Θεωρούμε γνωστές από την Γραμμική Άλγεβρα τις έννοιες:

- σώμα
- διανυσματικός χώρος
- βάση διαν. χώρου
- γραμμική απεικόνιση
- πίνακας γραμμικής απεικόνισης ως προς δεδομένες βάσεις.

ΔΙΑΤΑΞΗ

Τα σώματα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ δέχονται <u>ολική διάταξη</u>, δηλ. έχουν μια σχέση $\leq$, που είναι:

(i) <u>αυτοπαθής</u>: $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) <u>αντισυμμετρική</u>: $a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow$

(iii) <u>μεταβατική</u>: $a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

διάταξη

(iv) <u>ολική</u>: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ ή $b < a$ ή $a = b$.

Το $\mathbb{C}$ μπορεί να δεχθεί διάφορες διατάξεις, αλλά όχι ολική διάταξη.

Η διάταξη σχετίζεται με τις πράξεις:

(1) $a \geq \beta \Rightarrow a + \gamma \geq \beta + \gamma \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

(2) $a \geq \beta$, $\gamma > 0 \Rightarrow a\gamma \geq \beta\gamma$.

<u>ΟΡΣ</u> $A \subseteq \mathbb{R}$ <u>άνω φραγμένο</u>, αν $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$a \leq M, \quad \forall a \in A.$$

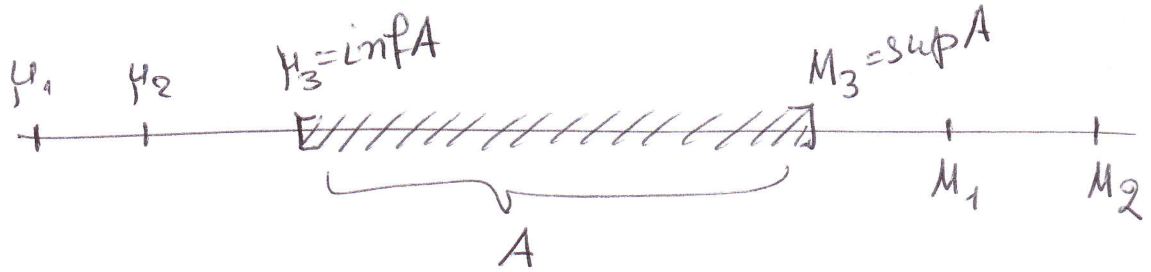
Ομοίως $A \subseteq \mathbb{R}$ <u>κάτω φραγμένο</u>, αν $\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$\mu \leq a, \quad \forall a \in A.$$

Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται φραγμένο ότι είναι άνω και κάτω φραγμένο.

$\sup A =$ ελάχιστο άνω φράγμα.

$\inf A =$ μέγιστο κάτω φράγμα



ΑΞΙΩΜΑ κάθε άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $\sup A$.

Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες. Το $\mathbb{Q}$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

ΜΗΚΗ και ΓΩΝΙΕΣ στο $\mathbb{R}^n$

ΟΡΣ Ένα <u>εσωτερικό γινόμενο</u> του $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση

$$\langle\,,\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

που είναι:

(1) <u>διγραμμική</u>:

$$\langle \lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\mu\langle\vec{y},\vec{z}\rangle \quad \forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n.$$

$$\langle \vec{x},\lambda\vec{y}+\mu\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\mu\langle\vec{x},\vec{z}\rangle \quad \text{— // —}$$

(2) <u>συμμετρική</u>:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{y},\vec{x}\rangle, \quad \forall\, \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$$

(3) <u>θετικά ορισμένη</u>:

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0 \quad \forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

(4) <u>μη εκφυλισμένη</u>:

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{x}=0$$

Παράδ. $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1+\dots+x_ny_n.$$

(: <u>κανονικό</u> εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$)

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Μια <u>νόρμα</u> του $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση

$$\|\ \|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες:

(1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$

(2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$ (<u>τριγωνική ανισότητα</u>)

Η νόρμα μετρά το μήκος του διανύσματος $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$ Οι απεικονίσεις

$$\|\ \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

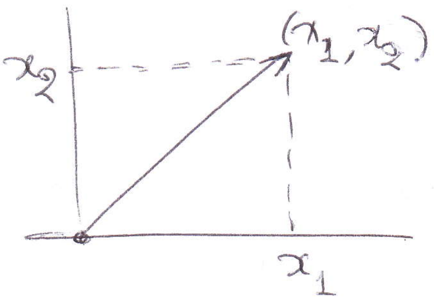
$$\|\ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\ \|_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|(x_1, \dots, x_n)\|_3 = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

Είναι νόρμες του $\mathbb{R}^n$.

