Διανυσματικός Λογισμός

Γιώργος Χαλικιάς, Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Τμήμα Πληροφορικής, Δεκέμβρης 2024, εκδ. 2.2

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ - Δ1

Ορίζουμε τον χώρο:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ διατεταγμένη n-αδα (διάνυσμα) με συντεταγμένες x_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ορίζουμε επίσης το άθροισμα δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

και τον πολλαπλασιασμό (βαθμωτό γινόμενο):

$$a\mathbf{x} = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

όπου $a \in \mathbb{R}$

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ - Δ2

- Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν είναι διανυσματικός χώρος με τις πράξεις $(+, \cdot)$, δηλαδή $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ και $a\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, $a \in \mathbb{R}$. Υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ είναι το $\{\mathbf{0}\}$, ευθείες που διέρχονται από το $\{\mathbf{0}\}$, επίπεδα που διέρχονται από το $\{\mathbf{0}\}$, κλπ.
- Τα διανύσματα $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν $\Sigma_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\alpha_i = 0$ γιά κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ (διαφορετικά είναι γραμμικά εξαρτημένα).
- $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m := \{\Sigma_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$, όπου $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Το $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
- Τα διανύσματα $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι βάση ενός υπόχωρου $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}^n$ αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m = \mathcal{U}$. Τυπική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ όπου $\mathbf{e}_i$ η i-στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_n.
- Η βάση ενός υπόχωρου $\mathcal{U}$ δεν είναι μοναδική, αλλά ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης είναι, και λέγεται διάσταση του $\mathcal{U}$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ - Δ3

- Γραμμικός μεταχηματισμός $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ ορίζεται από

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$$

γιά κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται σαν πολλαπλασιασμός $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, όπου $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $j = 1, 2, \ldots m$. Εδώ $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι διανύσματα στήλης. Για απλότητα συμβολίζουμε με A τόσο τον γραμμικό μετασχηματισμό όσο και τον αντίστοιχο πίνακα.

- Ορίζουμε: $\mathbf{R}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ την εικόνα του A και $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ τον πυρήνα του A. $\mathbf{R}(A)$ και $\mathrm{Ker}(A)$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα. Ορίζουμε επίσης

$$\mathrm{Rank}(A) = \dim \mathbf{R}(A), \quad \mathrm{Null}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A)$$

Από γνωστό Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας έχουμε

$$\mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Null}(A) = n$$

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ - Δ4

Ορισμός Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ορίζουμε την (Ευκλείδια) νόρμα του $\mathbf{x}$, $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

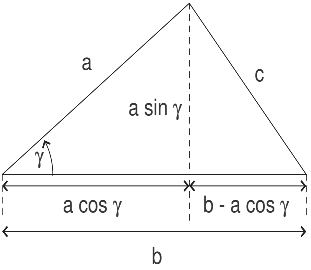
Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

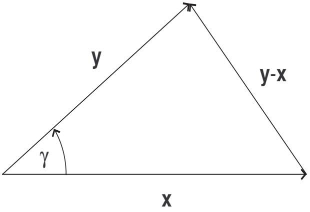
(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

(iii) $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$

Γεωμετρική ερμηνεία εσωτερικού γινομένου





$$c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + a^2\sin^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 =$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\gamma + \|\mathbf{y}\|^2 \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\gamma$$

Επομένως αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$

Παράδειγμα

Βρείτε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{y} = (2, 0, 5)$. Έχουμε:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$$

και

$$\|\mathbf{y}\|^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow \|\mathbf{y}\| = \sqrt{29}$$

Επομένως:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 17 = \sqrt{14}\sqrt{29} \cos\theta$$

και

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{14}\sqrt{29}}\right) \approx 32.5^\circ$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz - Δ1

Θεώρημα: Ισχύει:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = |x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Ισοδύναμα $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

Απόδειξη: Η ανισότητα ισχύει αν $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Έστω $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. $\forall \ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|^2 := f(\lambda) \end{aligned}$$

Η $f(\lambda)$ ελαχιστοποιείται όταν:

$$f'(\lambda) = 2\lambda \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^* = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz - Δ2

Απόδειξη (συνέχεια): Επομένως:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|\mathbf{x} - \lambda^* \mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^4}\|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \\
&\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\Rightarrow |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|
\end{aligned}
$$

$\square$

Τριγωνική Ανισότητα

Θεώρημα: Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Απόδειξη:

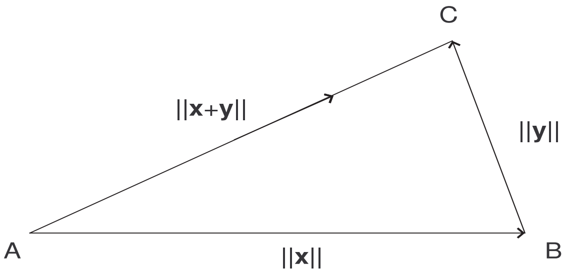
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$\square$

Γεωμετρική Ερμηνεία Ανισότητας (στον $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)



$$|AB| + |BC| \leq |AC| \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$$

Έχουμε ισότητα, δηλ. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$, $\lambda \geq 0$.

Απόσταση Διανυσμάτων, Μοναδιαία διανύσματα

Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την απόσταση μεταξύ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ως:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

που γενικεύει την απόσταση $|x - y|$ στον $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Η απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων (σημείων) $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{y} = (2, 0, 6)$ είναι:

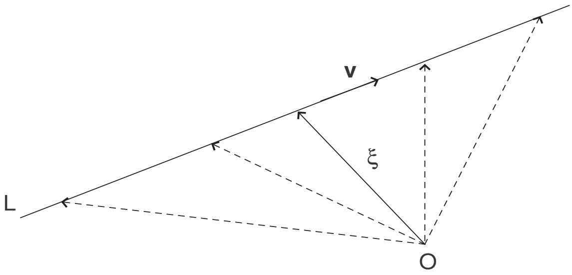
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Μοναδιαίο διάνυσμα: Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, τότε το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ έχει νόρμα 1 και είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση $\mathbf{x}$.

Παράδειγμα: Αν $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, τότε $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{6}$ και $\hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

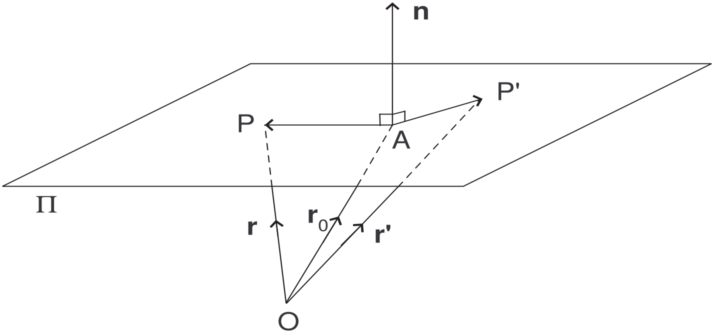
Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Το σύνολο σημείων (διανυσμάτων) $L = \{\boldsymbol{\xi} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ αντιστοιχεί σε ευθεία που περνά από το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ και έχει διεύθυνση $\mathbf{v}$.



Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ - Δ1

Έστω επίπεδο Π στον $\mathbb{R}^3$, σημείο $A \in \Pi$ και διάνυσμα $\mathbf{n}$ ορθογώνιο στο Π. Έστω ότι $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_0$. Γιά κάθε σημείο $P \in \Pi$ με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ το διάνυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα $\mathbf{n}$.



Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ - Δ2

Επομένως η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle$$

Αν $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ η εξίσωση ορίζει 'υπερ-επίπεδο'. Αν

$$\mathbf{r}_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \ \mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

και

$$\mathbf{n} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

η εξίσωση γράφεται:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n := \gamma$$

Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ όπου $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ορτηοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^3$ (σε προηγούμενο συμβολισμό $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$).

Ορισμός: Το εξωτερικό γινόμενο $(\cdot \wedge \cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται από το ανάπτυγμα της ορίζουσας:,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$.
- $\mathbf{a} \wedge (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$.
- $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

Τριπλό γινόμενο - Δ1

Έστω $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Τότε

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(με ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την τρίτη γραμμή).
Έστω ότι $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, δηλαδή $\mathbf{c} \in \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Τότε:

Τριπλό γινόμενο - Δ2

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} = 0$$

από ιδιότητες οριζουσών (Οι τρείς γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες $\Rightarrow$ ο πίνακας είναι ιδιάζων $\Rightarrow$ η ορίζουσα είναι 0). Συμπέρασμα: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ που συνεπάγεται ότι $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Υπολογίζουμε:

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle = \langle \Delta_{11}\mathbf{i} - \Delta_{12}\mathbf{j} + \Delta_{13}\mathbf{k}, \Delta_{11}\mathbf{i} - \Delta_{12}\mathbf{j} + \Delta_{13}\mathbf{k} \rangle$$

όπου Δ_{ij} η ορίζουσα που προκύπτει αν απαλείψουμε την i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Τριπλό γινόμενο - Δ3

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2 &= \Delta_{11}^2+\Delta_{12}^2+\Delta_{13}^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\
&= (a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2a_3b_2b_3)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3) \\
&\quad +(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_3) \\
&= a_1^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \\
&\quad -a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2-a_3^2b_3^2-2a_1a_3b_1b_3-2a_1a_2b_1b_2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\gamma \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\gamma
\end{aligned}$$

όπου $0\le\gamma\le\pi$ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **a** και **b**. Επομένως:

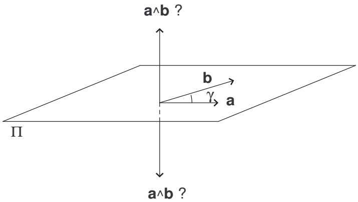
$$\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\gamma$$

Συμπέρασμα:

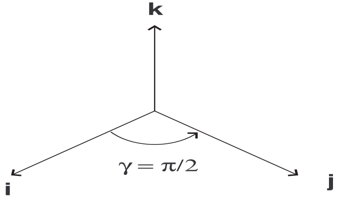
$$\text{(i) } \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\perp\Pi(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ \text{ και } \ \text{(ii) } \|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\gamma$$

