ΚΑΜΠΥΛΕΣ

ΟΡΣ <u>Καμπύλη</u> λέγεται κάθε συνεχής $r : I \to \mathbb{R}^n$, που ορίζεται πάνω σε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

Στην θεωρία καμπυλών ενδιαφερόμαστε, όχι για την απεικόνιση r, αλλά για την εικόνα $C = r(I)$. Η C περιγράφεται με τους παρακάτω τρόπους:

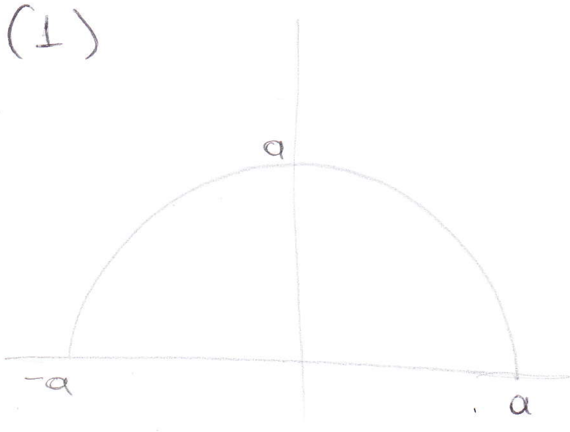
(1) $C = \{ r(t) : t \in I \} = \{ (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)) : t \in I \}$
(<u>παραμετρική</u> εξίσωση)

(2) $C = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = 0 \}$
(<u>αναλυτική</u> εξίσωση)

(3) $C = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \}$
(<u>καρτεσιανή</u> εξίσωση: αποτελεί λύση της αναλυτικής ως προς κάποια, όχι κατ' ανάγκη την τελευταία, μεταβλητή).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1)



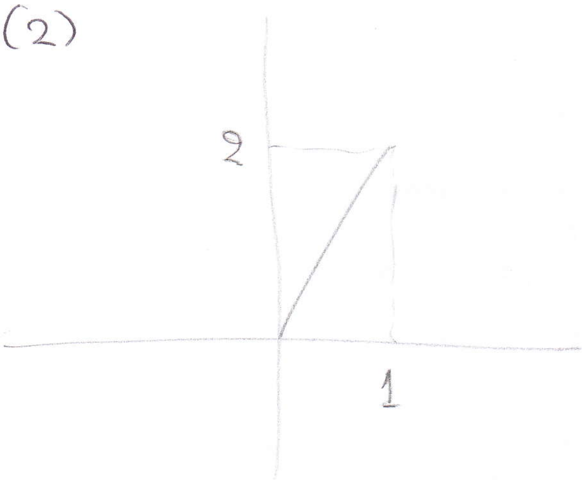
Στο $\mathbb{R}^2$:
Το άνω $(y \geq 0)$ ημικύκλιο του κύκλου με κέντρο $\vec{0}$ και ακτίνα $a > 0$.

παραμετρική εξ: $r(t) = (\sigma \upsilon \nu t, \eta \mu t)$, $t \in [0, \pi]$

αναλυτική εξ: $x^2 + y^2 = a^2$

καρτεσιανή εξ: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$.

(2)

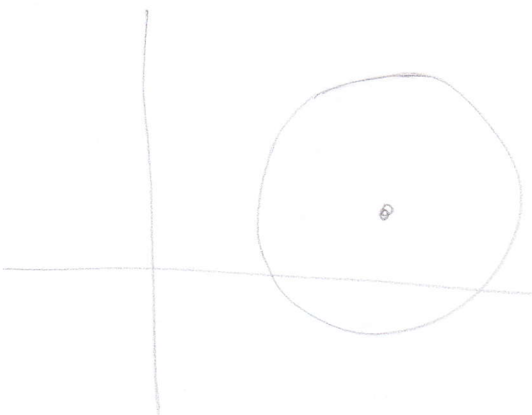


Στο $\mathbb{R}^2$ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει $(0,0)$ με $(1,2)$.

