ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

ΟΡΣ Μια παραμετρημένη επιφάνεια είναι ένα $S \subseteq \mathbb{R}^3$, για το οποίο υπάρχει ένα ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}^2$ και μια διαφορίσιμη $r: U \to S$:

(1) $r: U \to S$ 1-1, επί, αμφισυνεχής.

(2) $\forall q \in U$, το διαφορικό $(Dr)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Το ζεύγος (U, r) λέγεται παραμέτρηση της S

Παρατήρηση – Το 1-1 της r εξασφαλίζει ότι η S δεν αυτοτέμνεται.

– $(Dr)_q$ 1-1 $\iff$

$J_q r$ είναι μέγιστης τάξης (δηλ. τάξης 2) $\iff$

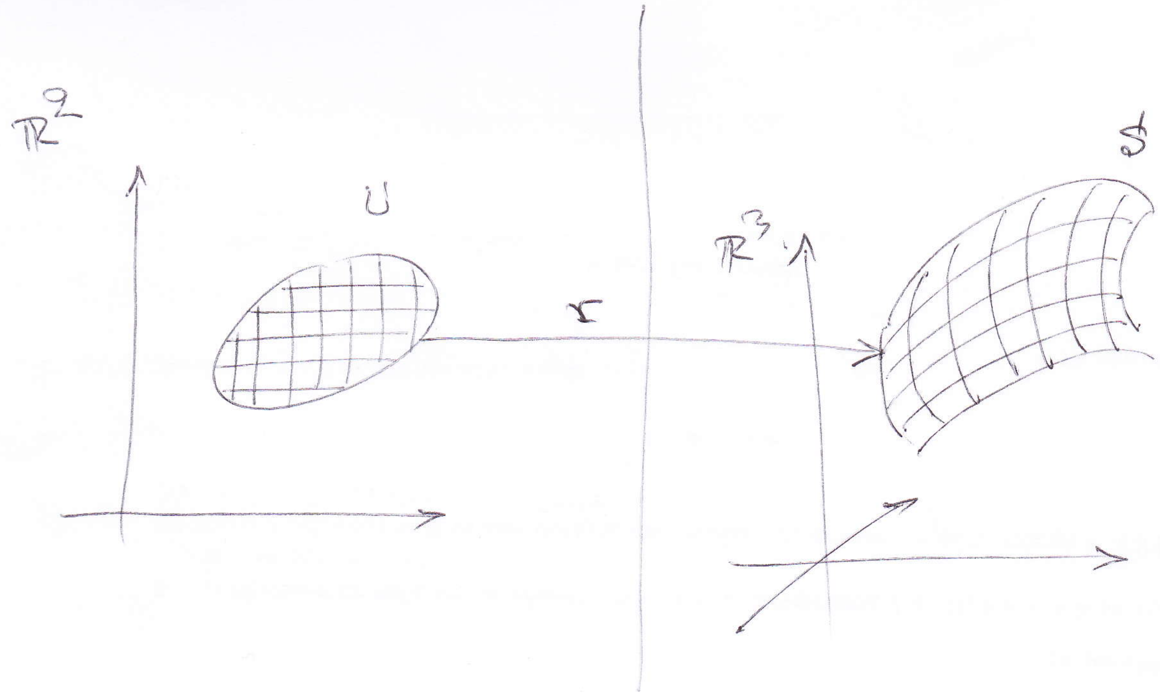
$J_q r$ έχει υποπίνακα 2×2 με μη-μηδενική ορίζουσα $\iff$

οι στήλες $\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_q$ και $\left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_q$ του $J_q r$ δεν είναι παράλληλες $\iff$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_q \times \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_q \neq 0.$$

Άρα το r δεν είναι ανεξάρτητο του x ή του y και η εικόνα του δεν είναι ούτε σημείο, ούτε καμπύλη.

ΟΡΣ Έστω (U, r) παραμέτρηση της S και $q_0 = (u_0, v_0) \in U$. Οι καμπύλες $\alpha(t) = r(t, v_0)$, $(t, v_0) \in U$, και $\beta(t) = r(u_0, t)$, $(u_0, t) \in U$, λέγονται παραμετρικές καμπύλες, ή καμπύλες συντεταγμένων.



Η S σαρώνεται από τις παραμετρικές καμπύλες. Η r παραμορφώνει τα ευθύγραμμα τμήματα του U (βλ. σχήμα) στέλνοντάς τα στις παραμ. καμπύλες του S, αλλά λόγω του 1-1 δεν τα τέμνει μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

① Ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $S := \{(u,v,0) : (u,v) \in U\}$,

$r : U \to S$ με $r(u,v) := (u,v,0)$. Τότε η $r : U \to S$ είναι 1-1, επί, συνεχής. Η αντίστροφή της είναι η

$r^{-1} : S \to U : (u,v,0) \longmapsto (u,v)$ που είναι συνεχής, σαν περιορισμός της συνεχούς $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x,y)$.