Τριπλό γινόμενο - Δ4 -

Γεωμετρικά υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές για το $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$:



Η σωστή επιλογή (για το συγκεκριμμένο σχήμα) είναι η διεύθυνση 'προς τα πάνω' και δίνεται από τον κανόνα του 'δεξιοστρόφου κοχλίου'. Επαλήθευση: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$:

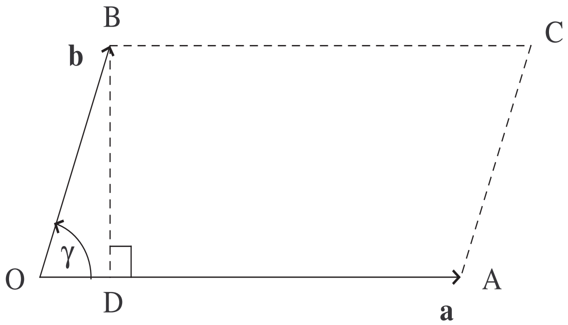


Γεωμετρική ερμηνεία εξωτερικού γινομένου

Έστω παραλληλόγραμμο με πλευρές που αντιστοιχούν στα διανύσματα **a** και **b**. Φέρουμε την κάθετο $BD \perp OA$. Τότε $|BD| = \|\mathbf{b}\| \sin\gamma$ και εμβαδόν

$$E = |BD| \cdot |OA| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin\gamma = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$$

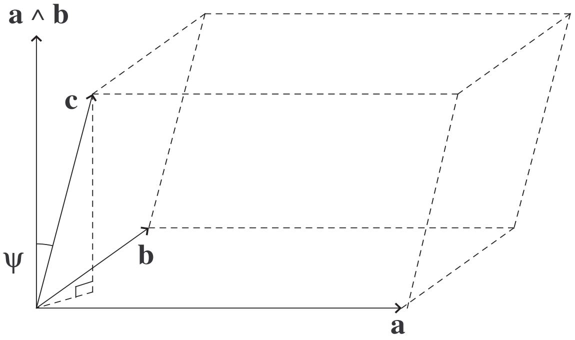
.



Γεωμετρική ερμηνεία τριπλού γινομένου

Έστω παραλληλεπίπεδο με πλευρές που αντιστοιχούν στα διανύσματα **a**, **b** και **c**.

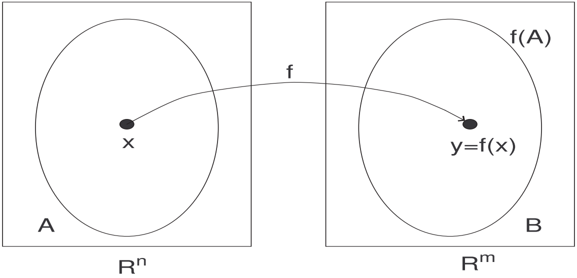
Εμβαδόν βάσης $= E = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$ Όγκος $= E\|\mathbf{c}\| \cos\psi = |(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$



Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, Όρια, Συνέχεια

Συναρτήσεις $\mathbf{f} : A \to B,\ A \subseteq \mathbb{R}^n,\ B \subseteq \mathbb{R}^m$

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f} : A \to B$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in A$ σε ένα (μοναδικό) διάνυσμα $\mathbf{y} \in B$. Το $\mathbf{y}$ είναι η *εικόνα* του $\mathbf{x}$ και γράφουμε $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Επίσης $\mathbf{f}(A) := \{\mathbf{y} \in B : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A\}$ είναι η εικόνα του A.



Η f λέγεται διανυσματική συνάρτηση αν $m > 1$ και βαθμωτή συνάρτηση αν $m = 1$.

Γράφημα συνάρτησης $f : A \to B, A \subseteq \mathbb{R}^n, \; B \subseteq \mathbb{R}^m$

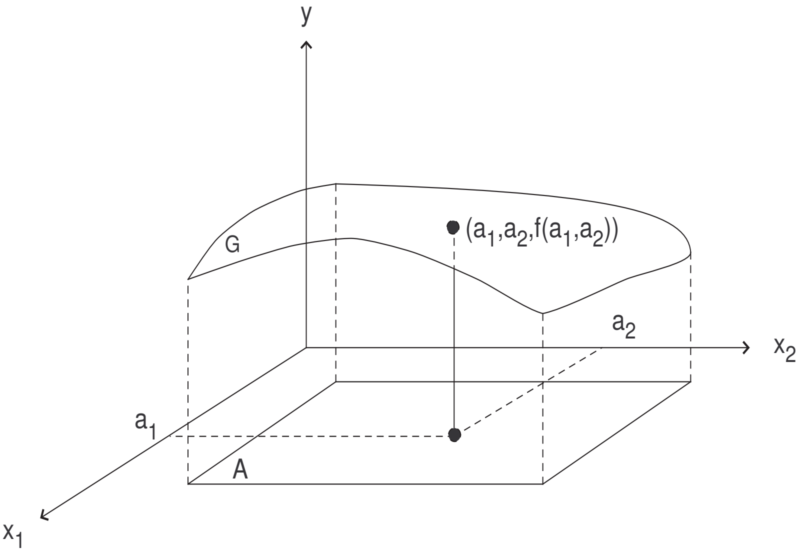
Το γράφημα της f είναι το σύνολο:

$$G = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

Αν $n + m = 3$ το γράφημα απεικονίζεται γεωμετρικά από τρισδιάστατο διάγραμμα.

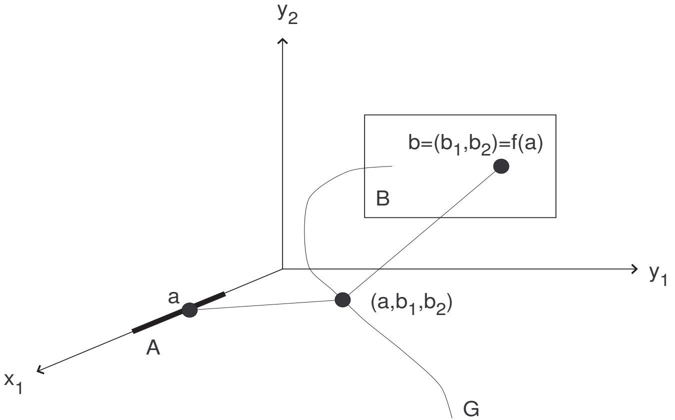
Αν $n = 2$ και $m = 1$ το γράφημα είναι επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$, ενώ αν $n = 1$ και $m = 2$ το γράφημα είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$.

Γράφημα συνάρτησης $f : A \to B, A \subseteq \mathbb{R}^2,\ B \subseteq \mathbb{R}^1$



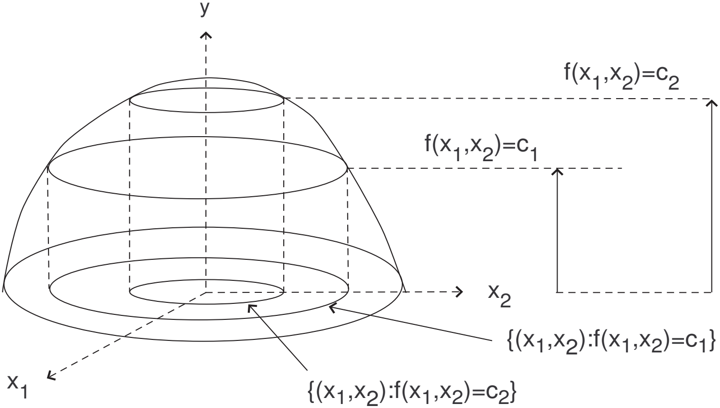
Γράφημα συνάρτησης $f : A \to B, A \subseteq \mathbb{R}^1,\ B \subseteq \mathbb{R}^2$

Στην περίπτωση αυτή το γράφημα της $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι καμπύλη στον χώρο $\mathbb{R}^3$.



Καμπύλες στάθμης $f : A \to B, A \subseteq \mathbb{R}^2,\ B \subseteq \mathbb{R}^1$

Πολλές φορές αντί να χρησιμοποιούμε το γράφημα της f σχεδιάζουμε τις επιφάνειες στάθμης ($n = 3$) η καμπύλες στάθμης ($n = 2$), παρόμοια με τοπογραφικό χάρτη.



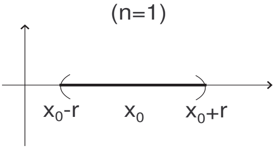
Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στην Φυσική

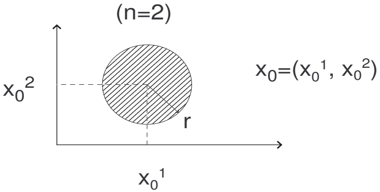
Βαθμωτό πεδίο: Ορίζεται συνήθως μέσω συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $w = f(x, y, z)$, όπου (x, y, z) διάνυσμα των συντεταγμένων Καρτεσιανού συστήματος αξόνων (η συστήματος πολικών-κυλινδρικών, πολικών-σφαιρικών συντεταγμένων, κλπ). *Παράδειγμα:* Πεδίο θερμοκρασίας, πίεσης, ηλεκτρο-στατικό δυναμικό.

Διανυσματικό πεδίο: Ορίζεται συνήθως μέσω συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{E} = f(x, y, z)$. Οι μεταβλητές (x, y, z) συνήθως αντιστοιχούν στις τρείς συντεταγμένες Καρτεσιανού συστήματος (η συστήματος πολικών-κυλινδρικών, πολικών-σφαιρικών συντεταγμένων, κλπ).*Παράδειγμα:* Πεδίο ταχύτητας ρευστού, πεδίο βαρύτητας (επιτάχυνσης), Ηλεκτροστατικό πεδίο **E**, μαγνητικό πεδίο **H**, κλπ.