παραμετρική εξ/σ: $r(t) = (t, 2t)$

αναλυτική/~~καρτεσιανή~~: $y - 2x = 0 \iff y = 2x$

(3) Κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα $a > 0$:



Παραμετρική:

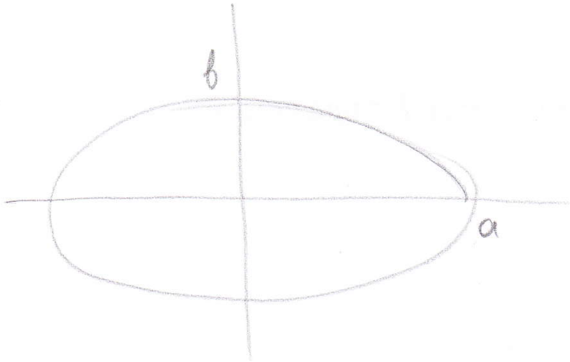
$r(t) = (x_0 + a\sigma\upsilon\nu t, \; y_0 + a\eta\mu t)$

αναλυτική:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$

καρτεσιανή: $\nexists$ μία λύση της αναλυτικής που να περιγράφει ολόκληρο τον κύκλο.

(4) Ελλειψη



παραμετρική:

$r(t) = (a\,συνt,\ b\,ημt)$

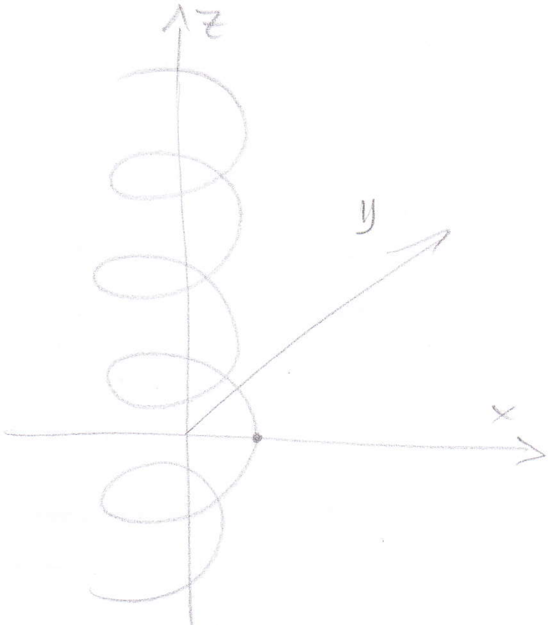
αναλυτική:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(5) Ελικα (στο $\mathbb{R}^3$)

παραμετρική:

$r(t) = (συνt,\ ημt,\ t)$



(6) Ευθειες του $\mathbb{R}^n$:

καθε 1-διάστατος γραμμ. υπόχωρος X του $\mathbb{R}^n$ είναι της μορφής $X = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ όπου $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ευθεία είναι κάθε μεταφορά κατά $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ενος τέτοιου υπόχωρου, δηλ. κάθε ευθεία είναι της μορφής

$$E = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\} + \vec{u} = \{t\vec{v} + \vec{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Αυτή είναι η παραμετρική μορφή. Ποιές είναι οι άλλες μορφές;

Ασκ. Ποιά είναι η ευθεία που

(1) περνά απο τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2)

(2) περνά από το (x_0, y_0) και είναι παράλληλη με (a, b)

(3) —— " —— " —— " —— κάθετη στο (a, b);

(7) <u>Κωνικές Τομές</u> (στο $\mathbb{R}^2$) είναι οι καμπύλες με αναλυτική εξίσωση

$$\circledast \quad Ax^2+By^2+\Gamma xy+\Delta x+Ey+Z=0, \quad (A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοια καμπύλη είναι τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο (μέσα στο $\mathbb{R}^3$).

Η $\circledast$ γράφεται και με τη μορφή

$$(x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \zeta = 0$$

Ανάλογα με τις ιδιότητες του πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ προκύπτει ότι η $\circledast$ είναι έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Μια καμπύλη $C\subseteq\mathbb{R}^3$ λέγεται:

(1) <u>$\mathcal{C}^1$-καμπύλη</u>, αν $\exists$ παραμέτρηση $r: I\to C$ διαφορίσιμη, με συνεχή παράγωγο r'.

(2) <u>κατά τμήματα $\mathcal{C}^1$-καμπύλη</u>, αν $\exists$ παραμέτρηση $r: \underset{=[a,b]}{I}\to C$ και διαμέριση $\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$ του I, έτσι ώστε κάθε περιορισμός της r στα $[x_k, x_{k+1}]$ να είναι $\mathcal{C}^1$-καμπύλη.

(3) <u>κανονική</u>, αν $\exists$ διαφορίσιμη παραμέτρηση $r: I\to C$ με $r'(t)\neq 0$, $\forall t\in I$.

