ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εστω $B\subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $g=(g_1,\dots,g_n): B\longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια διαφ. απεικόνιση. Συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial(g_1,g_2,\dots,g_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

την ορίζουσα του πίνακα Jacobi $Jg=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ και με

$$\left|\frac{\partial(g_1,g_2,\dots,g_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right|$$

την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του Jg. Μια τέτοια g λέγεται <u>μετασχηματισμός συντεταγμένων</u>, αν

(i) g 1-1

(ii) g C^1-διαφ/μη

(iii) $\left|\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|\neq 0$ σε κάθε $(x_1,\dots,x_n)\in B$.

ΘΕΩΡ. (Αλλαγής μεταβλητής)

Εστω $B\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $g: B\longrightarrow\mathbb{R}^n$ μ/σχ. συντεταγμένων, $X\subseteq g(B)$ φραγμένο, $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε $(f\circ g)\cdot\left|\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|$ ολοκληρώσιμη, και

$$\int_X f(\vec{u})\,d\vec{u}=\int_{g^{-1}(X)} f\circ g(\vec{v})\cdot\left|\left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_{\vec{v}}\right|\,d\vec{v}.$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "g"] & & g(B) \\
\cup & & \cup \\
g^{-1}(X) \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & & X \arrow[ll, shift left, "g^{-1}"] \arrow[dl, "f"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Παράδ. } (1)}$

Η απεικ. $g: [0,+\infty)\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : g(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta)$ είναι μετασχ. συντεταγμένων (πολικός μτσχ.) σε κάθε ανοιχτό, με

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \text{συν}\theta & -r\,\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & r\,\text{συν}\theta \end{vmatrix}\right| = |r\,\text{συν}^2\theta + r\,\text{ημ}^2\theta| =$$

απολ. τιμή   ορίζουσα

$$= |r| = r > 0$$

$\boxed{\text{Εφαρμογές}}$

(1) Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας $a>0$.

Απάντηση. Επειδή οι μεταφορές δεν αλλάζουν τα εμβαδά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο του δίσκου είναι το $(0,0)$. Έστω $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < a^2\}$. Αν g ο πολικός μτσχ.,

$g^{-1}(D) = (0,a)\times[0,2\pi]$ r-απλό και θ-απλό, και

$$v(D) = \int_D 1\, d(x,y) = \iint_{g^{-1}(D)} (1\circ g)(r,\theta)\cdot r\cdot dr\, d\theta = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} 1\cdot r\, d\theta\right] dr =$$

$$= \int_0^a 2\pi r\, dr = 2\pi\cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \pi a^2.$$

(2) Να υπολογιστεί το $I = \iint_D \text{ημ}(x^2+y^2)\, dx\, dy$, στο D της (1).

Απάντηση.

$$I = \iint_{g^{-1}(D)} \text{ημ}(r^2\text{συν}^2\theta + r^2\text{ημ}^2\theta)\cdot r\cdot dr\, d\theta =$$

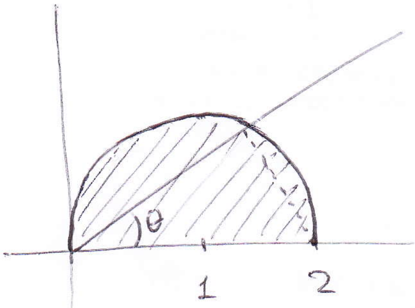
$$= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} r\,\text{ημ}r^2\, d\theta\right] dr = \int_0^a 2\pi r\,\text{ημ}r^2\, dr = -\pi\int_0^a (\text{συν}r^2)'\, dr$$

$$= -\pi\cdot \text{συν}r^2\Big|_0^a = -\pi(\text{συν}a^2 - 1).$$

(3) Να υπολογιστεί το $I=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο που περιβάλλεται από $y\geq 0$ και $x^2+y^2=2x$.

Απάντηση.

Παρατηρούμε ότι $x^2+y^2=2x \iff (x-1)^2+y^2=1$ (: κύκλος με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα 1). Για $y\geq 0$ το D είναι το άνω ημικύκλιο του ανωτέρω κύκλου.