Επίσης

$$J_q r = \left(\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_q , \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_q \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τάξης 2.

② Επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$

Έστω $\Pi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Ax+By+Cz+D=0\}$ με $(A,B,C) \neq (0,0,0)$.
Έστω $C \neq 0$. Τότε η

$$r: U=\mathbb{R}^2 \longrightarrow \Pi \subseteq \mathbb{R}^3 : (x,y) \longmapsto \left(x,y,\frac{-D-Ax-By}{C}\right)$$

είναι παραμέτρηση του Π. Πράγματι, η r είναι 1-1, επί, αμφισυνεχής, όπως προηγουμένως, και

$$J_q r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -A/C & -B/C \end{pmatrix} \quad \text{τάξης } 2.$$

③ Η σφαίρα $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$.

Παρατηρούμε ότι $\nexists$ αμφισυνεχής $r: \underset{(\text{ανοιχτό})}{U} \longrightarrow S^2$ (συμπαγής).
$\exists$ παραμετρήσεις που καλύπτουν τμήματα της σφαίρας, π.χ. τα ημισφαίρια:

$$S_z^+ = \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\} \quad (\text{βόρειο ημισφαίριο})$$

Θεωρούμε $U = D(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ (εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου), και

$$r: D(0,1) \longrightarrow S_z^+ : (x,y) \mapsto \left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

Το (U,r) είναι παραμέτρηση του S_z^+.

④ Ανάλογα με την σφαίρα, επιδέχονται παραμέτρηση επιφανείας τα επόμενα σχήματα:

- ελλειψοειδές: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$, $a\beta\gamma \neq 0$.
- μονόχωνο υπερβολοειδές: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}-\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$, $a\beta\gamma \neq 0$

– δίχωνο υπερβολοειδές: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$

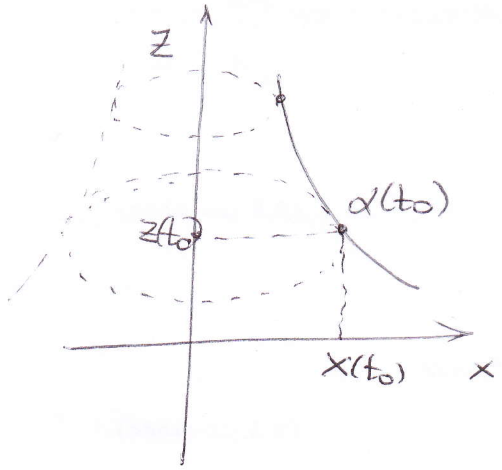
– ελλειπτικό παραβολοειδές: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-z=0$, $\alpha\beta\neq 0$

– υπερβολικό παραβολοειδές: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-z=0$, $\alpha\beta\neq 0$

– τετραγωνικός κώνος: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$, $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

5 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Έστω $\alpha(t)=(x(t),z(t))$ απλή επίπεδη καμπύλη στο επίπεδο των x,z που δεν τέμνει τον άξονα zOz', έστω με $x>0$.



Αν περιστρέψουμε το επίπεδο των x,z περί τον zOz', το σημείο $\alpha(t_0)=(x(t_0),z(t_0))$ διαγράφει στον χώρο τον κύκλο

$$(x(t_0)\,\text{συν}s,\ x(t_0)\,\text{ημ}s,\ z(t_0)),$$

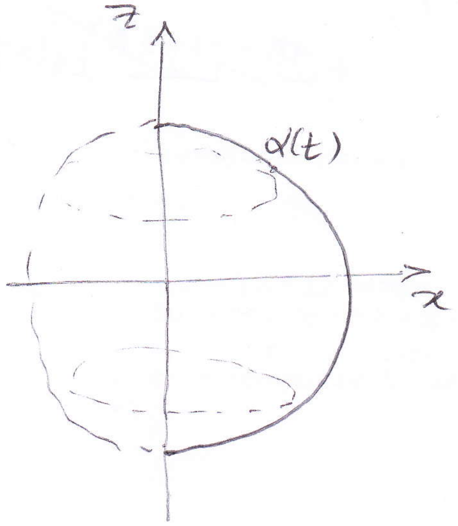
και η καμπύλη $\alpha(t)$, $t\in I$, διαγράφει την επιφάνεια S με παραμέτρηση

$$r(s,t)=(x(t)\,\text{συν}s,\ x(t)\,\text{ημ}s,\ z(t)),$$

$t\in I$ και $s\in(0,2\pi)$ (ή $s\in(-\pi,\pi)$, κτλ.).

Η S λέγεται <u>επιφάνεια εκ περιστροφής της καμπύλης α περί τον άξονα zOz'</u>.