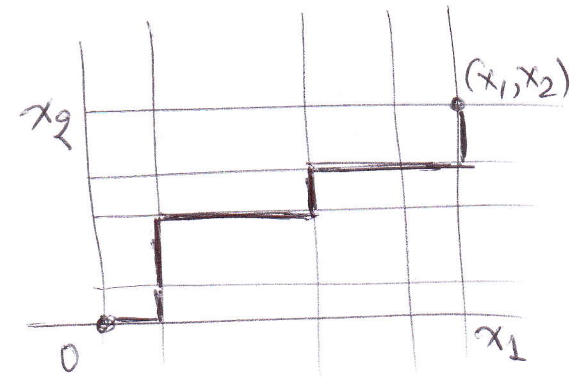
Η $\|\ \| = \|\ \|_1$ είναι η <u>συνήθης νόρμα</u> του $\mathbb{R}^n$.

Στο $\mathbb{R}^2$:



μήκος του διαν. (x_1, x_2) από Πυθαγόρειο θεώρημα =

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|(x_1, x_2)\|_1$$



Σε μια πόλη με ορθογώνια ρυμοτομία η απόσταση του (x_1, x_2) από το 0 είναι

$$|x_1| + |x_2| = \|(x_1, x_2\|_2 .$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> κάθε εσωτ. γινόμενο $\langle , \rangle$ ορίζει μια νόρμα μέσω του τύπου

$$\|\vec{x}\| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} , \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n .$$

<u>Αποδ.</u> (1) $\|\vec{x}\| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και

$$\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0 .$$

(2) $\|\lambda \vec{x}\| = \langle \lambda \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle^{1/2} = \left(\lambda^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\right)^{1/2} =$

$$= |\lambda| \cdot \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| .$$

(3) Πρέπει νδο $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \overset{>0}{\Longleftrightarrow}$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Longleftrightarrow$

$\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Longleftrightarrow$

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq$

$\leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Longleftrightarrow$

$2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Longleftrightarrow$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ ∎

$\boxed{\text{Λήμμα}}$ Ισχύει η ανισότητα C-S: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$.
Cauchy-Schwarz

Αποδ. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$\langle \lambda\vec{x}+\vec{y}, \lambda\vec{x}+\vec{y} \rangle \geq 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow$

αρνητική διακρίνουσα $\Rightarrow$

$4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq 0 \Rightarrow$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow$

$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ Μια νόρμα $\| \ \|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, ανν ικανοποιεί την σχέση

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left[\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right] \quad (*)$$

Απόδ ($\Rightarrow$) Αν προέρχεται από εσωτ. γινόμενο $\langle , \rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y} \rangle \\ \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x},\vec{y} \rangle \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right).$$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, αν ισχύει η $(*)$ ορίζουμε

$$\langle \vec{x},\vec{y} \rangle := \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right).$$

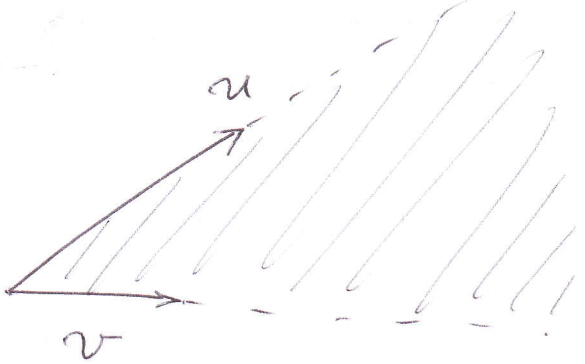
Τότε $\langle , \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο.