Επειδή το D περιέχεται στο 1º τεταρτημόριο, $0\leq\theta\leq\pi/2$. Για δεδομένο θ, το αντίστοιχο r είναι $0\leq r\leq 2\,\text{συν}\theta$. Άρα

$g^{-1}(D)=\{(r,\theta): 0\leq\theta\leq\pi/2$ και $0\leq r\leq 2\,\text{συν}\theta\}$ θ-απλό και

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint_{g^{-1}(D)} (r^2\text{συν}^2\theta+r^2\text{ημ}^2\theta)\cdot r\cdot dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\text{συν}\theta} r^3\,dr\right]d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\text{συν}\theta}\right)d\theta=\int_0^{\pi/2}4\,\text{συν}^4\theta\,d\theta=$$

$$\overset{\circledast}{=}(\text{τύπος αποτετραγωνισμού, κλπ})=\int_0^{\pi/2}4\left(\frac{3}{8}+\frac{\text{συν}2\theta}{2}+\frac{\text{συν}4\theta}{8}\right)d\theta$$

$$=4\left[\frac{3}{8}\theta\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\text{ημ}2\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\text{ημ}4\theta}{32}\Big|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\frac{3\pi}{4}+0+0=\frac{3\pi}{4}$$

$\circledast$ $\left[\ \text{συν}^2\theta=\dfrac{1+\text{συν}2\theta}{2}\Rightarrow\right.$

$\left.\text{συν}^4\theta=\left(\dfrac{1+\text{συν}2\theta}{2}\right)^2=\cdots\ \right]$

Παραδ. (2)

Η απεικόνιση $g: [0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 : g(r,\theta,z)=(r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta, z)$ είναι μετασχ. συντεταγμένων (κυλινδρικός μετασχ.) σε κάθε ανοιχτό, με

$$\left|\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix}\text{συν}\theta & -r\,\text{ημ}\theta & 0\\ \text{ημ}\theta & r\,\text{συν}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\| = |r\,\text{συν}^2\theta + r\,\text{ημ}^2\theta| = r.$$

Εφαρμογές

(1) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο ($: x,y,z\geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2+y^2=9$ (: κύλινδρος) και $3z=x^2+y^2$ (: παραβολοειδές).

Απάντηση.

$B=\{(x,y,z): x,y,z\geq 0,\ x^2+y^2\leq 9,\ 3z\leq x^2+y^2\}$.

Αν g ο κυλινδρικός μετασχ.,

$g^{-1}(B)=\{(r,\theta,z): 0\leq\theta\leq\pi/2,\ 0\leq r\leq 3,\ 0\leq z\leq \frac{r^2}{3}\}$:

$r\theta$-απλό και θr-απλό. Άρα

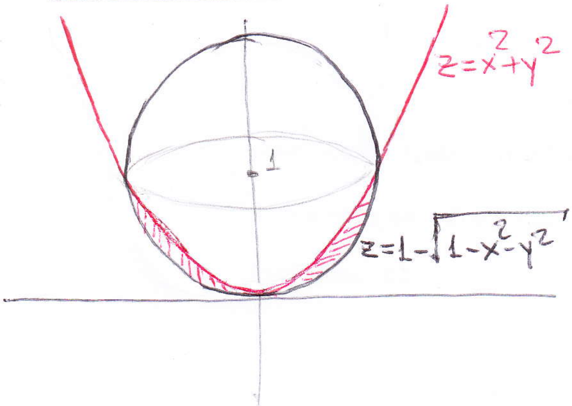
$$V(B)=\int_B 1\,d(x,y,z)=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^3\left[\int_0^{r^2/3} 1\cdot r\cdot dz\right]dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^3\left[rz\Big|_0^{r^2/3}\right]dr\right]d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^3 r^3/3\,dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(r^4/12\Big|_0^3\right)d\theta=\int_0^{\pi/2} 3^4/12\,d\theta=\frac{27}{4}\cdot\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{27\pi}{8}.$$

(2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που περικλείεται από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=2z$ και το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$.

Απάντηση.



