ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$p(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n,$$

με $x_0\in\mathbb{R}$ σταθερό, και $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι πολυώνυμο βαθμού n. Παρατηρούμε ότι:

$$p(x_0)=b_0$$

$$p'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+\cdots+nb_n(x-x_0)^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x_0)=b_1=1!\,b_1$$

$$p''(x)=2b_2+2\cdot3\cdot b_3(x-x_0)+\cdots+(n-1)\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p''(x_0)=2b_2=2!\,b_2$$

$$p'''(x)=2\cdot3\cdot b_3+2\cdot3\cdot4\,b_4(x-x_0)+\cdots+(n-2)(n-1)\cdot n\cdot b_n(x-x_0)^{n-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'''(x_0)=2\cdot3\cdot b_3=3!\,b_3$$

$$\vdots$$

$$p^{(n)}(x)=2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n\,b_n=n!\,b_n\Rightarrow p^{(n)}(x_0)=n!\,b_n.$$

$$p^{(k)}(x)=0\quad\forall\ k>n.$$

Από τις παραγώγους στο x_0 ξαναβρίσκουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου:

$b_0=p(x_0)$, $b_1=\dfrac{1}{1!}p'(x_0)$, $b_2=\dfrac{1}{2!}p''(x_0)$,

$b_3=\dfrac{1}{3!}p'''(x_0)$, $\ldots$, $b_n=\dfrac{1}{n!}p^{(n)}(x_0)$. Δηλαδή:

$$p(x)=p(x_0)+\frac{1}{1!}p'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}p''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\dots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Ιδιαιτέρως, για $x_0=0$, έχουμε

$$p(x)=p(0)+\frac{1}{1!}p'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}p''(0)\cdot x^2+\dots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(0)\cdot x^n.$$

Εστω τώρα μια συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ που έχει n-τάξης παραγώγους και $x_0\in(a,b)$. Απο τις παραγώγους της f στο x_0 κατασκευάζουμε το πολ/μο

$$(*)\quad (T_{n,x_0}f)(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις για το πολ/μο p, το $T_{n,x_0}f$ έχει στο x_0 ίδια τιμή και ίδιες παραγώγους με την f. Λέγεται <u>πολυώνυμο Taylor της f στο x_0</u>, <u>βαθμού n</u>. Για $x_0=0$, λέγεται <u>πολ/μο MacLaurin</u>. Αν η f είναι πολ/μο, βαθμού n, τότε $f=T_{n,x_0}f$. Αν η f δεν είναι πολ/μο, τότε $f\neq T_{n,x_0}f$.

Ονομάζουμε την διαφορά

$$(R_{n,x_0}f)(x)=f(x)-(T_{n,x_0}f)(x)$$

<u>υπόλοιπο Taylor / MacLaurin</u> <u>της f στο x_0</u>, <u>βαθμού n</u>. Προφανώς:

$$f(x)=(T_{n,x_0}f)(x)+(R_{n,x_0}f)(x).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-φορές παραγωγίσιμη, και $x_0\in(a,b)$. Τότε

$$(*)\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{(R_{n,x_0}f)(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το υπόλοιπο Taylor συγκλίνει πολύ γρήγορα στο 0 καθώς $x\to x_0$, δηλ. Το πολ/μο Taylor και η f, κοντά στο x_0, παίρνουν σχεδόν την ίδια τιμή.

Η σχέση της προηγ. πρότασης γράφεται και

$$(**)\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(T_{n,x_0}f)(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 Το $T_{n,x_0}f$ είναι το μοναδικό πολ/μο που ικανοποιεί την (**).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor):
Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ (n+1)-φορές διαφ/μη, και $x_0\in(a,b)$. Τότε $\forall x\in(a,b)$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και x_0:

$$(R_{n,x_0}f)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}.$$

ΟΡΣ Η f αναπτύσσεται στο x_0 σε σειρά Taylor/MacLaurin αν $\exists\,\varepsilon>0:\ \forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$:

$$(***)\qquad \lim_{n\to+\infty}(R_{n,x_0}f)(x)=0$$

[Εδώ x σταθ. και $n\to+\infty$. Σύγκρινε με (*), όπου n σταθ. και $x\to x_0$].

Όταν ισχύει η (***), τότε $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{n\to+\infty} (T_{n,x_0} f)(x).$$

δηλ. η f είναι όριο πολυωνύμων στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται <u>δυναμοσειρές</u> και το μεγαλύτερο $\varepsilon>0$ για το οποίο ισχύει η (***) <u>ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς</u>. Μια δυναμοσειρά γενικά έχει τη μορφή

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Αποδεικνύεται ότι

$$f'(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)' =$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots)\,dt =$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

<u>Σημείωση</u>. Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις που δεν αναπτύσσονται σε σειρά Taylor. Π.χ. η $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$ και $f(0)=0$ έχει παραγώγους κάθε τάξης με

$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T_{n,0} f(x) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n\to\infty} (T_{n,0} f)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$

αλλά $f(x) \neq 0$.