Βασική τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ - Δ1

Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Η ανοικτή σφαίρα (μπάλα) ακτίνας $r \in \mathbb{R}_+$ και κέντρου $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως: $B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$.



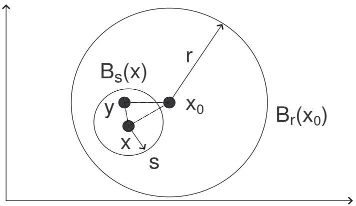


Το σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό αν $\forall \mathbf{x}_0 \in U \; \exists r = r(\mathbf{x}_0) \in U$ τ.ω. $B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq U$.

Βασική τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ - Δ2

Θεώρημα: Για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ το $B_r(\mathbf{x}_0)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Θα δείξουμε ότι $\exists s > 0$ τ.ω. $B_s(\mathbf{x}) \subseteq B_r(\mathbf{x}_0)$



Επιλέγουμε $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$. Τότε, αν $\mathbf{y} \in B_s(\mathbf{x})$ έχουμε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$ και

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = s + (r - s) = r \Rightarrow \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_0)$$

και εφόσον $\mathbf{x}$ αυθαιρετο, $B_s(\mathbf{x}) \subseteq B_r(\mathbf{x}_0)$. $\square$

Βασική τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ - Δ3

Άσκηση: Δείξτε ότι $A = \{(x, y) : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Το σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A ($\mathbf{x} \in \partial A$, το σύνορο του A) αν για κάθε $r > 0$ η σφαίρα $B_r(\mathbf{x})$ περιέχει ένα σημείο του A και ένα σημείο εκτός του A (δηλ. ένα σημείο στον $\mathbb{R}^n \setminus A$). Το A είναι κλειστό αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία, δηλ. αν $\partial A \subseteq A$. Γράφουμε επίσης $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ το διάστημα $(0, 1)$ είναι ανοικτό. Έχουμε $\partial A = \{0, 1\}$ και $\bar{A} = [0, 1]$. Στον $\mathbb{R}^n$ η σφαίρα $B_r(\mathbf{x}_0)$ είναι ανοικτό σύνολο (όπως δείξαμε),

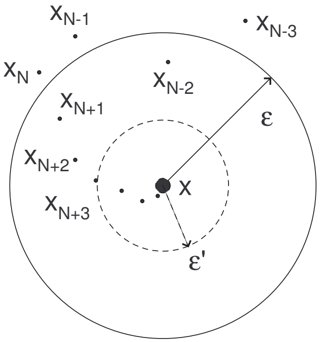
$$\partial B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}$$

και

$$\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$$

Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ - Δ1

Έστω $(\mathbf{x}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, ακολουθία διανυσμάτων με $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε: $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ καθώς $k \to \infty$ αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K$ έχουμε: $\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}\| < \epsilon$. Ισοδύναμα, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \to \mathbf{0}$, δηλ. αν για αυθαίρετα μικρό $\epsilon > 0$ υπάρχει $K = K(\epsilon)$ ώστε κάθε σημείο $\mathbf{x}_k$, $k > K$ να βρίσκεται εντός σφαίρας με κέντρο $\mathbf{x}$ και ακτίνα ϵ.



Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ - Δ2

Παρατήρηση: $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ αν ¨τελικά' η απόσταση των $\mathbf{x}_k$ από το $\mathbf{x}$ είναι μικρότερη από $\epsilon > 0$, όσο μικρό και να διαλέξουμε το ϵ.

Παράδειγμα: Η ακολουθία

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ καθώς $k \to \infty$. Έχουμε:

$$\mathbf{x}_k - \mathbf{x} = \left(\frac{k-1}{k} - 1, \frac{k+1}{k} - 1\right) = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

και επομένως:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 = \frac{2}{k^2} \to 0$$

καθώς $k \to \infty$.

Ιδιότητες σύγκλισης ακολουθιών - Δ1

Θεώρημα: Η ακολουθία διανυσμάτων $(\mathbf{x}_k)$, $k \in \mathbb{N}$ $(\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n)$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\mathbf{x}_k^{(i)} \to \mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $\mathbf{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)})$ και $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$.

Απόδειξη (για $n = 2$): Έστω $\mathbf{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)})$, $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

(i) Έστω ότι $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$. Τότε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως:

$$(x_k^{(1)} - x^{(1)})^2 \leq (x_k^{(1)} - x^{(1)})^2 + (x_k^{(2)} - x^{(2)})^2 \to 0$$

και επομένως $x_k^{(1)} \to x^{(1)}$. Παρόμοια $x_k^{(2)} \to x^{(2)}$.

(ii) Αντίστροφα έστω ότι $x_k^{(1)} \to x^{(1)}$ και $x_k^{(2)} \to x^{(2)}$. Τότε

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 = (x_k^{(1)} - x^{(1)})^2 + (x_k^{(2)} - x^{(2)})^2 \to 0$$

και συνεπώς $\mathbf{x}_k - \mathbf{x} \to 0$. $\square$

Ιδιότητες σύγκλισης ακολουθιών - Δ2

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $x_k^1 = 1 - \frac{1}{k} \to 1$ και $x_k^2 = 1 + \frac{1}{k} \to 1$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως $\mathbf{x}_k \to (1, 1)$.

Θεώρημα: Έστω $(\mathbf{x}_k)$, $(\mathbf{y}_k)$ ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ και $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}$ καθώς $k \to \infty$. Τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lambda\mathbf{x}_k + \mu\mathbf{y}_k \to \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ καθώς $k \to \infty$.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ και $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο Θεώρημα, αφού $x_k^{(i)} \to x^{(i)}$ και $y_k^{(i)} \to y^{(i)}$ συνεπάγεται ότι $\lambda x_k^{(i)} + \mu y_k^{(i)} \to \lambda x^{(i)} + \mu y^{(i)}$. $\square$.

Όριο συναρτήσεων $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και συνέχεια

Ορισμός (ορίου): Έστω $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό και $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$. Τότε λέμε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$ καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ (ισοδύναμα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$) αν και μόνο αν: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ τ.ω.

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$$

(Ισοδύναμα: $(\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)\backslash\{\mathbf{x}_0\}) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\epsilon(\mathbf{b})$)

Παρατήρηση: Από τον ορισμό ορίου είναι δυνατόν να έχουμε $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$ καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{f}$ να μην ορίζεται στο σημείο $\mathbf{x}_0$ (δηλαδή $\mathbf{x}_0 \notin A$).

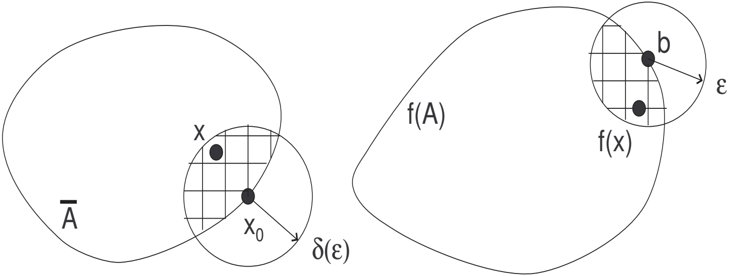
Ορισμός (συνέχειας): Έστω $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x}_0 \in A$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ τ.ω.

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$$

(Ισοδύναμα: αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$).

Όριο συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$

Όριο συνάρτησης, $\mathbf{x}_0 \in \partial A$: Για κάθε $\epsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τ.ω. αν το $\mathbf{x}$ βρίσκεται εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής (αριστερά) $A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \backslash \{\mathbf{x}_0\}$), το $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ βρίσκεται εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής (δεξιά) $B_\epsilon(\mathbf{b})$.



Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ όπου $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1, x_2) \to (2, 0)$ καθώς $(x_1, x_2) \to (1, 1)$, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$:

$$0 < \|(x_1, x_2) - (1, 1)\| < \delta \Rightarrow \|(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - (2, 0)\| < \epsilon$$

Έχουμε: $\|(x_1, x_2) - (1, 1)\| = [(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2]^{1/2}$. Επίσης

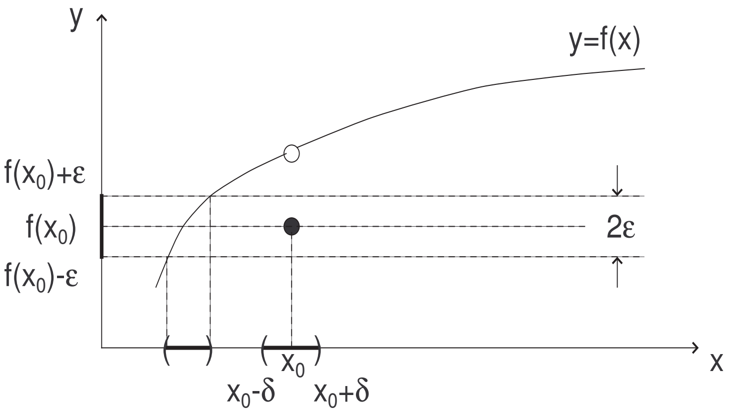
$$\begin{aligned}
&\|(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - (2, 0)\| = \|(x_1 + x_2 - 2, x_1 - x_2)\| \\
&= \{[(x_1 - 1) + (x_2 - 1)]^2 + [(x_1 - 1) - (x_2 - 1)]^2\}^{1/2} \\
&= \{(x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)^2 \\
&\quad + (x_1 - 1)^2 - 2(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)^2\}^{1/2} \\
&= [2(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 1)^2]^{1/2} = \sqrt{2}\|(x_1, x_2) - (1, 1)\|
\end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ και τότε:

$$0 < \|(x_1, x_2) - (1, 1)\| < \delta \Rightarrow \|(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - (2, 0)\| < \sqrt{2}\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = \epsilon$$

και επομένως $f(x_1, x_2) \to (2, 0)$. $\square$

Παράδειγμα (Ασυνέχειας για $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)



Αν επιλέξουμε το ϵ αρκετά μικρό (όπως στο σχήμα) δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο x_0.