(5α) Η <u>σφαίρα</u> είναι επιφάνεια εκ περιστροφής της καμπύλης $\alpha(t) = (\underbrace{\sigma\upsilon\nu t}_{x(t)}, \underbrace{\eta\mu t}_{z(t)})$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, με

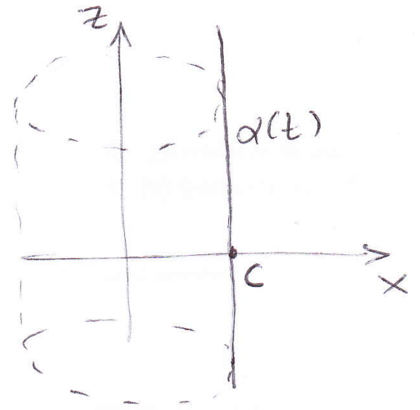


παραμέτρηση

$$r(s,t) = (\underbrace{\sigma\upsilon\nu t}_{x(t)}\sigma\upsilon\nu s, \underbrace{\sigma\upsilon\nu t}_{x(t)}\eta\mu s, \underbrace{\eta\mu t}_{z(t)}),$$

$t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $s \in (0, 2\pi)$.

(5β) Ο <u>κύλινδρος</u> δημιουργείται με περιστροφή της



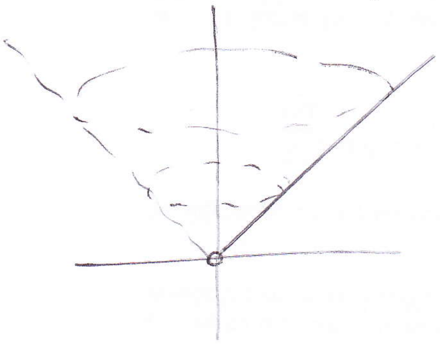
ευθείας $\varepsilon(t) = (\underset{x(t)}{\underset{\shortparallel}{c}}, \underset{z(t)}{\underset{\shortparallel}{t}})$

και έχει παραμέτρηση

$$r(s,t) = (c\,\sigma\upsilon\nu s, c\,\eta\mu s, t).$$

(5γ) Ο <u>κώνος</u> δημιουργείται με περιστροφή της

$\alpha(t) = (t, t)$, $t > 0$ (ή $t < 0$)



με

$$r(s,t) = (t\,\sigma\upsilon\nu s, t\,\eta\mu s, t),$$

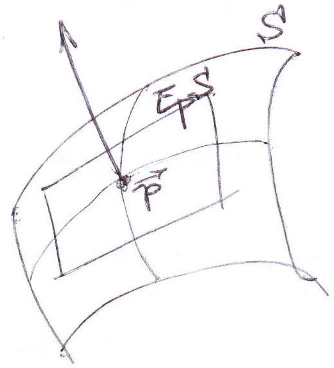
$t > 0$, $s \in (0, 2\pi)$.

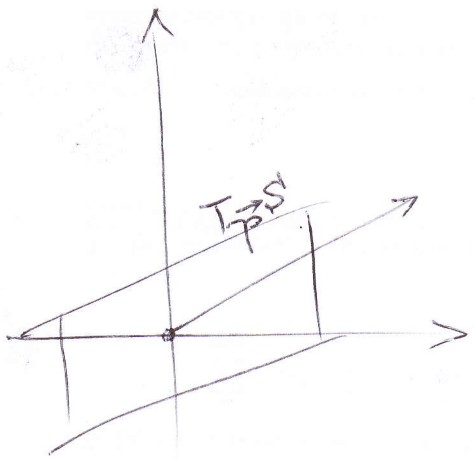
Αν η $r: U \to S$ είναι παραμέτρηση επιφανείας, $\forall \vec{q} \in U$, $\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\vec{q}} \times \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{\vec{q}} \neq 0$ (σελ. 83), άρα $\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\vec{q}}$ και $\left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{\vec{q}}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα, επομένως παράγουν ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2. Ο υπόχωρος αυτός λέγεται <u>εφαπτόμενος χώρος της S στο</u> $\vec{p} = r(\vec{q})$ και συμβολίζεται με $T_{\vec{p}}S$. Δηλ:

$$T_{\vec{p}}S = \left\{ \lambda \cdot \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\vec{q}} + \mu \cdot \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{\vec{q}} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\vec{p}$</u> είναι το επίπεδο $E_{\vec{p}}S$ που είναι $/\!/ \, T_{\vec{p}}S$ και περνά από το $\vec{p} = r(\vec{q})$, δηλ.

$$E_{\vec{p}}S = T_{\vec{p}}S + \vec{p}.$$





Σε κάθε $\vec{p} = r(\vec{q}) \in S$, η ευθεία

$$\left\{ \lambda \cdot \left(\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\vec{q}} \times \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{\vec{q}} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι <u>κάθετη</u> στο εφαπτόμενο επίπεδο $E_{\vec{p}}S$ (και στον εφ. χώρο).