Παραδείγματα

① $f(x)=e^x$.

Παρατηρούμε ότι $f^{(n)}(x)=f(x)=e^x$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Επομένως

$$T_{n,0}f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Υπολογισμός υπολοίπου: $\forall\, x\neq 0\ \exists\, \xi$ μεταξύ 0 και x:

$$R_{n,0}f(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Για $0<\xi<x \Rightarrow e^{\xi}<e^x$ και $|R_{n,0}f(x)|<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}=:a_n$

Για $x<\xi<0 \Rightarrow e^{\xi}<1$ και $|R_{n,0}f(x)|<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=:\beta_n$.

Με κριτήριο πηλίκου βρίσκουμε $a_n\to 0$ και $\beta_n\to 0$

Άρα, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n,0}f(x)=0,$$

δηλ.

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}.$$

② $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

παρατηρούμε: $\left.\begin{array}{l} f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sigma\upsilon\nu x \\ f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\eta\mu x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f^{(2k)}(0)=(-1)^k \\ f^{(2k+1)}(0)=0. \end{array}$

Άρα

$$T_{2n+1,0}f(x) = T_{2n,0}f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Υπολογισμός υπολοίπου: $\forall x \neq 0 \ \exists \xi$ μεταξύ 0 και x:

$$R_{n,0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Επειδή $f^{(n+1)}(\xi)$ είναι ημ ή συν,

$$|R_{n,0}f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$\boxed{\text{συν}\,x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}$$

③ $f(x) = \text{ημ}\,x$

Παρατηρούμε ότι $\left.\begin{array}{l} f^{(2k)}(x) = (-1)^k \text{ημ}\,x \\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \text{συν}\,x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{(2k)}(0) = 0 \\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{array}\right.$

Επομένως

$$T_{2n+1,0}f(x) = T_{2n+2,0}f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

πάλι βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, άρα

$$\boxed{\eta\mu x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}$$

(4) $f(x)=\ln(1+x)$, $-1<x\leq 1$

Παρατηρούμε ότι:

$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=(-1)(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(0)=-1=-1!$

$f'''(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3} \Rightarrow f'''(0)=2=2!$

$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0)=-3!$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\dots(-n+1)\,x^{-n} \Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

Επομένως

$$T_{n,0}f(x)=0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}f(x)=0$, $\forall x\in(-1,1]$. Άρα

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

στο διάστημα $(-1,1]$ (σειρά Mercator).

(5) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$.

Ισχυριζόμαστε ότι $T_{n,0}f(x)=1+x+x^2+\dots+x^n$.

Αρκεί να δείξουμε (Πρόταση 2, σελ. 61) ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{n,0} f(x)}{x^n} = 0.$$

Πράγματι,

$$f(x) - T_{n,0} f(x) = \frac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{n,0} f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0.$$

Εξάλλου, $R_{n,0} f(x) = f(x) - T_{n,0} f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ και

$\lim_{n\to\infty} R_{n,0} f(x) = 0$ για $|x|<1$. Άρα στο $(-1,1)$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.}$$

Εφαρμογές

(1) Να βρεθεί προσέγγιση του $συν(0{,}2)$ με χρήση πολ/μου Taylor $4^{ου}$ βαθμού και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

$$(T_{4,0}\,συν)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = (T_{5,0}\,συν)(x) \Rightarrow$$

$$(T_{4,0}\,συν)(0{,}2) = 1 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^4}{24}$$