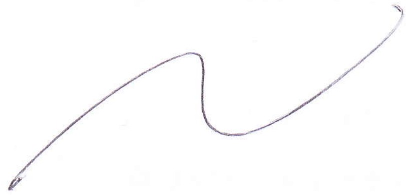
(4) <u>κατά τμήματα κανονική</u>, αν $\exists$ παραμέτρηση $r: I\to C$ και διαμέριση $\{x_0,\dots,x_n\}$ του I: $r([x_k,x_{k+1}])$ κανονική, $\forall k=0,\dots,n-1$.

(5) <u>απλή</u>, αν c 1-1 ($\Rightarrow$ C δεν αυτοτέμνεται)

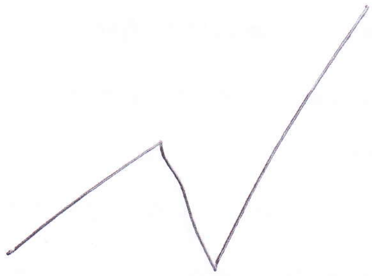
(6) <u>κλειστή</u>, αν $c(a)=c(b)$.

Μια απλή κλειστή καμπύλη λέγεται <u>καμπύλη ή τόξο Jordan</u>.

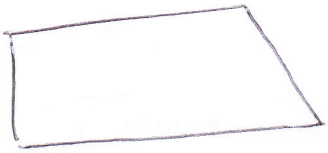
<u>Παραδ.</u>



C^1-καμπύλη, απλή, όχι κλειστή

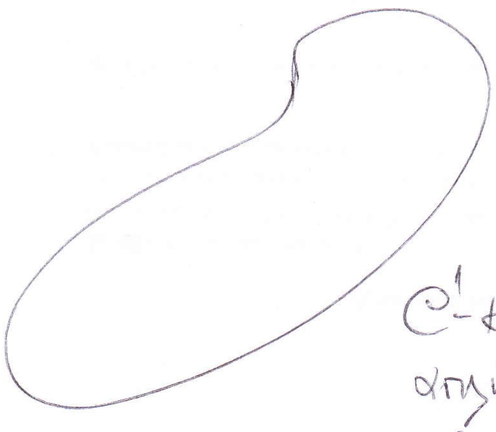


όχι C^1-καμπ., απλή όχι κλειστή



όχι C^1-καμπ. απλή, κλειστή (Jordan)

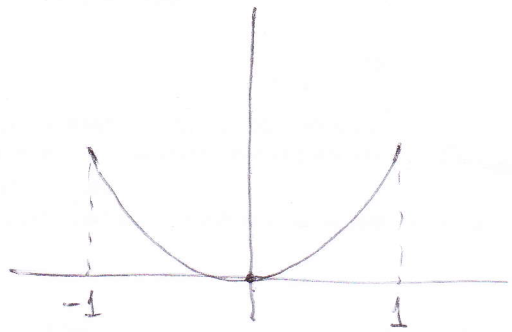
C^1-καμπ., όχι απλή όχι κλειστή



C^1-καμπ., απλή, κλειστή (Jordan)

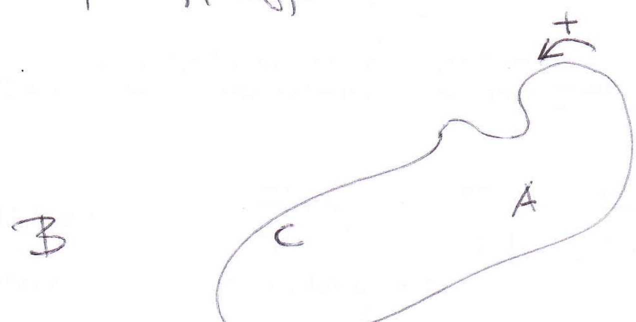
C^1-καμπ., όχι απλή, κλειστή.

Προσοχή! Η κανονικότητα μιας καμπύλης αναφέρεται στην παραμετρική της μορφή και μόνον σε αυτή. Π.χ. η παραβολή $y=x^2$, $x\in[-1,1]$ έχει παράγωγο που μηδενίζεται στο $x=0$, όμως η παραμετρική της μορφή $r(t)=(t,t^2)$



έχει παράγωγο $r'(t)=(1,2t)$, που δεν μηδενίζεται πουθενά. Η κανονικότητα αναφέρεται στην ύπαρξη εφαπτομένης ευθείας και όχι στο αν αυτή είναι παράλληλη/μή παράλληλη με τον άξονα των x.