Ιδιότητες ορίων συναρτήσεων

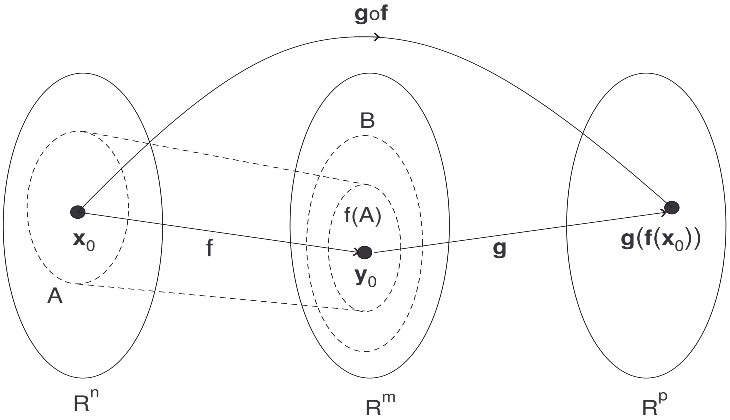
Έστω $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό. Αν $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$, $\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$, τότε:

- (I_1) Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(c\mathbf{f})(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.
- (I_2) Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.
- (I_3) Αν $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$.
- (I_4) Αν $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$ και $f(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(\frac{1}{f}\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{b}$. (Εδώ $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{f(\mathbf{x})}$).
- (I_5) Αν $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} := (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ αν και μόνο αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Η τελευταία ιδιότητα (I_6) αφορά την συνέχεια της σύνθεσης συναρτήσεων:

(I_6) Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων - Δ1

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ με A, B ανοικτά. Έστω επίσης ότι $\mathbf{f}(A) \subseteq B$ (ώστε η σύνθεση $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ να ορίζεται στο A). Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$ και η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, τότε η $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.



(I_6) Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων - Δ2

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\exists \delta > 0$ τ.ω.

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) - (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$$

Εφόσον η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{f}(A) \subseteq B$, τότε $\exists \gamma > 0$, τ.ω.

$$(\mathbf{y} \in B \text{ και } \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \gamma) \Rightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon \qquad (*)$$

Αφού η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$, τότε για το συγκεκριμένο γ που επιλέξαμε, $\exists \delta > 0$ τ.ω.

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \gamma$$

Επομένως

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(A) \subseteq B \text{ και} \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \gamma \end{cases}$$

Επιλέγοντας $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ στην (*) έχουμε

$$(\mathbf{x} \in A \text{ και } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\| < \epsilon$$

και επομένως η $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. $\square$

Γραμμικές συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και πίνακες - Δ1

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση είναι γραμμική αν για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

(α) $\mathbf{f}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, και

(β) $\mathbf{f}(\lambda \mathbf{x_1}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{x_1})$.

Παρατηρούμε οτι:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{f}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$$

Έστω ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{f}((1,0,0,\dots,0)) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\
\mathbf{f}(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{f}((0,1,0,\dots,0)) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\
&\vdots \\
\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) &= \mathbf{f}((0,0,0,\dots,1)) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})
\end{aligned}$$

Γραμμικές συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και πίνακες - Δ2

Τότε λόγω γραμμικότητας:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= x_1\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathbf{f}(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_n\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) \\
&= x_1(a_{11}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, \ldots, a_{m2}) + \ldots + x_n(a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right) \\
&:= (y_1, y_2, \ldots y_m) \\
&:= \mathbf{y}
\end{aligned}$$

και γενικά:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (*)$$

Γραμμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και πίνακες - Δ3

Η $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ εκφράζεται ισοδύναμα ως γινόμενο πίνακα με διάνυσμα στήλης:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

η $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ διανύσματα στήλης και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ο πίνακας του μετασχηματισμού $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Οι κανόνες πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα ορίζονται όπως στην εξίσωση (*).

Σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων - Δ1

Έστω $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ γραμμικές συναρτήσεις, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η σύνθεση των δύο συναρτήσεων $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ είναι γραμμική συνάρτηση (άσκηση). Αν $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, τότε

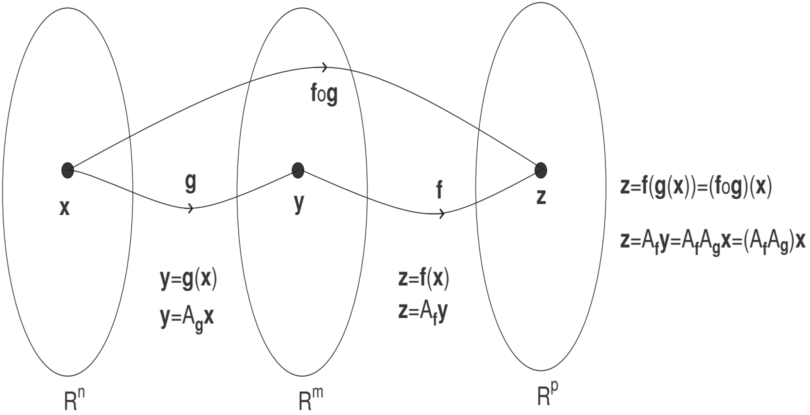
$$\mathbf{z} = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Αντίστοιχα:

$$\mathbf{z} = A_{\mathbf{f}}\mathbf{y} = A_{\mathbf{f}}(A_{\mathbf{g}}\mathbf{x}) = (A_{\mathbf{f}}A_{\mathbf{g}})\mathbf{x} = A_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}\mathbf{x}$$

και επομένως $A_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}} = A_{\mathbf{f}}A_{\mathbf{g}}$, όπου $A_{\mathbf{f}}$, $A_{\mathbf{g}}$ και $A_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}$ οι πίνακες των συναρτήσεων $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ και $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $A_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}} = A_{\mathbf{f}}A_{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A_{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ και $A_{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων - Δ2



Γραμμικές συναρτήσεις - Παραδείγματα

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση προβολής στον $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{\Pi}(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Η συνάρτηση είναι γραμμική με πίνακα

$$A_{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι η $\mathbf{\Pi}$ αντιστρέψιμη; (γιατί όχι;)

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = \mathbf{\Sigma}_\theta \mathbf{x}$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{y}$ προκύπτει απο τη αριστερόστροφη περιστροφή του $\mathbf{x}$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ (χωρίς να αλλάζει η νόρμα του $\mathbf{x}$). Δείξτε ότι η συνάρτηση είναι γραμμική με πίνακα:

$$A_{\mathbf{\Sigma}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε επίσης τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης $\mathbf{\Sigma}_\theta^{-1}$ και τον πίνακα της $\mathbf{\Sigma}_\theta \circ \mathbf{\Sigma}_\phi$ (χωρίς πράξεις!).

Η αρχή της μεταφοράς - Δ1

Το επόμενο Θεώρημα συνδέει όρια ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ με όρια συναρτήσεων:

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, και $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \qquad (*)$$

αν και μόνο αν:

$$((\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbf{x}_n \in A \backslash \{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b} \qquad (**)$$

Απόδειξη: Έστω ότι η (*) ισχύει και έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο $A \backslash \{\mathbf{x}_0\}$. Έστω $\epsilon > 0$ αυθαίρετο. Τότε:

$$\exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } (\mathbf{x} \in A \text{ και } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$$

Έστω ακολουθία $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_n \in A \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ με $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0)$. Τότε, για το συγκεκριμένο δ που επιλέξαμε, $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω. $0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για κάθε $n > N$. Άρα,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\| < \epsilon \; \forall \; n > N \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{b}$$

καθώς $n \to \infty$.

Η αρχή της μεταφοράς - Δ2

Απόδειξη (συνέχεια): Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\mathbf{x}_n \in A\setminus\{\mathbf{x}_0\}$ τ.ω. $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$ αλλά η σχέση (*) δεν ισχύει. Τότε:

$$\sim [\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω.} (\mathbf{x} \in A \text{ και } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon]$$

Ισοδύναμα:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ τ.ω. } \forall \delta > 0\ (\mathbf{x} \in A \text{ και } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta) \not\Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$$

δηλαδή

$$\exists \epsilon > 0 \text{ τ.ω. } \forall \delta > 0\ \exists \mathbf{x} = \mathbf{x}(\delta) \in A \text{ με } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ αλλά } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \geq \epsilon$$

Για το συγκεκριμένο ϵ στην τελευταία πρόταση, θέτοντας διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\delta = \delta_1 = 1 &\Rightarrow \exists \mathbf{x}_1 \in A\setminus\{\mathbf{x}_0\} \text{ με } 0 < \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < 1 \text{ αλλά } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{b}\| \geq \epsilon \\
\delta = \delta_2 = \frac{1}{2} &\Rightarrow \exists \mathbf{x}_2 \in A\setminus\{\mathbf{x}_0\} \text{ με } 0 < \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| < \frac{1}{2} \text{ αλλά } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{b}\| \geq \epsilon \\
&\vdots
\end{aligned}$$

και γενικά:

Η αρχή της μεταφοράς - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια)

$$\delta = \delta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \mathbf{x}_n \in A \backslash \{\mathbf{x}_0\} \text{ με } 0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \frac{1}{n} \text{ αλλά } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\| \geq \epsilon$$

Έστω $\mathbf{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$ η αντίστοιχη ακολουθία. Τότε κάθε όρος ικανοποιεί: $\mathbf{x}_n \in A \backslash \{\mathbf{x}_0\}$. Επίσης $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ καθώς $n \to \infty$, αλλά $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \nrightarrow \mathbf{b}$ που είναι άτοπο από τη υπόθεση. $\square$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάποιο όριο της μορφής $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ δεν υπάρχει. Για παράδειγμα έστω $f : A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ και έστω ότι $\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, 0) = b_1$, $\lim_{x_2 \to 0} f(0, x_2) = b_2$ με $b_1 \neq b_2$. Από την αρχή της μεταφοράς υπάρχουν δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Επομένως: $\lim_{(a_n,0) \to (0,0)} f(x_1, x_2) = b_1 \neq b_2 = \lim_{(0,b_n) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$, που είναι άτοπο από την αρχή της μεταφοράς. Γενικά, αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, είναι τα όρια της f να είναι ίσα για κάθε διαδρομή $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Παράδειγμα (Ορίων και Συνέχειας) - Δ1

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \left(x^2 y, \frac{y+x^3}{1+x^2}\right)$.
Δείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής.