Για κάποιο ξ με $0<\xi<0{,}2$, το σφάλμα είναι

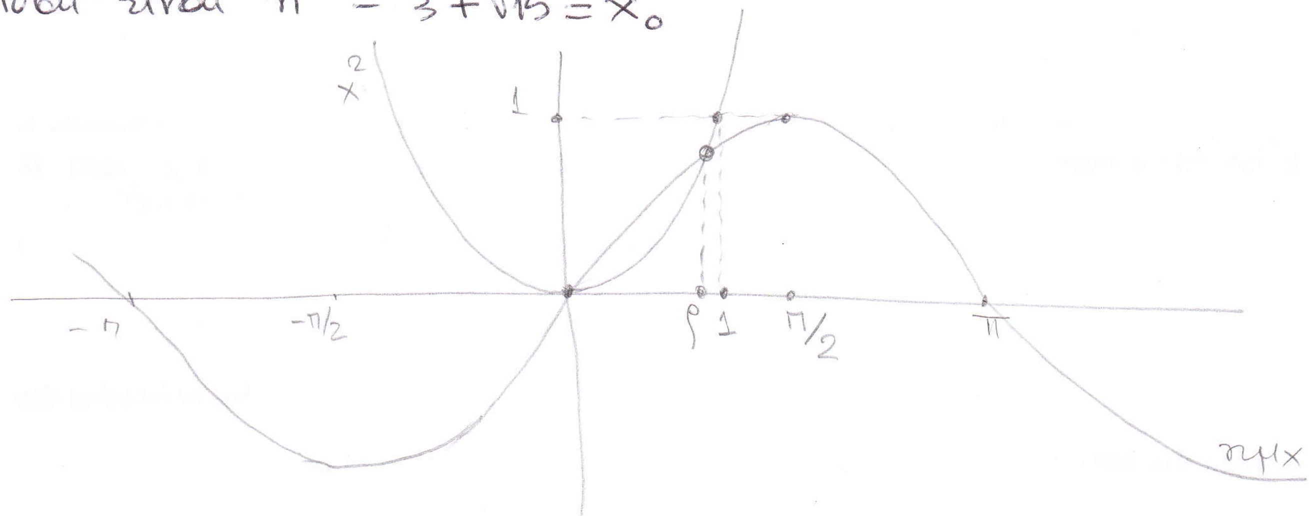
$$|(R_{4,0}\,συν)(0{,}2)| = \frac{|συν\xi|}{6!} 0{,}2^6 < \frac{0{,}2^6}{6!} = \frac{6{,}4}{720}\cdot 10^{-5}$$

(2) Να βρεθεί προσέγγιση της μη μηδενικής ρίζας ρ της εξίσωσης $\eta\mu x = x^2$, με χρήση πολ/μου Taylor $3^{ου}$ βαθμού και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

$\eta\mu x \cong (T_{3,0}\,\eta\mu)(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Αντί της $\eta\mu x = x^2$, λύνουμε

$$x - \frac{x^3}{6} = x^2 \Rightarrow x^3 + 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3 \pm \sqrt{15}.$$

Η $-3-\sqrt{15}$ απορρίπτεται, άρα η ζητούμενη προσεγγιστική λύση είναι η $-3+\sqrt{15} = x_0$



Παρατηρούμε: $\eta\mu x_0 = (T_{3,0}\,\eta\mu)(x_0) + (R_{3,0}\,\eta\mu)(x_0)$. Επειδή $T_{3,0}\,\eta\mu = T_{4,0}\,\eta\mu$, έχουμε και $R_{3,0}\,\eta\mu = R_{4,0}\,\eta\mu$. Άρα

$$|(R_{3,0}\,\eta\mu)(x_0)| = \frac{|\eta\mu^{(5)}(\xi)|}{5!}x_0^5 < \frac{x_0^5}{5!}$$ και επειδή

$$0 < x_0 = \sqrt{15} - 3 < 1 \Rightarrow |(R_{3,0}\,\eta\mu)(x_0)| < 1/5! = 1/120.$$

(3) Να υπολογιστεί προσέγγιση του (μη-στοιχειώδους) ολοκληρώματος $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$, και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Χρησιμοποιώντας το πολ/μο Taylor της $f(x) = e^x$, $4^{ου}$ βαθμού, έχω

$$e^{-t^2} \cong (T_{4,0} f)(-t^2) = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} =$$

$$= 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8 \Rightarrow$$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt \cong \int_0^{1/2} \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8\right) dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1}{24}\cdot\frac{t^9}{9}\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^7} + \frac{1}{9\cdot 24}\cdot\frac{1}{2^9} \cong 0{,}4613$$

σφάλμα:

$$e^{-t^2} = (T_{4,0}f)(-t^2) + (R_{4,0}f)(-t^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{(-t^2)^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{5!}(-t^2)^5, \quad \text{με } -t^2 < \xi < 0 \Rightarrow$$

$$\left|\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt - \int_0^{1/2}\left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8\right)dt\right| = \left|\int_0^{1/2} \frac{e^{\xi}}{5!}(-t^2)^5 dt\right|$$

με $0 < e^{\xi} < 1 \Rightarrow$

$$|\text{ζητούμενο σφάλμα}| < \int_0^{1/2} |e^{\xi}|\cdot\frac{|-t^{10}|}{5!}dt \leq \int_0^{1/2} \frac{t^{10}}{5!}dt =$$

$$= \frac{t^{11}}{5!\cdot 11}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}} < \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^{10}} <$$

$$< \left(\tfrac{1}{2}\right)^{13}\cdot 10^{-2}.$$