ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8

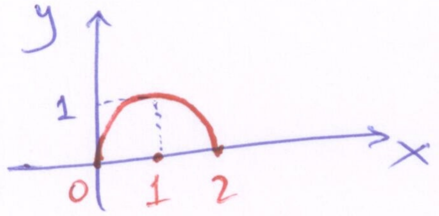
Καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Αναλυτική εξίσωση: $\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$, $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

Καρτεσιανή εξίσωση: $\Gamma = \{(x,y) : y = f(x),\ x \in I\}$

Παραμετρικές εξισώσεις: $\Gamma = \{\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I\}$

1) Να περιγράψετε την καμπύλη χρησιμοποιώντας Αναλ. – Καρτ. – Παρ. εξισώσεις.



Αναλ. εξίσωση:

$\Gamma = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 = 0,\ y \geq 0\}$

Κύκλος (ημικύκλιο) κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \iff$

$x^2 - 2x + y^2 = 0$

Καρτ. εξίσωση:

$\Gamma = \{(x,y) : y = \sqrt{2x - x^2},\ x \in [0,2]\}$

Παραμετρικές εξ:

$\Gamma = \{\vec{r}(\theta) = (\sigma\upsilon\nu\theta + 1, \eta\mu\theta),\ \theta \in [0,\pi]\}$

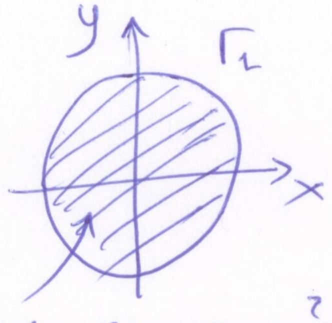
Οι παραμετρικές όχι μοναδικές!

2) Να μεταγραφούν σε πολικές εξισώσεις οι εξισώσεις καμπυλών:

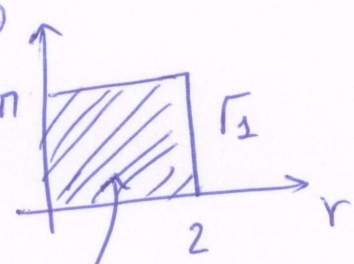
i) $\Gamma_1: \ x^2+y^2=4$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{συν}\theta \\ y &= r\,\text{ημ}\theta \end{aligned}\right\} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}=2$$

$$\Gamma_1=\{\vec{r}(\theta)=(2\,\text{συν}\theta, 2\,\text{ημ}\theta), \ \theta\in[0,2\pi]\}$$



$\rightsquigarrow$

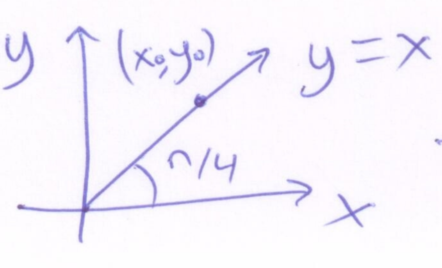


$K=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$ $\qquad$ $\vec{T}(K)=\{(r,\theta): 0\leq r\leq 2, \theta\in[0,2\pi]\}$

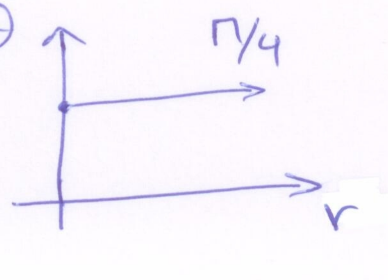
ii) $y=x \ , \ x\geq 0$

$$\text{εφ}\theta=1 \qquad \Bigg| \qquad \theta=\frac{\pi}{4}, \ r\geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x=r\,\text{συν}\theta \\ y=r\,\text{ημ}\theta \end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \vec{r}(r)=\left\{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right), \ r\geq 0\right\}$$



$\rightsquigarrow$



iii) $x^2+y^2-6y=0$

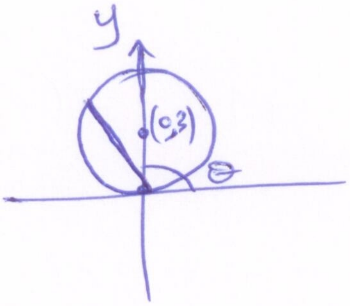
$x^2+(y-3)^2=9$

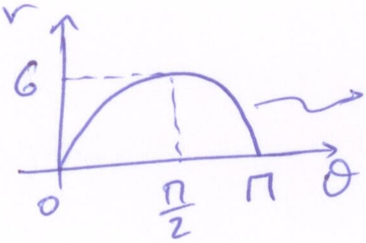
$x^2+y^2=r^2$

$y=r\,ημθ$

$r^2-6r\,ημθ=0$

$r=6\,ημθ,\ θ\in[0,π]$





Συνάρτηση Ημιτόνου

3) Να μετατραπούν οι πολικές εξισώσεις των καμπυλών σε καρτεσιανές:

i) $r=\frac{1}{2}\ ,\quad θ\in[0,\frac{π}{2}]$

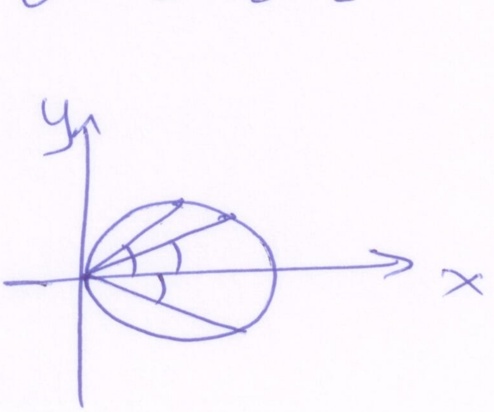
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=\frac{1}{4} \\ x,y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\,συνθ \\ y=\frac{1}{2}\,ημθ \end{array}\right),\ θ\in[0,\frac{π}{2}]$$

ii) $r=2\,συνθ\ ,\quad θ\in[-\frac{π}{2},\frac{π}{2}]$

$r^2=2\,r\,συνθ$

$x^2+y^2=2x$

$(x-1)^2+y^2=1$

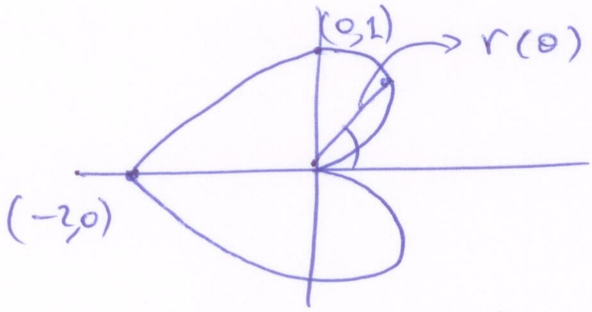


iii) $r = 1 - \text{συν}\theta$

$r^2 = r - r\,\text{συν}\theta$

$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x$

$(x^2+y^2+x)^2 = x^2+y^2$



(Καρδιοειδής)

Επιφάνεια στον R^3

Αναλυτική εξίσωση:

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 : F(x,y,z) = 0\}$$
$$F : A(\subseteq R^3) \to R$$

Καρτεσιανή εξίσωση:

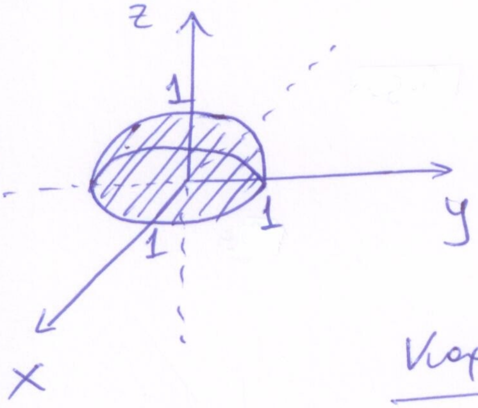
$$S = \{(x,y) \in R^2 : z = f(x,y),\ (x,y) \in B\}$$

Παραμετρικές εξισώσεις:

$$S = \{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D\}$$

Παραδείγματα:

1) Να περιγράψετε την επιφάνεια:



Αναλυτ. Μορφή:

$$S = \{ (x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0 \}$$

Καρτεσιανή μορφή:

$$S = \{ z = \sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in B \}$$

με $\quad B = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$

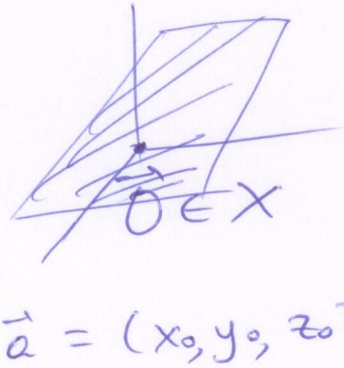
Παραμετρική μορφή:

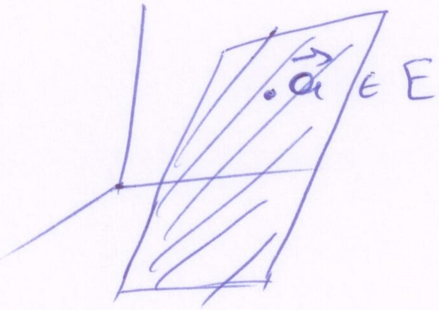
$$S = \{ \vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}), (x,y) \in B \}$$