Λύση: Από την ιδιότητα ορίων (I_5) αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνιστώσα της $\mathbf{f}$ είναι συνεχής. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής. Στην προκειμένη περίπτωση

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 y = x_0^2 y_0$$

και επομένως η $f_1(x, y)$ είναι συνεχής. Εφόσον η συνάρτηση $x \mapsto 1 + x^2$ είναι συνεχής και μή-μηδενική, η $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ είναι συνεχής (Ιδιότητα (I_4)). Επομένως και $f_2(x, y) = \frac{y+x^3}{1+x^2}$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (Ιδιότητα (I_3)).

Παράδειγμα (Ορίων και Συνέχειας) - Δ2

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Για $(x,y) \in A$ έχουμε:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \to 0$$

καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ισοδύναμα από τον (ϵ, δ) ορισμό: Για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \epsilon$. Τότε

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$$

και καταλήγουμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα.

Παράδειγμα (Ορίων και Συνέχειας) - Δ3

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Για $(x,y) \in A$ έχουμε:

$$0 \leq \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(|x|+|y|)}{x^2+y^2} = |x|+|y|$$

που τείνει στο 0 καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Αυστηρότερα, στο τελευταίο βήμα έχουμε: $|x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$
($\Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0$). Για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Τότε:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| \leq |x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2}\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = \epsilon$$

και καταλήγουμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα.

Παράδειγμα (Ορίων και Συνέχειας) - Δ4

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Για $(x,y) \in A$ έχουμε:

$$0 \leq \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{2x^2y}{x^2}\right| = 2|y| \to 0$$

καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ισοδύναμα για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, οπότε:

$$\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 2|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

που συνεπάγεται πάλι το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα (Ορίων και Συνέχειας) - Δ5

Παράδειγμα: Υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

Λύση: Αν το όριο υπήρχε θα ήταν το ίδιο κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής $(x,y) \to (0,0)$.

- Κατά μήκος της ευθείας $y = 0$ (x-άξονας) έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = 1$$

- Κατά μήκος της ευθείας $x = 0$ (y-άξονας) έχουμε

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

Εφόσον τα δύο επιμέρους όρια δεν είναι ίσα, το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Παραγώγιση, Κανόνας Αλυσίδας, Κλίση βαθμωτής συνάρτησης, Μερικές Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης, Θεώρημα Taylor, Τοπικά Ακρότατα

Μερικές παράγωγοι - Δ1

Ορισμός: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου U ανοικτό. Οι μερικές παράγωγοι της f:

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ f_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})$$

ως προς την πρώτη, δεύτερη, ... , n-στη μεταβλητή, είναι οι βαθμωτές συναρτήσεις n μεταβλητών:

$$f_{x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $\mathbf{e}_j$ η j-γραμμή του πίνακα I_n. Το πεδίο ορισμού της f_{x_j} είναι το σύνολο των $\mathbf{x} \in U$ για τα οποία το όριο υπάρχει.

Παρατήρηση: Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in U$. Η $f_{x_1}(\mathbf{x}_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ ως προς την μεταβλητή x_j όταν οι υπόλοιπες $n-1$ μεταβλητές x_i $(i \neq j)$ παραμένουν σταθερές στις τιμές $x_i^{(0)}$, αντίστοιχα.

Μερικές παράγωγοι - Δ2

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών: Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ορίζουμε:

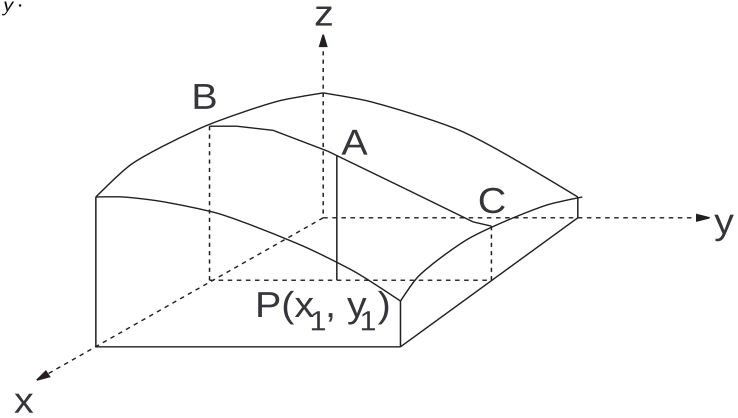
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)}{\delta y}$$

(όταν τα όρια υπάρχουν).

Μερικές παράγωγοι - Δ3

Αν $z = f(x, y)$, ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν η μεταβλητή y παραμένει σταθερή είναι η *μερική παράγωγος* της f ως προς x και συμβολίζεται: $\frac{\partial f}{\partial x}$ η f_x. Παρόμοια και για την $\frac{\partial f}{\partial y}$ η f_y.



Στο διάγραμμα $\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)$ είναι η κλίση της καμπύλης BAC στο σημείο A.

Μερικές παράγωγοι - Δ4

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, όπου

$$f(x, y, z) = e^{2x}(y^2 z + z^3)$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}(y^2 z + z^3) = 2f$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{2x} yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x}(y^2 + 3z^2)$$

Μερικές παράγωγοι - Δ5

Παράδειγμα: Αν $f(x,y) = x^2y + y^3$, τότε $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$

Παράδειγμα: Αν $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, τότε (από τον κανόνα παραγώγου πηλίκου) για $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y(x^2+y^2)^{1/2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{y(x^2+y^2)^{1/2} - x^2y(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

από συμμετρία (η άμεσο υπλογισμό),

Κατά κατεύθυνση παράγωγοι - Δ1

Ορισμός: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου U ανοικτό. Έστω $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Τότε, η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ ορίζεται ως:

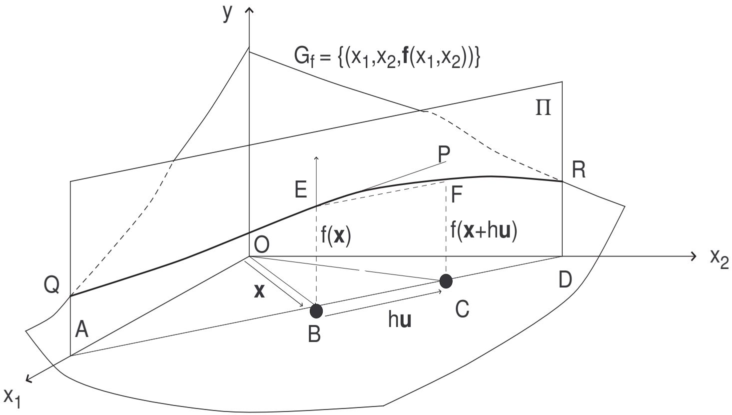
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \frac{d}{dh}\, f(\mathbf{x} + h\mathbf{u})\big|_{h=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

(όταν το όριο υπάρχει).

Παρατήρηση: Συνήθως στον ορισμό επιλέγουμε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$, δηλ. $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Παρατήρηση: Ο ορισμός της μερικής παραγώγου $f_{x_j}(\mathbf{x})$ είναι ειδική περίπτωση της κατά κατεύθυνση παραγώγου $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ με $\mathbf{u} = \mathbf{e}_j$.

Κατά κατεύθυνση παράγωγος: Γεωμετρική Ερμηνεία - Δ2



$\Pi \perp \Pi(x_1, x_2)$ που διέρχεται από την ευθεία AD. G_f το γραφήμα της f.
$\mathbf{x} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{x} + h\mathbf{u} = \overrightarrow{OC}$. Καμπύλη $(QEFR) = G_f \cap \Pi$. $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ είναι η κλίση της εφαπτομένης EP της καμπύλης $QEFR$ στο σημείο E ως προς την ευθεία BC.

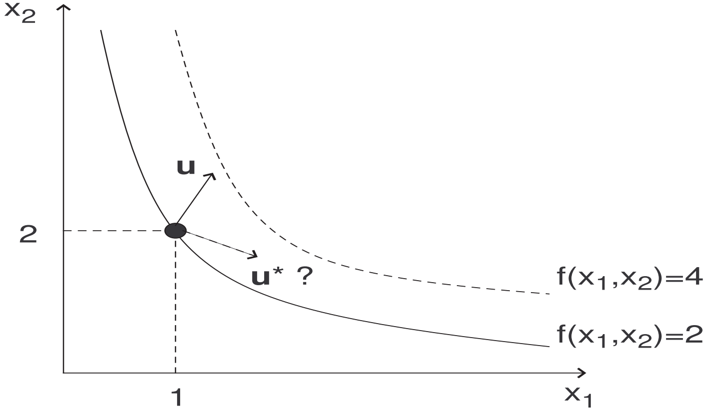
Κατά κατεύθυνση παράγωγος - Δ3

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Να βρεθει η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημεέιο $(x_1, x_2) = (1, 2)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Λύση: Έχουμε:

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,2) + h(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})) - f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + \frac{3h}{5}, 2 + \frac{4h}{5}) - f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 + \frac{3h}{5})(2 + \frac{4h}{5}) - 2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2 + \frac{10h}{5} + \frac{12h^2}{25} - 2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{12h}{25}\right) = 2
\end{aligned}$$

Κατά κατεύθυνση παράγωγος - Δ4



$$\mathbf{x} = (1, 2),\ \mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = 2,$$

