ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR (2)

Ας θεωρήσουμε τώρα μια απεικόνιση δυο μεταβλητών $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, n-φορές διαφορίσιμη. Ονομάζουμε <u>2ο-διαφορικό της f στο (x_0, y_0)</u> την απεικόνιση

$$(D_2 f)_{(x_0,y_0)}(x,y) := \left[\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right]\Big|_{(x_0,y_0)} =$$

$$= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)},$$

και, επαγωγικά <u>k-οστό διαφορικό της f στο (x_0,y_0)</u>, την

$$(D_k f)_{(x_0,y_0)}(x,y) := \left[\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right]\Big|_{(x_0,y_0)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^\nu y^{k-\nu} \frac{\partial^k f}{\partial x^\nu \partial y^{k-\nu}}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

Εστω $p(x,y)$ ενα πολυώνυμο 2 μεταβλητών, 2ου βαθμού. Τότε $p(x,y)$ έχει τη μορφή

$$p(x,y) = ax^2 + 2bxy + \gamma y^2 + ux + vy + \delta =$$

$$= (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (u,v)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta.$$

Παρατηρούμε ότι: $p(0,0) = \delta$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2ax + 2by + u \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = u,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2bx + 2\gamma y + v \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = v,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2\alpha \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 2\alpha$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\gamma \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 2\gamma$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 2\beta \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 2\beta .$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$(D_1 p)_{(0,0)}(x,y) = (D p)_{(0,0)}(x,y) = \nabla_{(0,0)} p \cdot (x,y) =$$

$$= \left(\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{(0,0)}, \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{(0,0)} \right) \cdot (x,y) = (u,v)\cdot(x,y) = ux + vy .$$

$$(D_2 p)_{(0,0)}(x,y) = x^2 \left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} + 2xy \left.\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} + y^2 \left.\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} =$$

$$= 2\alpha x^2 + 4\beta xy + 2\gamma y^2$$

Άρα

$$p(x,y) = p(0,0) + \frac{1}{1!}(D_1 p)_{(0,0)}(x,y) + \frac{1}{2!}(D_2 p)_{(0,0)}(x,y) .$$

Γενικότερα, για πολ/μο n-βαθμού:

$$p(x,y) = p(0,0) + \frac{1}{1!}(D_1 p)_{(0,0)}(x,y) + \dots + \frac{1}{n!}(D_n p)_{(0,0)}(x,y),$$

ενώ, αν σταθεροποιήσουμε ένα τυχαίο $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$p(x,y) = p(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}(D_1 p)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}(D_2 p)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}(D_n p)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) .$$

Εστω τώρα τυχαία $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$, n-φορές διαφορίσιμη. Ονομάζουμε πολ/μο Taylor/MacLaurin τάξης n στο $(x_0,y_0)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$, το

$$(T_{n,(x_0,y_0)}f)(x,y):=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}(D_1f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}(D_2f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(D_nf)_{(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0).$$

Το πολ/μο Taylor/MacLaurin έχει την ίδια τιμή και τις ίδιες n παραγώγους με την f στο (x_0,y_0).

Υπόλοιπο Taylor/MacLaurin της f στο (x_0,y_0) τάξης n είναι

$$(R_{n,(x_0,y_0)}f)(x,y)=f(x,y)-(T_{n,(x_0,y_0)}f)(x,y)$$

Αν η f είναι (n+1)-φορές παραγωγίσιμη, τότε $\exists\,(\xi_1,\xi_2)$ στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα (x_0,y_0) και (x,y):

$$(R_{n,(x_0,y_0)}f)(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}(D_{n+1}f)_{(\xi_1,\xi_2)}(x-x_0,y-y_0).$$

Στις εφαρμογές περιοριζόμαστε σε πολ/μο Taylor/MacLaurin 1ου βαθμού. Δηλ. θεωρούμε την ισότητα:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}(D_1f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0)+(R_{1,(x_0,y_0)}f)(x,y)=$$

$$\equiv f(x_0,y_0)+(x-x_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+(y-y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f\right]\Big|_{(\xi_1,\xi_2)}=$$

$$= f(x_0,y_0) + \left(\nabla_{(x_0,y_0)} f\right)\cdot(x-x_0,\, y-y_0) + $$
$$+ \frac{1}{2}(x-x_0,\, y-y_0)\cdot \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right|_{(\xi_1,\xi_2)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}.$$

Ο <u>Εσσιανός πίνακας</u>

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

λειτουργεί σαν 2η παράγωγος, για απεικονίσεις 2 μεταβλητών:

(1) δίνει την εκτίμηση σφάλματος από την γραμμικοποίηση (: Taylor 1ου βαθμού) της f,

(2) δίνει εντοπισμό ακροτάτων, αν $\nabla_{(x_0,y_0)} f = 0$.

$\boxed{\text{Παράδ.}}$

Να υπολογιστεί το πολ/μο Taylor της $f(x,y) = ημx\,συνy$, στο (x_0,y_0), βαθμού 3.