(Απόδ; άσκηση) ∎

Άσκηση Νδο $\| \ \|_2$ και $\| \ \|_3$ <u>δεν</u> προέρχονται από εσωτερικά γινόμενα.

ΟΡΣ <u>Γωνία</u> των διαν. $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, είναι (μη συγγραμμικά)

το σύνολο $\Theta = \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} : \lambda, \mu \geq 0\}$.

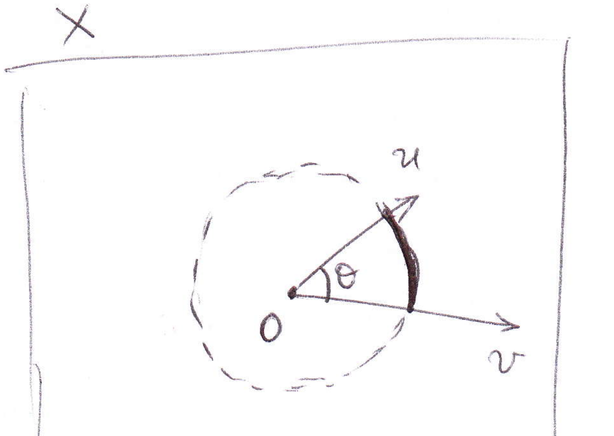


<u>Μέτρο γωνίας;</u>

$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ μη συγγραμμικά $\Rightarrow$ γρ. ανεξάρτητα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ παράγουν χώρο, υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, διάστασης 2,

έστω X. Δηλ. $X = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.



μέτρο της $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ είναι το μήκος του τόξου

που γράφει η Θ στον μοναδιαίο κύκλο.

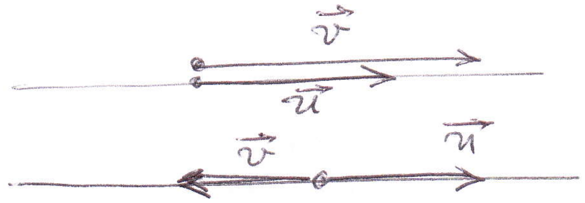
$R = 1 \Rightarrow$ περιφέρεια $= 2\pi \Rightarrow$ ημιπεριφέρεια $= \pi$

$\Rightarrow \Theta \in [0, \pi]$.

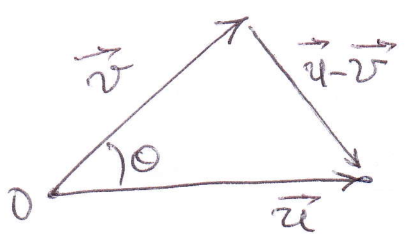
Αν $\vec{u},\vec{v}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{v}=\lambda\vec{u}$

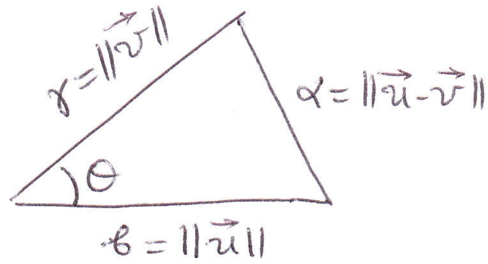
$\lambda>0 \Rightarrow \theta=0$

$\lambda<0 \Rightarrow \theta=\pi$.



Θα χρησιμοποιήσουμε το <u>συνήθες</u> εσωτ. γινόμενο και την <u>συνήθη</u> νόρμα του $\mathbb{R}^n$ για να μετρήσουμε <u>γωνίες</u>.