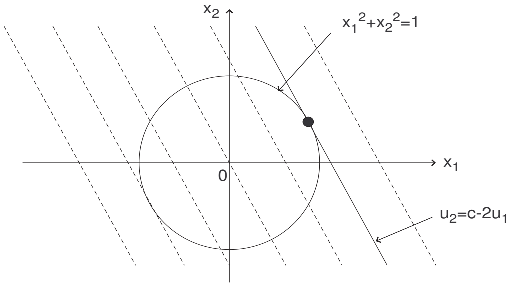
Κατά κατεύθυνση παράγωγος - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Ποιά είναι η κατεύθυνση $\mathbf{u}^*$ με $\|\mathbf{u}^*\| = 1$ κατά την οποία $D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x})$ μεγιστοποιείται;

Λύση: Έστω $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ με $(u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 = 1$. Τότε

$$D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + hu_1^*)(2 + hu_2^*) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2u_1^* + u_2^*)h + u_1^* u_2^* h^2}{h} = 2u_1^* + u_2^*$$

Άρα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $g(u_1, u_2) = 2u_1 + u_2$ υπό τον περιορισμό: $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Το πρόβλημα λύνεται γεωμετρικά (στην συνέχεια και με την μέθοδο Lagrange):



Κατά κατεύθυνση παράγωγος - Δ6

Το σχήμα δείχνει την οικογένεια καμπυλών στάθμης της γραμμικής συνάρτησης $2u_1 + u_2 = c$ και τον μοναδιαίο κύκλο $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (περιορισμός). Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στην εφαπτόμενη στο πρώτο τεταρτημόριο. Με αντικατάσταση:

$$u_1^2 + (c - 2u_1)^2 = 1 \Rightarrow 5u_1^2 - 4cu_1 + c^2 - 1 = 0$$

Έχουμε διπλή ρίζα όταν η διακρίνουσα μηδενίζεται, δηλ.

$$\Delta = 16c^2 - 20(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4c^2 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

(Η αρνητική λύση $-\sqrt{5}$ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή). Για $c = \sqrt{5}$

$5u_1^2 - 4cu_1 + 4 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5}u_1 - 2)^2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_1^* = 2/\sqrt{5} \Rightarrow u_2 = u_2^* = 1/\sqrt{5}$

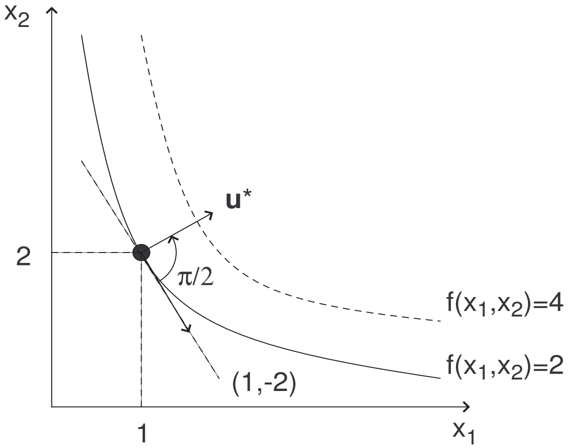
και άρα $\mathbf{u}^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

Παρατήρηση: Η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη στάθμης $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = 2$ στο σημείο $(1, 2)$ είναι

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_1=1} = -2x_1^{-2}|_{x_1=1} = -2$$

και άρα το διάνυσμα $(1, -2)$ είναι παράλληλο με την εφαπτομένη. Επίσης $\langle (1, -2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) \rangle = 0$ και επομένως το διάνυσμα $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ είναι κάθετο στο σημείο $(1, 2)$. Στην συνέχεια θα ορίσουμε $\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})$ (η κλίση της f).

Κατά κατεύθυνση παράγωγος - Δ7



Παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ1

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Όπως γνωρίζουμε, η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αν

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} := f'(x_0)$$

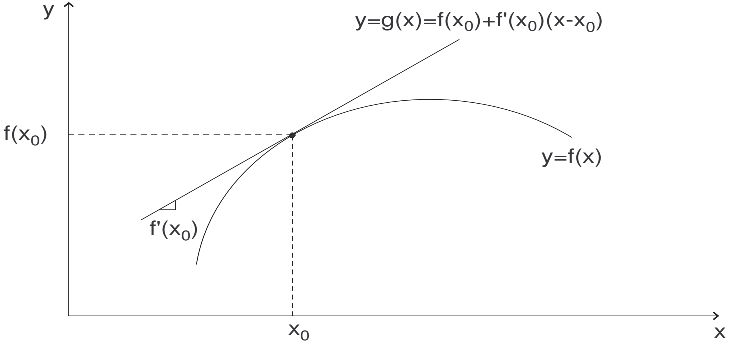
δηλ. το όριο είναι καλά ορισμένο και ορίζει την παράγωγο στο x_0.
Θέτοντας $x = x_0 + \delta x$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Γεωμετρικά, θέτοντας $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, η ευθεία που είναι το γράφημα της g είναι ¨κοντά' στο γράφημα της f στο σημείο $x = x_0$, υπό την έννοια ότι $f(x_0) = g(x_0)$ και ότι η διαφορά $f(x) - g(x) \to 0$ καθώς $x \to x_0$, ακόμα και όταν διαιρείται με την ποσότητα $x - x_0$ (που επίσης τείνει στο 0 καθώς $x \to x_0$).

Ισοδύναμα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση (άθροισμα γραμμικής και σταθερής συνάρτησης) $g(x)$ με $g(x_0) = f(x_0)$, τ.ω. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$.

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ2



Παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - Δ1

(Προσωρινός) Ορισμός Παραγωγισιμότητας: Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ αν οι μερικές παράγωγοι $f_i(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχουν και

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

Εδώ $T = D\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, και

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Αν $m = 1$ ο πίνακας T είναι διάνυσμα γραμμής:

$$T = Df(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

και συμβολίζεται και ως $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ (κλίση της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$).

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - Δ2

Παρατήρηση: Ο ορισμός απλοποιείται υπό την έννοια ότι η ύπαρξη του ορίου για κάποιον γραμμικό τελεστή/πίνακα T εγγυάται τόσο την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, όσο και την μορφή του πίνακα T.

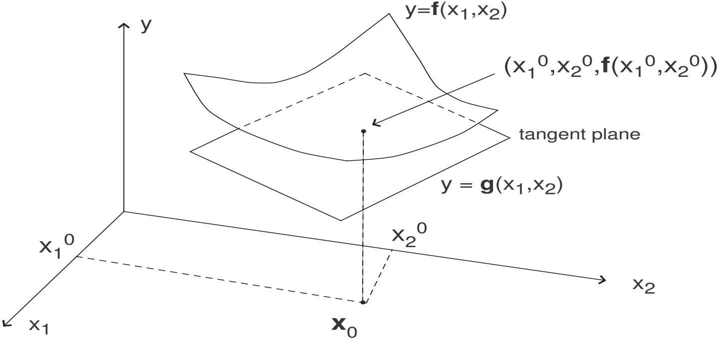
Ορισμός Παραγωγισιμότητας: Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ αν υπάρχει γραμμικός τελεστής (πίνακας) T τέτοιος ώστε:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ υπάρχουν και $T = D\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, όπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου $(n = 2, m = 1)$ - Δ1



Ο ορισμός λέει ότι η f είναι ¨λεία' στο $\mathbf{x}_0$ ώστε να ορίζεται εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου ($n = 2$, $m = 1$) - Δ2

- Στον $\mathbb{R}^3$ ένα μή-κατακόρυφο επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής $y = ax_1 + bx_2 + c$.
- Για να εφάπτεται το επίπεδο στο γράφημα της f πρέπει οι κλίσεις κατά την διεύθυνση των αξόνων x_1 και x_2 στο σημείο $\mathbf{x}_0$ να είναι ίσες με $a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)$ και $b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)$.
- Επίσης, στο σημείο που οι δύο επιφάνειες εφάπτονται:

$$f(\mathbf{x}_0) = y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)x_2 + c$$

Επομένως

$$c = f(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1^0 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)x_2^0$$

και

$$y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)x_2 + f(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1^0 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)x_2^0$$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου ($n = 2$, $m = 1$) - Δ3

Επομένως

$$y = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)(x_2 - x_2^0)$$

Σε μορφή εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 & x_2 - x_2^0 & y - f(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

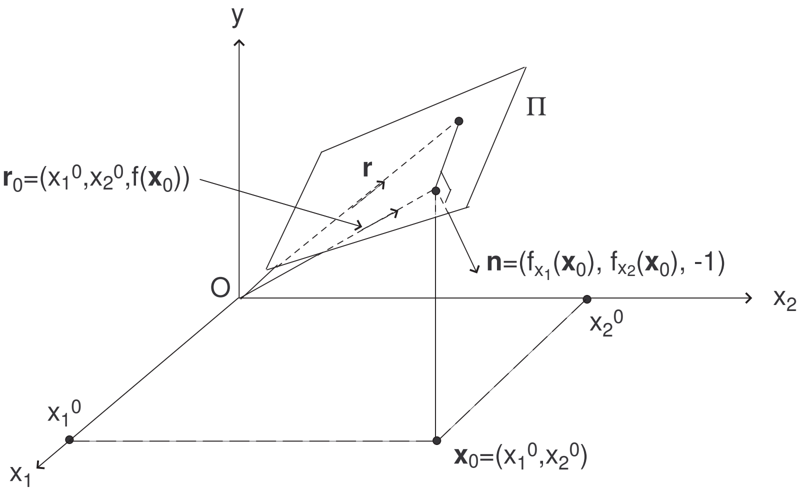
Ισοδύναμα:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle$$

όπου

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, y), \;\; \mathbf{r}_0 = (x_1^0, x_2^0, f(\mathbf{x}_0)) \;\; \text{και} \;\; \mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), -1 \right)$$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου ($n = 2$, $m = 1$) - Δ4



Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου ($n = 2$, $m = 1$) - Δ5

Παρατήρηση: Θέτοντας $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ στον ορισμό της παραγωγισιμότητας έχουμε:

(1) Η $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι αφφινική συνάρτηση με $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(2) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0$.

