0=0$):

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c_x(n)$ μεταξύ x και x_0.

1) $f: R \to R$ παρ/ση με πολ. Taylor 2ου βαθμού $T_{2,0}(x) = 10x^2$

Βρείτε $f(0), f'(0), f''(0)$.

<u>Λύση</u>

$$f(0) = T_{2,0}(0) = 10 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0) = T'_{2,0}(0) = 20 \cdot 0 = 0$$

$$f''(0) = T''_{2,0}(0) = 20$$

2) $f: R \to R$ $\quad T_{3,x_0=1}(x) = x^2 + 10x^3$

Βρείτε $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$

$$f(1) = T_{3,1}(1) = 1^2 + 10 \cdot 1^3 = 11$$

$$f'(1) = T'_{3,1}(1) = 2 \cdot 1 + 30 \cdot 1^2 = 32$$

$$f''(1) = T''_{3,1}(1) = 2 + 60 \cdot 1 = 62$$

$$f'''(1) = T'''_{3,1}(1) = 60$$

3) $f(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}$

i) Βρείτε $T_{n,0}(x)$, $R_{n,0}(x)$

ii) Ν.δ.ο. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

για $x = 1$ $\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

iii) Να προσεγγ. το $e^{0,1}$ με πολ. Taylor 3ου βαθμού

iv) Ν.δ.ο. $e \notin \mathbb{Q}$

Προσεγγίστε με σφάλμα $O(10^{-5})$.

<u>Λύση</u>

i) $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$,

$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1.$

$$T_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ή

$$T_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$R_{n,0}(x) = \frac{e^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$ για c_x μεταξύ των $x, 0$ εξ. από το n.

ii) Αρκεί ν.δ.ο. $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x) = 0$, $x\in\mathbb{R}$

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{e^{cx}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Κρ. Παρεμβολής με $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

iii) $e^{0,1} \simeq T_{3,0}(0,1) = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} \simeq 1,00517$

Πραγματική τιμή $\simeq 1,1052$

iv) Έστω ότι $e\in\mathbb{Q}$ $(2<e<3)$

άρα $\exists$ $m_0, n_0 \in\mathbb{N}$ τ.ω. $e = \frac{m_0}{n_0}$

Θεωρούμε $k\geq 2$, $k\geq n_0$

$$\begin{cases} e = T_{k,0}(1) + R_{k,0}(1) = \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{e^{7}}{(k+1)!}, \; 7\in(0,1) \\ e = \frac{m_0}{n_0} \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{m_0}{n_0} = \left(1 + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{e^{7}}{(k+1)!}$$

$$n!\,\frac{m_0}{n_0} = n!\left(1+\dots+\frac{1}{k!}\right) + \frac{n!\,e^{\xi}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^{\xi}}{n+1} = \underbrace{\underbrace{n!\,\frac{m_0}{n_0}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{n!\left(1+\dots+\frac{1}{k!}\right)}_{\in \mathbb{N}}}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$0 < \frac{e^{\xi}}{n+1} < \frac{e^{1}}{n+1} < \frac{3}{n+1} \le \frac{3}{3} = 1$$

Άτοπο, δεν υπάρχει ακέραιος μεταξύ του 0 και του 1.

Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $R_{n,0}(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n_0+1)!} < 10^{-5}$

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad 0<\xi<1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Απαιτούμε $\dfrac{3}{(n_0+1)!} < \dfrac{1}{10^{5}} \Leftrightarrow (n_0+1)! > 300.000$

$9! = 362.880$, άρα $n_0 = 8$

$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{8!} \simeq 2,71828$

με σφάλμα $< 10^{-5}$

(πρώτα 5 δεκαδικά ψηφία)

4) $f(x) = ημx$, $x_0 = 0$

i) Να βρεθεί το πολ. Taylor καθώς και το υπόλοιπο.

ii) Αποδείξτε ότι

$$ημx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

iii) Να βρεθεί προσ. του $ημ(0{,}2)$ με πολ. Taylor 3ου βαθμού. Ποιο είναι το σφάλμα;

<u>Λύση:</u>

i) $$T_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= ημx, & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= συνx, & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -ημx, & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -συνx, & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= ημx, & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= f'(x) = συνx
\end{aligned}\right\} \quad
\begin{aligned}
f^{(2n)}(0) &= 0 \\
f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Άρα $T_{n,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$R_{2n+2,0}(x) = \frac{\eta\mu^{(2n+3)}(\xi_x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad \xi_x \text{ μεταξύ του } 0, x.$$

ii) Αρκεί ν.δ.ο. $\lim_{n \to +\infty} R_{2n+2,0}(x) = 0$

Ισχύει διότι $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$ και

$$|\eta\mu^{(2n+3)}(\xi_x)| \leq 1.$$

iii) $T_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad R_{3,0}(x) = \frac{\eta\mu^{(5)}(\xi_x)}{5!} x^5$

$$T_{3,0}(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{6} \simeq 0,198666\dots$$

$$|R_{3,0}(0,2)| \leq \frac{(0,2)^5}{5!} < 10^{-5}$$

Χρήσιμα:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad |x|<r \quad , \quad r>0 \text{ ή } r=+\infty$$

Ισχύουν

1) $f'(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)'$

$= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad |x|<r$

2) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt =$

$= \int_0^x (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots)\,dt =$

$= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots + a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \dots =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad |x|<r$

---

5) Ν.δ.ο. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

Λύση:

$$\boxed{\text{Ισχύει } \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \quad , \quad t\in(-1,1)}$$

$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n\right) dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad , \quad x\in(-1,1)$

6) Ν.δ.ο. $\text{τοξεφ}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$

Λύση:

$$\text{τοξεφ}\, x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (t^2)^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

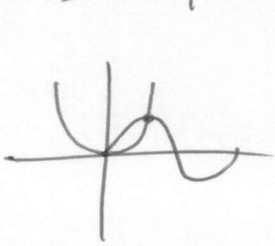
Για $x = 1 \Rightarrow \text{τοξεφ}\, 1 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Εφαρμογές πολ. Taylor:

Α. Εύρεση ριζών (προσεγγ.)

Προσεγγ. με πολ. Taylor 3ου βαθμού μη μηδεν. ρίζα x_0^+ της εξίσωσης $\eta\mu x = x^2$ και σχεδιάστε το σχήμα.



$$\eta\mu x \simeq x - \frac{x^3}{6} = T_{3,0}(x)$$

$$x - \frac{x^3}{6} = x^2 \overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$\Delta = 60 \quad x_0 = \sqrt{15} - 3 < 1$$

$$\eta\mu\, x_0 = x_0 - \frac{x_0^3}{6} + R_{3,0}(x_0) \Rightarrow$$

$$\left|\eta\mu\, x_0 - x_0^2\right| \leq \left|R_{3,0}(x_0)\right| = \frac{(\sqrt{15}-3)^5}{5!} < \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

B. <u>Προσέγγιση μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων</u>:

π.χ. $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$, $\int_0^1 \eta\mu(t^2)\, dt$, $\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x} dt$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$$

Οπότε $\int_0^{1/3} e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} =$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot(2!)\cdot 3^5} - \cdots$$