ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΦ/ΤΗΤΑΣ-ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ- ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Διαφ/τητα $\Rightarrow$ συνέχεια (σελ. 34)

Διαφ/τητα $\Rightarrow$ ύπαρξη μερικών παραγώγων (σελ. 38-39).

Τα αντίστροφα δεν ισχύουν:

Αντιπαράδειγμα 1

Η $f(x,y)=|x|$ είναι συνεχής αλλά όχι διαφ/μη. Δεν έχει ούτε μερική παράγωγο ως προς x.

Αντιπαράδειγμα 2

Η απεικ. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ (σελ. 29), άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Έχει όμως μερικές παραγώγους $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ και $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$.

Υπολογίζουμε πρώτα την μερική απεικόνιση $f_0(x)$, αφού σταθεροποιήσουμε το $y=0$:

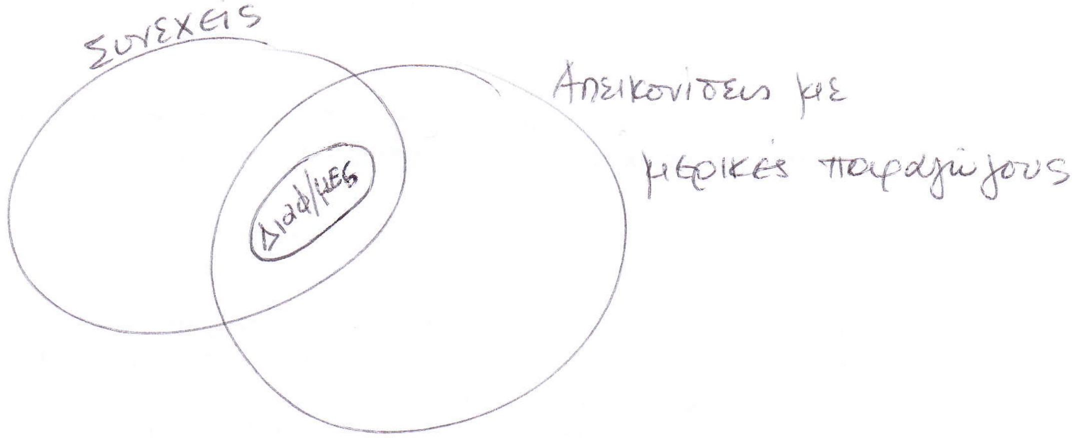
$$f_0(x)=f(x,0)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{2x\cdot 0}{x^2+0}=0, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{array}\right\}=0.$$

Άρα

$$\exists \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = f_0'(0)=0.$$

Ομοίως $\exists \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$.

Απο τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει η παρακάτω σχέση των συνόλων των διαφορίσιμων – συνεχών – απεικονίσεων με μερικές παραγώγους:



Ισχύει όμως το

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ.}}$ $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f: A \to \mathbb{R}^n$ και $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}^n$, $\forall\, i = 1, \dots, m$, και είναι συνεχείς. Τότε η f είναι διαφορίσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει: η διαφ/τητα $\Rightarrow$ ύπαρξη μερικών παραγώγων αλλά όχι την συνέχειά τους.

Απδ.

Άσκηση Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) Να βρεθούν $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

(2) Νδο είναι ασυνεχείς στο $(0,0)$

(3) Νδο f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Αποδ.

(1) $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{(x,y)\\ \neq(0,0)}}=2x\,\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Για την $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ υπολογίζουμε πρώτα την μερική απεικόνιση $f_0(x)$ σταθεροποιώντας το $y=0$:

$$f_0(x)=\begin{cases}x^2\,\eta\mu\dfrac{1}{|x|}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

οπότε:

$$f_0'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_0(x)-f_0(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\,\eta\mu\frac{1}{|x|}=0$$

(μηδεν. x φραγμ.)

$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

Αντίστοιχη έκφραση έχουμε για την $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Για την συνέχεια της $\frac{\partial f}{\partial x}$ στο $(0,0)$ προσεγγίζω από τα θετικά του άξονα των x:

$$\lim_{\substack{(x,0)\to(0,0)\\ x>0}} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,0)} = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\,\text{ημ}\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\,\text{συν}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{2x\,\text{ημ}\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\text{συν}\frac{1}{x}}_{\nexists}\right)$$

Επομένως $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Παρόμοια για την $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(3) Ελέγχω το όριο

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{f(\vec{h}) - f(\vec{0}) - \nabla_{(0,0)}f\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} =$$

$$\lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cdot\text{ημ}\frac{1}{\|\vec{h}\|} - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\|\vec{h}\|} =$$

$$\lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \|\vec{h}\|\cdot\text{ημ}\frac{1}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Αφού $\exists$ το όριο και είναι 0, η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ με $(Df)_{(0,0)} \equiv \nabla_{(0,0)}f = (0,0)$.