$\alpha:=\|\vec{u}-\vec{v}\|$, $\beta=\|\vec{u}\|$, $\gamma=\|\vec{v}\|$

Νόμος συνημιτόνων $\Rightarrow$ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\theta \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\text{συν}\theta \\ \text{ορσ. νόρμας} \Rightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{συν}\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}}$$

συνθ γνωστό ~~⇒~~ ακριβώς μία γωνία $\theta\in[0,\pi]$ έχει αυτό το συνημίτονο.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $\vec{u},\vec{v}$ <u>κάθετα</u> $\Leftrightarrow$ $\theta = \pi/2$ $\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

Συμβ: $\vec{u} \perp \vec{v}$

Ασκήσεις

(1) $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-1,3)$ $\qquad \theta = \measuredangle(u,v) = ;$

$$\|\vec{u}\| = (1^2 + 2^2)^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = ((-1)^2 + 3^2)^{1/2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 = -1 + 6 = 5$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pi/4$$

(2) $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-1, x)$

$x = ;$ ώστε $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 1\cdot(-1) + 2\cdot x = 0 \Leftrightarrow -1 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1/2.$$

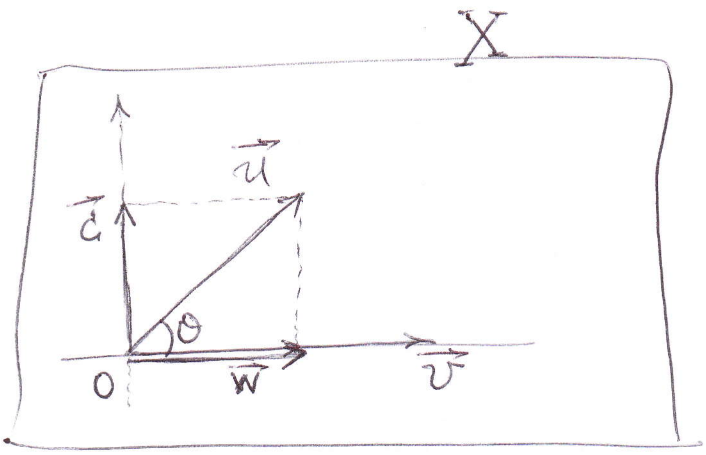
ΠΡΟΒΟΛΕΣ

$\boxed{\text{Πρόταση}}$ $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v}\neq 0$. Τότε $\exists$ μοναδικά $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ με $\vec{u}=\lambda\vec{v}+\vec{c}$, και $\vec{c}\perp\vec{v}$.

Απόδ

(1) Αν $\vec{u}=0$, ισχύει για $\lambda=0\in\mathbb{R}$, $\vec{c}=0\in\mathbb{R}^n$.

(2) Αν $\vec{u}\neq 0$ με $\vec{u},\vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα, έστω X το επίπεδό τους, $\theta=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$



Θέτω $\vec{w}$ το διάνυσμα που είναι παράλληλο (και ομόρροπο) με το $\vec{u}$, και έχει μήκος $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\cdot\cos\theta$.

Τότε $\exists!\ \lambda\in\mathbb{R}$: $\vec{w}=\lambda\vec{v}$. Επίσης θέτω $\vec{c}:=\vec{u}-\vec{w}\Rightarrow$ $\vec{u}=\vec{w}+\vec{c}=\lambda\vec{v}+\vec{c}$.

Το μονοσήμαντο από το ότι $\{\vec{v},\vec{c}\}$ βάση του X.

Είναι:

$$\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\cdot\cos\theta=\|\vec{u}\|\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$=\|\lambda\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|=\lambda\cdot\|\vec{v}\|\Rightarrow\boxed{\lambda=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}}$$

$$c = \vec{u} - \vec{w} = \vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}.$$

Διαπιστώνουμε ότι πράγματι $\vec{c} \perp \vec{v}$:

$$\vec{c}\cdot\vec{v} = \Big(\vec{u} - \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}}_{\in\mathbb{R}}\cdot\vec{v}\Big)\cdot\vec{v} =$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\|\vec{v}\|^2 = 0. \blacksquare$$

ΟΡΣ

Το $\vec{w}$ λέγεται <u>προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$</u> και γράφεται $\vec{w} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΚΑΙ ΜΙΚΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ στο $\mathbb{R}^3$

ΟΡΣ <u>Εξωτερικό γινόμενο</u> του $\mathbb{R}^3$ είναι η απεικόνιση

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

η οποία, $\forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, είναι

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

<u>Υπενθ</u>: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Το εξωτ. γινόμενο έχει τις ιδιότητες:

(1) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$,

(2) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (αντι-μεταθετική)

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}) \\ (4)\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{(διγραμμική)}$$

$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(5) <u>Δεν</u> είναι προσεταιριστική, αλλά

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{w})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{v} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

(6) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

(7) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

(8) $$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

Η ανωτέρω ορίζουσα λέγεται <u>μικτό γινόμενο</u> των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ και συμβολίζεται $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

<u>Απόδ</u>: όλα υπολογιστικά. ∎

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Μια διατεταγμένη βάση $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ του $\mathbb{R}^3$ λέγεται δεξιόστροφη, αν

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0.$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ δεξιόστροφη βάση.

<u>Απόδ</u>: Άσκηση

ΠΡΟΤΑΣΗ $\vec{u}, \vec{v}$ συγγραμμικά $\Longleftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=0$.

<u>Αποδ</u> Απο την ιδιότητα (7)

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 =$$

$$= \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot \text{συν}^2\theta = \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2(1-\text{συν}^2\theta) =$$

$$= \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\text{ημ}^2\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\text{ημ}\theta| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\text{ημ}\theta}$$

Παρατηρούμε ότι συγγραμμικότητα $\Longleftrightarrow \theta=0$ ή $\theta=\pi$

$\Longleftrightarrow \text{ημ}\theta=0$

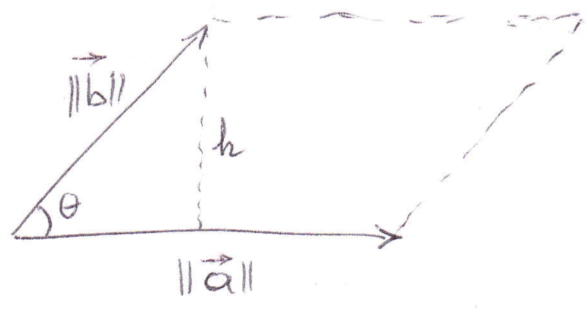
και $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=0 \Longleftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=0$ ∎

ΘΕΩΡ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$. Τότε:

(1) Το εμβαδόν του παραλ/μου με πλευρές $\vec{a},\vec{b}$ είναι ίσο με $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$.

(2) Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ είναι $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$.

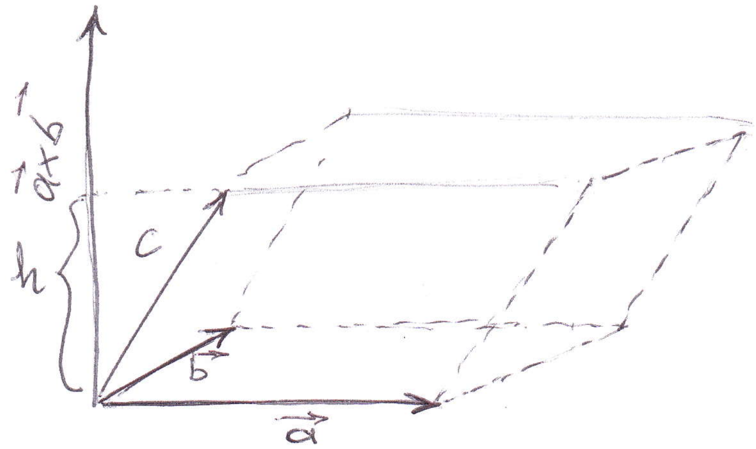
<u>Αποδ:</u> (1)



$$\text{Εμβαδόν} = \|\vec{a}\|\cdot h =$$

$$= \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\text{ημ}\theta =$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|.$$



παίρνουμε για βάση το παραλ/μο $(\vec{a}, \vec{b})$. $\vec{a} \times \vec{b} \perp$ επίπεδο $(\vec{a}, \vec{b})$, άρα το ύψος μετριέται πάνω στον άξονα του $\vec{a} \times \vec{b}$ και

$$\vec{h} = \mathrm{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}}\, \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Άρα

Ογκος $=$ Εμβαδόν $(\vec{a}, \vec{b}) \cdot$ ύψος $= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} =$

$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$. ∎

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.