Επίπεδα στον R^3

(είναι μεταφορές διανυσματικών χώρων)

Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ γραμ. ανεξ. και X ένας 2-διάστατος γρ. υπόχωρος του R^3: $\quad X = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in R \}$





$$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) \in R^3$$

$$E = \vec{a} + X = \{ \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in R \}$$

(περνά από $\vec{a}$, // στα $\vec{u}, \vec{v}$)

$$\vec{r}(\lambda, \mu) = (x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3)$$

$$x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1$$
$$y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2$$
$$z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

• Αν $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$

λύνω ως προς z.

$$z = ax + by + c$$

Διαφορετικά επιλέγω $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$ ή $\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$.

<u>Άσκηση:</u> Να βρεθεί η εξ. του επιπέδου που περνά από το $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (a, b, \gamma) \neq (0,0,0)$

<u>Λύση:</u>
Έστω $\vec{x} \in E$ τυχαίο, άρα $\vec{x} - \vec{a}$ διαν. του E.

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \iff$$
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, \gamma) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + \gamma z = c, \text{ με } c = ax_0 + by_0 + \gamma z_0$$

<u>Παρατήρηση:</u>

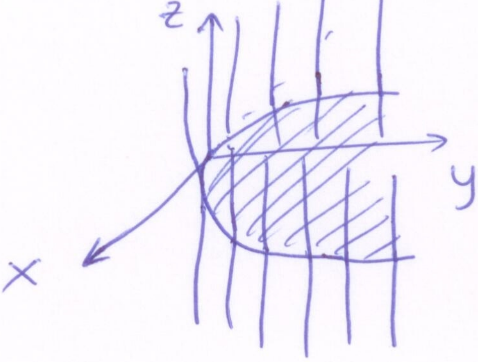
(E): $2x - 3y + z = 5$ (εξ. επιπέδου).

Το $\vec{n} = (2, -3, 1)$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

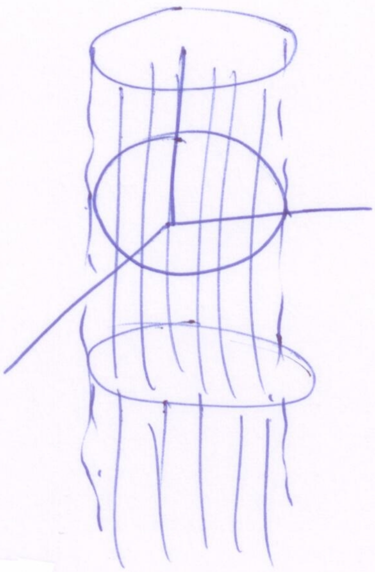
Ειδικές Επιφάνειες στον R^3: Κυλινδρικές

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 : F(x,y,z) = \varphi(x,y) = 0\}$$

i) $y = x^2$



ii) $x^2 + y^2 = a^2, \ z \in R$

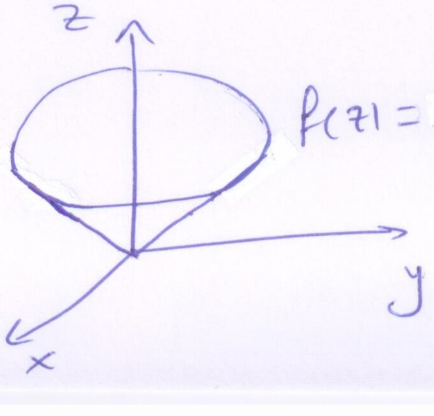


Εκ Περιστροφής:

Έστω $z \to f(z) = y$ (στο Oyz επίπεδο)