(3) Από προηγούμενη παρατήρηση (απλούστευση ορισμού) η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in U$ αν και μόνο αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση $\mathbf{g}$ που ικανοποιεί την σχέσεις (1) και (2).

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τον πίνακα μερικών παραγώγων $D\mathbf{f}(y, y)$ των συναρτήσεων:

$$\mathbf{f}_1(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + y \\ y^2 x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + cosy \\ ye^x \end{bmatrix}$$

Λύση: Έχουμε:

$$D\mathbf{f}_1(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad D\mathbf{f}_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}$$

Παραγωγισιμότητα: Ισοδυναμία Ορισμών - Δ1

Τα επόμενα δύο Θεωρήματα δείχνουν ότι στον ορισμό της παραγωγισιμότητας η ύπαρξη μερικών παραγώγων και η συγκεκριμένη μορφή του πίνακα $T = D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ προκύπτουν από την ύπαρξη του ορίου (και άρα μπορούμε να τα παραλείψουμε στον ορισμό).

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in U$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε, αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ υπάρχουν (άρα και οι μερικές παράγωγοι). Επιπλέον $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό (χωρίς την υπόθεση ύπαρξης μερικών παραγώγων και την μορφή του πίνακα $T = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$) αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

Παίρνοντας το όριο $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ κατά μήκος της ευθείας $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - hT\mathbf{u}\|}{\|h\mathbf{u}\|} = \lim_{h\to 0} \left\| \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{h} - T\mathbf{u} \right\| = 0$$

και επομένως $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = T\mathbf{u}$. □

Παραγωγισιμότητα: Ισοδυναμία Ορισμών - Δ2

Θεώρημα: Αν η υπόθεση του προηγούμενου Θεωρήματος ισχύει, τότε:

$$T = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

όπου $T_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{e}_j$, όπου $\mathbf{e}_j$ η j στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_n. Τότε,

$$D_{\mathbf{e}_j}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \end{bmatrix} = T\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \\ \vdots \\ T_{mj} \end{bmatrix}$$

και επομένως $T_{ij} = [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια - Δ1

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό και $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε είναι και συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Απόδειξη: Από την ορισμό της παραγωγισιμότητας υπάρχει αφφινική συνάρτηση $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ τ.ω.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\| &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \right) \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\
&= 0 \cdot 0 = 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Εφόσον η $\mathbf{g}$ είναι αφφινική συνάρτηση είναι και συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ (άσκηση!) και επομένως:

Παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια - Δ2

Απόδειξη (συνέχεια):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| &= \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x})\|+\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\| \\ &\to 0+0=0\end{aligned}$$

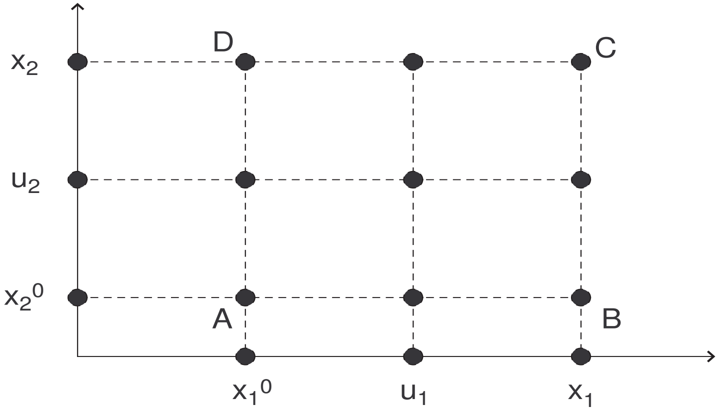
καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ (το πρώτο όριο λόγω της (*) και το δεύτερο λόγω συνέχειας της $\mathbf{g}$ στο $\mathbf{x}_0$). $\square$

Για την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα από την Ανάλυση Ι:

Λήμμα: Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Συνθήκη παραγωγισιμότητας - Δ1

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ της $\mathbf{f}$ υπάρχουν όλες και είναι συνεχείς στο σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$, τότε η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.



Συνθήκη παραγωγισιμότητας - Δ2

Απόδειξη: (για $n = 2$, $m = 1$ μόνο - την γενική περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια αλλά χρειαζόμαστε πολύπλοκο συμβολισμό). Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Γράφουμε:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = (f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)) + (f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0))$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής στο $\mathbb{R}$:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2)(x_1 - x_1^0)$$

όπου u_1 σημείο μεταξύ των x_1^0 και x_1. Παρόμοια:

$$f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2)(x_2 - x_2^0)$$

Επομένως:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2)(x_2 - x_2^0)$$

Συνθήκη παραγωγισιμότητας - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια): Επίσης:

$$|u_1 - x_1^0| < |x_1 - x_1^0| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \Rightarrow u_1 \to x_1^0 \text{ καθώς } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

Επομένως:

$$(u_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0) \text{ και } (x_1^0, u_2) \to (x_1^0, x_2^0) \text{ καθώς } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

Εφόσον $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \;\text{ και }\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)$$

καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι

$$\frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \to 0 \;\text{ καθώς } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

όπου

$$T = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Συνθήκη παραγωγισιμότητας - Δ4

Απόδειξη (συνέχεια): Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$
\begin{aligned}
&\left| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)(x_2 - x_2^0) \right| \\
&= \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \right)(x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \right)(x_2 - x_2^0) \right| \\
&\leq E \left[(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \right]^{1/2} = E \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|
\end{aligned}
$$

όπου

$$
E = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right)^2 \right\}^{1/2}
$$

Επομένως

$$
\frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \leq E \to 0
$$

καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ και επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. $\square$

Ιδιότητες Παραγώγου - Δ1

Θεώρημα (Αθροίσματα, γινόμενα, πηλίκα):

(i) Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και έστω $c \in \mathbb{R}$. Τότε η $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (c\mathbf{f})(\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = c \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ $(D\mathbf{h}, D\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{m \times n})$.

(ii) Έστω $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ $(D\mathbf{h}, D\mathbf{f}, D\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m \times n})$.

(iii) Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$ και έστω $h : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = (f \cdot g)(\mathbf{x})$. Τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$Dh(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)Df(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)Dg(\mathbf{x}_0)$$

$(Df, Dg, Dh \in \mathbb{R}^{1 \times n})$.

(iv) Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στο (iii), έστω $h(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ και έστω ότι $g(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$D(h)(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)Df(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)Dg(\mathbf{x}_0)}{g^2(\mathbf{x}_0)}$$

$(Df, Dg, Dh \in \mathbb{R}^{1 \times n})$.

Ιδιότητες Παραγώγου - Δ2

Απόδειξη (ιδιότητα (ii) μόνο): Έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [Df(\mathbf{x}_0) + Dg(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \\
&= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \\
&\leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|
\end{aligned}
$$

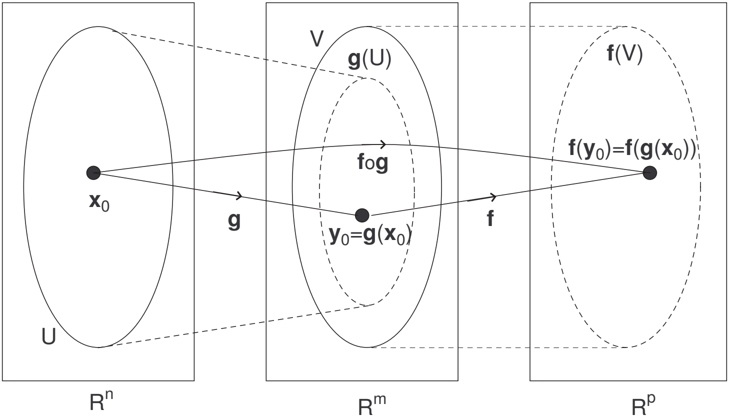
Άρα

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [Df(\mathbf{x}_0) + Dg(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\to 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Οι άλλες ιδιότητες αποδεικνύονται παρόμοια (Άσκηση!). $\square$

Κανόνας Αλυσίδας - Δ1

Θεώρημα: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{f} : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ συναρτήσεις με $\mathbf{g}(U) \subseteq V$. Τότε, αν η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, η $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$.



Κανόνας Αλυσίδας - Δ2

Απόδειξη: Έστω $A = D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, $B = D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ και

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_0) - B\mathbf{k}$$

για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία οι συναρτήσεις $= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ και $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k})$, αντίστοιχα, ορίζονται. Τότε:

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{h})\| = \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \;\text{ και }\; \|\mathbf{v}(\mathbf{k})\| = \eta(\mathbf{k})\|\mathbf{k}\|$$

όπου $\epsilon(\mathbf{h}) \to 0$ και $\eta(\mathbf{k}) \to 0$, καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ και $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$, αντίστοιχα. Δοθέντος $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ επιλέγουμε $\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\| &= \|A\mathbf{h} + \mathbf{u}(\mathbf{h})\| \leq \|A\mathbf{h}\| + \|\mathbf{u}(\mathbf{h})\| \\ &\leq \|A\| \; \|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{u}(\mathbf{h})\| \leq \|A\| \; \|\mathbf{h}\| + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h})\| \\ &= (\|A\| + \epsilon(\mathbf{h}))\|\mathbf{h})\| \qquad (*) \end{aligned}$$

Επίσης, αν $\mathbf{F} := \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$:

Κανόνας Αλυσίδας - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &:= \mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) - BA\mathbf{h}\\ &= \mathbf{f}(\mathbf{k}+\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_0) - BA\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{k}+\mathbf{y}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_0) - BA\mathbf{h}\\ &= B\mathbf{k} + \mathbf{v}(\mathbf{k}) - BA\mathbf{h} = B(\mathbf{k} - A\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k})\\ &= B[\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h}] + \mathbf{v}(\mathbf{k}) = B\mathbf{u}(\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|B\mathbf{u}(\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{h}\|}\\ &\leq \|B\| \cdot \frac{\|\mathbf{u}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|\mathbf{v}(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{h}\|}\\ &= \|B\|\epsilon(\mathbf{h}) + \frac{\|\mathbf{v}(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{k}\|}\frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\\ &\leq^{(*)} \|B\|\epsilon(\mathbf{h}) + \eta(\mathbf{k})(\|A\| + \epsilon(\mathbf{h}))\end{aligned}$$

Στο όριο $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, $\epsilon(\mathbf{h}) \to 0$ και $\eta(\mathbf{k}) \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ και επομένως η $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = BA = D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. $\square$.