<u>Απαντ.</u> Για ευκολία, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$\frac{\partial f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} =: f_{\underbrace{xx..x}_{k\text{-φορές}}\underbrace{y..y}_{(n-k)\text{-φορές}}}$$

Παρατηρούμε:

I $f_x(x,y) = συνx\,συνy$, $f_y(x,y) = -ημx\,ημy$

II $f_{xx}(x,y) = -ημx\,συνy$, $f_{xy}(x,y) = -συνx\,ημy$,

$f_{yy}(x,y) = -ημx\,συνy$.

$f_{xxx}(x,y) = -\sigma\upsilon\nu x\, \sigma\upsilon\nu y, \quad f_{xxy}(x,y) = \eta\mu x\, \eta\mu y,$

$f_{xyy}(x,y) = -\sigma\upsilon\nu x\, \sigma\upsilon\nu y, \quad f_{yyy}(x,y) = \eta\mu x\, \eta\mu y$

Άρα:

$$\rightarrow (T_{1,(x_0,y_0)} f)(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}(D_1 f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) =$$

$$= \eta\mu x_0\, \sigma\upsilon\nu y_0 + \underbrace{(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))}_{= \nabla f_{(x_0,y_0)}} \cdot (x-x_0, y-y_0) =$$

$$= \eta\mu x_0\, \sigma\upsilon\nu y_0 + (x-x_0)\sigma\upsilon\nu x_0\, \sigma\upsilon\nu y_0 - (y-y_0)\cdot \eta\mu x_0\, \eta\mu y_0$$

$$\rightarrow (T_{2,(x_0,y_0)} f)(x,y) = (T_{1,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{2!}(D_2 f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) =$$

$$= (T_{1,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{2}\Big[(x-x_0)^2 \cdot f_{xx}(x_0,y_0) +$$

$$+ 2(x-x_0)(y-y_0) f_{xy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\Big] =$$

$$= (T_{1,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{2}\Big[(x-x_0)^2(-\eta\mu x_0\, \sigma\upsilon\nu y_0) +$$

$$+ 2(x-x_0)(y-y_0)(-\sigma\upsilon\nu x_0\, \eta\mu y_0) + (y-y_0)^2(-\eta\mu x_0\, \sigma\upsilon\nu y_0)\Big]$$

$$\rightarrow (T_{3,(x_0,y_0)} f)(x,y) = (T_{2,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{3!}(D_3 f)_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) =$$

$$= (T_{2,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{6}\left[\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\right]\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$= (T_{2,(x_0,y_0)} f)(x,y) + \frac{1}{6}\left[(x-x_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{(x_0,y_0)} +\right.$$

$$+3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+3(x-x_0)(y-y_0)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$+(y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_{(x_0,y_0)}\Big]=$$

$$=(T_{2,(x_0,y_0)}f)(x,y)+\frac{1}{6}\Big[(x-x_0)^3(-\text{συν}x_0\,\text{συν}y_0)+$$

$$+3(x-x_0)^2(y-y_0)\,\text{ημ}x_0\,\text{ημ}y_0+3(x-x_0)(y-y_0)^2(-\text{συν}x_0\,\text{συν}y_0)$$

$$+(y-y_0)^3\,\text{ημ}x_0\,\text{ημ}y_0\Big].$$

$\boxed{\text{Παραδ.}}$ Να υπολογισθεί η γραμμικοποίηση της $f(x,y)=x^2y+xy^2$ και το αντίστοιχο σφάλμα, στο $(1,1)$.

<u>Απάντ.</u> $f_x(x,y)=2xy+y^2$, $f_y(x,y)=x^2+2xy$.

$f_{xx}(x,y)=2y$, $f_{xy}(x,y)=2x+2y$, $f_{yy}(x,y)=2x$.

Γραμμικοποίηση $\equiv$ πολ/μο Taylor $1^{ου}$ βαθμού $=$

$$=(T_{1,(1,1)}f)(x,y)=f(1,1)+\frac{1}{1!}(D_1 f)_{(1,1)}(x-1,y-1)$$

$$=2+(\nabla f)_{(1,1)}\cdot(x-1,y-1)=2+(x-1)f_x(1,1)+(y-1)f_y(1,1)=$$

$$=2+3x-3+3y-3=3x+3y-4.$$

Σφάλμα της γραμμικοποίησης $\equiv(R_{1,(1,1)}f)(x,y)=$

$$=\frac{1}{2!}\Big((x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(\xi_1,\xi_2)}+2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(\xi_1,\xi_2)}+$$

$$+(y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(\xi_1,\xi_2)}\Big)=$$

$$=(x-1)^2\xi_2+2(x-1)(y-1)(\xi_1+\xi_2)+(y-1)^2\xi_1,$$

για (ξ_1,ξ_2) στο διάστημα των $(1,1)$ και (x,y).