$$(f(z))^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(ίσους απ/σεις)}$$

Περιστροφή γύρω από z άξονα



$f(z) = z, \ z \geq 0$

$z^2 = x^2 + y^2$

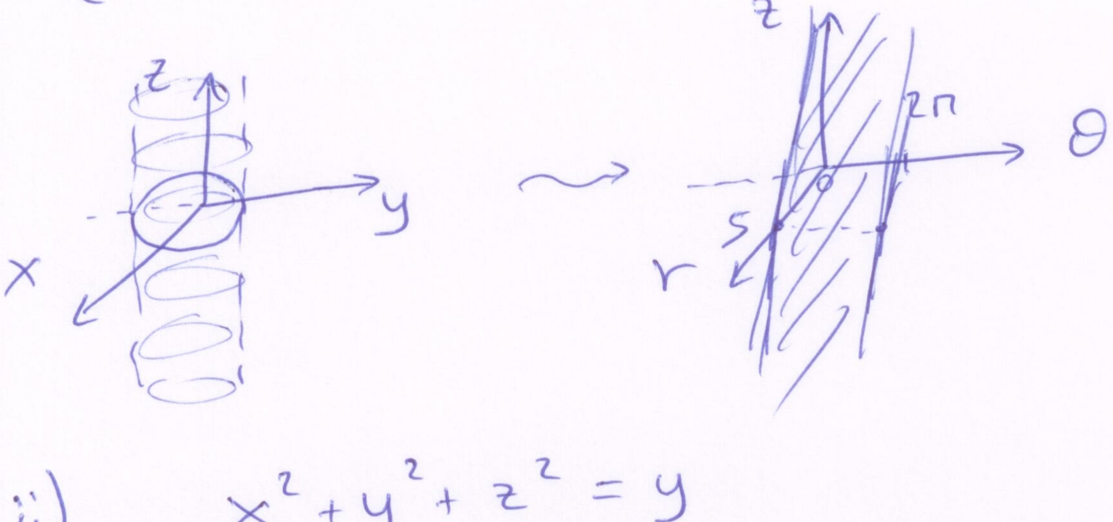
κώνος

4) Να μετατραπούν οι καρτεσιανές εξισώσεις των επιφανειών σε κυλινδρικές:

i) $x^2+y^2=25$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}=5$

$$\begin{cases} x = 5\,\text{συν}\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = 5\,\text{ημ}\theta, & \\ z = z, & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$



ii) $x^2+y^2+z^2=y$

$\left(x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \right)$

$r^2+z^2=r\,\text{ημ}\theta$ (παραμετρ. εξ.)

iii) $z=x^2+y^2 \rightarrow z=r^2$

5) Να μετατραπούν οι εξισώσεις από κυλινδρικές σε καρτεσιανές:

i) $r^2+z^2=4 \Rightarrow$

$$x^2+y^2+z^2=4$$

ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$,

$x = r\,\text{συν}\theta$

$y = r\,\text{ημ}\theta$

$\text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \text{εφ}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad z \in \mathbb{R}.$

iii) $r^2 = 2z\,\text{ημ}2\theta \Rightarrow$

($r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ $x = r\,\text{συν}\theta \Leftrightarrow \text{συν}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y = r\,\text{ημ}\theta \Leftrightarrow \text{ημ}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

$\Rightarrow r^2 = 4z\,\text{ημ}\theta \cdot \text{συν}\theta \Rightarrow$

$$(x^2+y^2)^2 = 4zxy$$

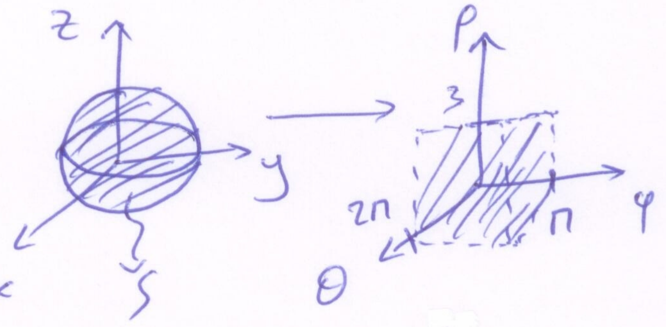
6) Να μετατραπούν οι Καρτεσιανές εξισώσεις σε Σφαιρικές:

i) $x^2+y^2+z^2 = 9$

$\rho = 3$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi = [0, \pi]$



ii) $x^2+y^2+z^2 = z \Rightarrow$

$\rho^2 = \rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\rho = \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(z \geq 0)$

iii) $z^2 = 2x^2 + 2y^2$, $x, y \geq 0$

$\rho^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 2\rho^2 \eta\mu^2\varphi$

$\varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \rho \geq 0)$

7) Να μετατραπούν οι Σφαιρικές εξισώσεις σε Καρτεσιανές:

i) $\rho = 10$ (ανεξάρτητο θ, φ)

$x^2 + y^2 + z^2 = 100$ (σφαίρα)

ii) $\rho = ημ\theta\, ημ\varphi \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 = y$

iii) $\rho\, ημ\varphi = 10 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 100$

iv) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\, συν\theta\, ημ\frac{\pi}{4} \\ y &= \rho\, ημ\theta\, ημ\frac{\pi}{4} \\ z &= \rho\, συν\frac{\pi}{4}\ (\geq 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 ημ^2\frac{\pi}{4} \\ z^2 &= \rho^2 συν^2\frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = 1 \Rightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$$