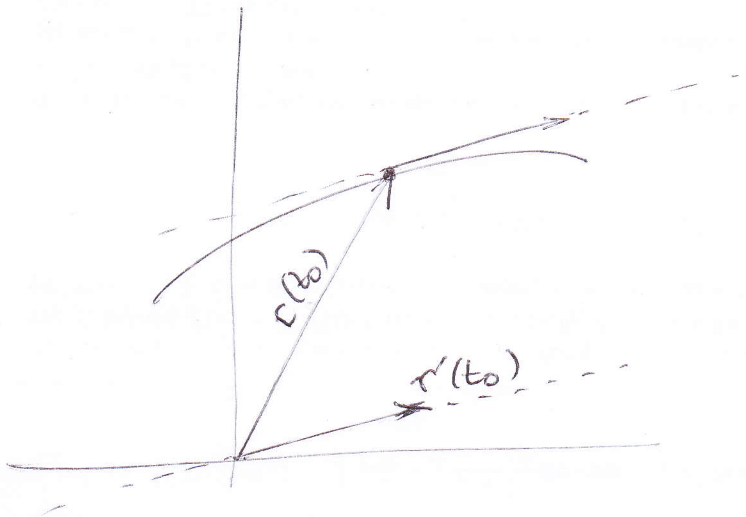
$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Jordan).
Έστω C απλή κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$. Τότε υπάρχουν ανοικτά, συνεκτικά $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ με $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B\cup C=\mathbb{R}^2$, A φραγμένο, B μή φραγμένο.



Το A λέγεται <u>εσωτερικό</u> της C και το B <u>εξωτερικό</u> της. Λέμε ότι η C είναι <u>θετικά προσανατολισμένη</u> αν κινούμενοι πάνω στην C έχουμε το εσωτερικό αριστερά

Έστω C κανονική καμπύλη παραμετρημένη από την $r(t)$, $t\in[a,b]$. Σε ένα σημείο $r(t_0)\in C$ η <u>εφαπτόμενη ευθεία</u> έχει εξίσωση

$$\varepsilon(t) = r(t_0) + t\, r'(t_0).$$



<u>Μήκος</u> μιας C^1-καμπύλης (ή κατά τμήματα C^1-καμπύλης) παραμετρημένης από την $r(t)$, $t\in[a,b]$, είναι το

$$\mu(C) := \int_a^b \|r'(t)\|\,dt.$$

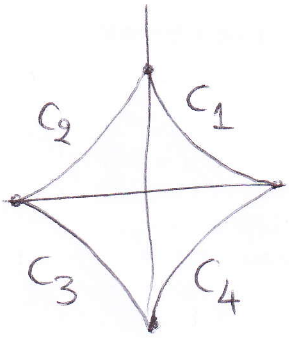
Παραδ. (1) $C :=$ ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{x}_0 \neq \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$:
παραμέτρηση: $r(t) = x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t\in[0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow r'(t) = y_0 - x_0 \neq 0$, $\forall t\in[0,1] \Rightarrow$ κανονική καμπύλη.

$$\mu(C) = \int_0^1 \|r'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|y_0 - x_0\|\,dt = \|y_0 - x_0\|$$

(2) $C =$ περιφέρεια $\subseteq \mathbb{R}^2$ με κέντρο 0 και ακτίνα 1:
παραμέτρηση: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow r'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0) \Rightarrow$ κανονική καμπύλη.

$$\mu(C) = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)^{1/2}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

(3) $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$



παραμέτρηση: $r(t) = (\sigma\upsilon\nu^3 t, \eta\mu^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$.

$r'(t) = (-3\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu t, 3\sigma\upsilon\nu t\,\eta\mu^2 t)$.

κατά τμήματα κανονική στα $[0,\pi/2]$, $[\pi/2,\pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$.

$$\mu(C) = 4\mu(C_1) = 4\int_0^{\pi/2} \|r'(t)\|\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t\,dt = \cdots = 6.$$

(4) $C = \{r(t) = (t\,\sigma\upsilon\nu t, t\,\eta\mu t, t) : t\in[0,\pi/2]\}$.

$r'(t) = (\sigma\upsilon\nu t - t\,\eta\mu t, \eta\mu t + t\,\sigma\upsilon\nu t, 1) \Rightarrow$ κανονική με

$\|r'(t)\| = (2+t^2)^{1/2}$ και

$$\mu(C) = \int_0^{\pi/2} (2+t^2)^{1/2}\,dt = \cdots = \frac{\pi\sqrt{\pi^2+8}}{8} + \ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+8}}{2\sqrt{2}}.$$