$x^2+y^2+z^2=2z \Rightarrow$

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$, δηλ. η σφαίρα έχει κέντρο $(0,0,1)$ και ακτίνα 1.

Η σφαίρα και το παραβολοειδές τέμνονται στη λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x^2+y^2=z \end{array}\right\} \Rightarrow z+(z-1)^2=1 \Rightarrow z=0 \text{ ή } z=1.$$

Δηλ. τέμνονται στο σημείο $(0,0,0)$ και τον κύκλο $x^2+y^2=z=1$.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\sqrt{x^2+y^2}=r\le 1$ και το z βρίσκεται ανάμεσα στο z της σφαίρας ($z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\sqrt{1-r^2}$) και του z του παραβολοειδούς ($z=x^2+y^2=r^2$), όπου $r^2 \geq 1-\sqrt{1-r^2}$. Δηλ.

$$g^{-1}(B)=\{(r,\theta,z):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le r^2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(B)=\int_B 1\, d(x,y,z)=\int_{g^{-1}(B)} 1\cdot r\cdot dr\, d\theta\, dz =$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\left[\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2} 1\cdot r\cdot dz\right]d\theta\right]dr=$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\left[rz\Big|_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\right]d\theta\right]dr=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\left(r^3-r+r\sqrt{1-r^2}\right)d\theta\right]dr$$

$$=\ldots=\pi/6.$$

(3) Να βρεθεί το $M=\int_B z\,dx\,dy\,dz$, όπου

$B=\{(x,y,z):\ x,y,z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 4a^2,\ x^2+y^2\leq a^2\}$, $a>0$.

Απάντηση

Το B είναι το χωρίο του 1ου ογδοημόριου που βρίσκεται μέσα στην σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4a^2$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=a^2$. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $0\leq\theta\leq\pi/2$ $(x,y\geq 0)$, $x^2+y^2=r^2\leq a^2\Rightarrow 0\leq r\leq a$, και το z περιορίζεται από την σφαίρα, δηλ. $0\leq z\leq\sqrt{4a^2-x^2-y^2}=\sqrt{4a^2-r^2}$. Άρα

$g^{-1}(B)=\{(r,\theta,z):\ 0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq\pi/2,\ 0\leq z\leq\sqrt{4a^2-r^2}\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow M=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\cdot z\,dz\right]dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a\left[r\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\right]dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a\left[\frac{r}{2}(4a^2-r^2)\right]dr\right]d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a\left(2a^2r-\frac{r^3}{2}\right)dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[a^2r^2-\frac{r^4}{8}\Big|_0^a\right]d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(a^4-\frac{a^4}{8}\right)d\theta=\frac{7a^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7a^4\pi}{16}.$$

Παραδ. 3

Η απεικόνιση $g(\rho,\theta,\phi)=(\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\phi,\ \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi,\ \rho\,\text{συν}\phi)$ με $(\rho,\theta,\phi)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ είναι μετασχ. συντεταγμένων (: σφαιρικός μετασχ.) σε κάθε ανοιχτό με

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|=\left\|\begin{matrix}\text{συν}\theta\,\text{ημ}\phi & -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\phi\\ \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\phi & \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\phi\\ \text{συν}\phi & 0 & -\rho\,\text{ημ}\phi\end{matrix}\right\|=\cdots=\rho^2\text{ημ}\phi>0.$$

Εφαρμογή: Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}, \quad a>0.$$

Απαντ. Παρατηρούμε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$g^{-1}(B) = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}, \text{ άρα}$$

$$V(B) = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a} 1 \cdot \rho^2 \,\eta\mu\phi \, d\rho \right] d\theta \right] d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left[\eta\mu\phi \cdot \rho^3/3 \Big|_0^a \right] d\theta \right] d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \eta\mu\phi \cdot a^3/3 \right] d\theta \Big] d\phi = \int_0^{\pi} \frac{2\pi a^3}{3} \eta\mu\phi \, d\phi =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \cdot \left(-\sigma\upsilon\nu\phi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες αν έχουμε συμμετρία ως προς άξονα και σφαιρικές αν έχουμε συμμετρία ως προς κέντρο.