Κανόνας Αλυσίδας - Δ4

Παρατήρηση: Οι διαστάσεις των πινάκων στον κανόνα της αλυσίδας είναι:

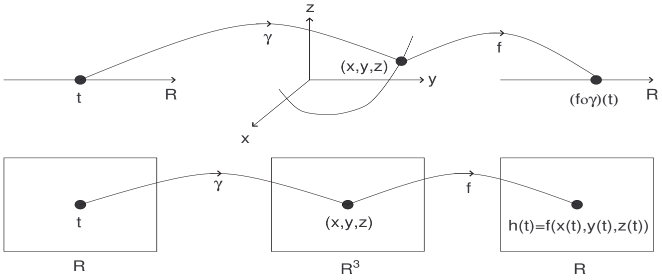
(i) $D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

(ii) Τα διανύσματα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ είναι διανύσματα στήλης.

(iii) Τα γινόμενα $D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, BA, $A\mathbf{h}$, $B\mathbf{k}$ ορίζονται σύμφωνα με τους συνηθισμένους κανόνες πολλαπλασιασμού πίνακα-πίνακα, η πίνακα-διανύσματος.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση $\mathbf{f} : A \to B$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\mathbf{x} \in A$, τότε λέμε ότι είναι κλάσης $\mathcal{C}^0$. Αν η $\mathbf{f} : A \to B$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\mathbf{x} \in A$, τότε λέμε ότι είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ (συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη).

Κανόνας Αλυσίδας: Ειδική περίπτωση 1 - Δ5

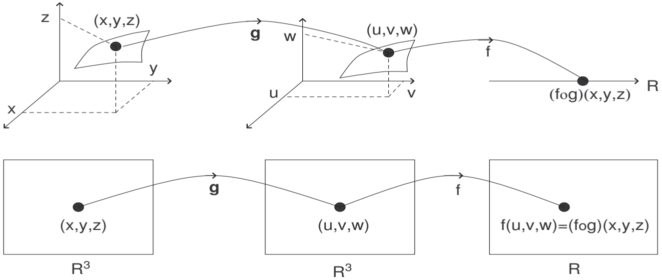


Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, παραγωγίσιμη διαδρομή και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Έστω $h(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$. Τότε

$$h'(t) = \frac{dh(t)}{dt} = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Κανόνας Αλυσίδας: Ειδική περίπτωση 2 - Δ6



Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{g}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$.
Ορίζουμε: $h(x, y, z) = (f \circ \mathbf{g}) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$. Τότε,

$$Dh(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = Df(u, v, w)D\mathbf{g}(x, y, z)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Κανόνας Αλυσίδας: Παραδειγματα - Δ1

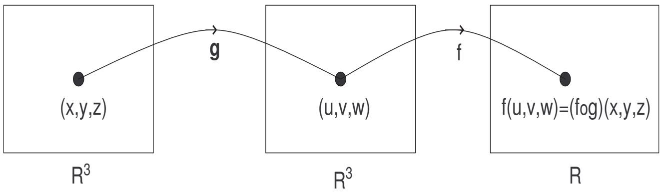
Παράδειγμα: Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας αν
$f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$, $u(x,y,z) = x^2 y$, $v(x,y,z) = y^2$, $w(x,y,z) = e^{-xz}$
και $\mathbf{g}(x,y,z) = (u,v,w)$.

Λύση: Έχουμε:

$$\begin{aligned} h(x,y,x) &= (f \circ \mathbf{g})(x,y,z) = f(u(x,y,x), v(x,y,z), w(x,y,z)) \\ &= (x^2 y)^2 + (y^2)^2 - e^{-xz} = x^4 y^2 + y^4 - e^{-xz} \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας απευθείας:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3 y^2 + z e^{-xz}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2x^4 y + 4y^3, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = x e^{-xz}$$



Κανόνας Αλυσίδας: Παραδείγματα - Δ2

Παράδειγμα (συνέχεια): Από την κανόνα της αλυσίδας:
$Dh(x,y,z) = Df(u,v,w)D\mathbf{g}(x,y,x)$, η

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = (2u)(2xy) + (2v)(0) + (-1)(-ze^{-xz}) \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz} = 4x^3y^2 + ze^{-xz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = (2u)(x^2) + (2v)(2y) + (-1)(0) \\ &= (2x^2y)(x^2) + (2y^2)(2y) = 2x^4y + 4y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = (2u)(0) + (2v)(0) + (-1)(-xe^{-xz}) \\ &= xe^{-xz} \end{aligned}$$

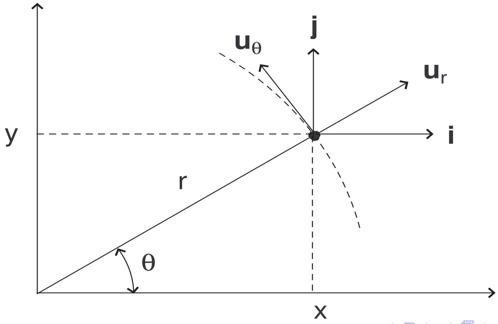
Κανόνας Αλυσίδας: Παραδείγματα - Δ3

Παράδειγμα (Μερικές παράγωγοι συνάρτησης ως προς πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y)$ και έστω ότι γνωρίζουμε τις $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ (ρυθμός μεταβολής στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα). Ορίζουμε πολικές συντεταγμένες $x = u(r, \theta)$: $x = r\cos\theta$ και $y = v(r, \theta) = r\sin\theta$. Έστω $z = f(u(r, \theta), v(r, \theta)) = f(x, y)$:

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g=(u,v)} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της $z = f(u(r, \theta), v(r, \theta))$ στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση $\mathbf{u}_r$ και $\mathbf{u}_\theta$ ($\|\mathbf{u}_r\| = \|\mathbf{u}_\theta\| = 1$;



Κανόνας Αλυσίδας: Παραδείγματα - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια):

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$D(f \circ \mathbf{g})(r,\theta) = Df(x,y)D\mathbf{g}(r,\theta)$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} & -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Κανόνας Αλυσίδας: Παραδείγματα - Δ5

Παράδειγμα: Δεδομένων των $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, υπολογίστε την παράγωγο της $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ στο σημείο $(x,y) = (1,1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Λύση: Έχουμε:

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} (u,v) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}} (f_1, f_2, f_3) = (u+v, u, v^2) \in \mathbb{R}^3$$

Η παράγωγος της $\mathbf{h}$ είναι $D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{f}(u,v)D\mathbf{g}(x,y)$. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u,v)=(2,1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)}$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}_{(u,v)=(2,1)} \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ο κανόνας της αλυσσίδας: Μία ειδική περίπτωση ...

Αν $z = z(u, v)$ και u, v είναι συναρτήσεις αποκλειστικά της μεταβλητής x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

που αντιστοιχεί στον γνωστό κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Αν $z = uv$ όπου $u = u(x)$ και $v = v(y)$:

$$\begin{aligned}\frac{d(uv)}{dx} &= \frac{\partial(uv)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial(uv)}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

που είναι ο γνωστός κανόνας παραγώγισης γινομένου.

Κλίση (Gradient) - Δ1

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η παράγωγος κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ είναι:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{u} = \langle \boldsymbol{\nabla}^T f, \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) u_n$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας: Αν $\gamma(h) = \mathbf{x} + h\mathbf{u}$, $h \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) = f(\gamma(h))$ και

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dh} f(\mathbf{x} + h\mathbf{u})\big|_{h=0} = \frac{d}{dh} f(\gamma(h))\big|_{h=0} = \boldsymbol{\nabla} f(\gamma(h))\gamma'(h)\Big|_{h=0} \\ &= \boldsymbol{\nabla} f(\gamma(0))\gamma'(0) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \langle \boldsymbol{\nabla}^T f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

όπου

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

και $(\cdot)^T$ ο ανάστροφος πίνακα.

Κλίση (Gradient) - Δ2

Θεώρημα: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x} \in U$. Έστω επίσης ότι $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{u}^* = \frac{\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\|}$. Τότε,

$$D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x}) = \max\{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{u}\| = 1\} = \|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\|$$

Απόδειξη: Αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\| = 1$:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\nabla}^T f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle = \|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos\theta = \|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\| \cdot \cos\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})$ και u. Επομένως η $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ μεγιστοποιείται όταν $\theta = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})$ είναι παράλληλα. Επομένως η κατά κατεύθυνση παράγωγος $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ μεγιστοποιείται όταν $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* = \frac{\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\|}$ και τότε:

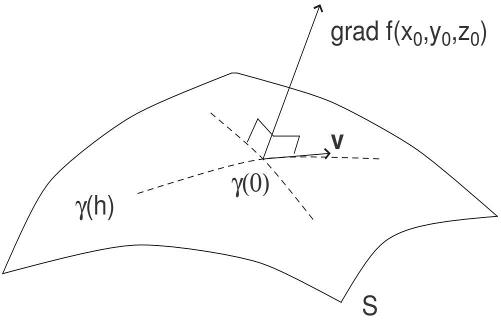
$$\max\{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{u}\| = 1\} = \|\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})\|$$

□

Παρατήρηση: Το Θεώρημα λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της f είναι μέγιστος κατά την διεύθυνση του διανύσματος κλίσης $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})$.

Κλίση (Gradient) - Δ3

Θεώρημα: Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^1$ (συνεχής και συνεχώς διαφορίσιμη) και έστω ότι το σημείο (x_0, y_0, z_0) ανήκει στην επιφάνεια στάθμης $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$, όπου $c \in \mathbb{R}$ (σταθερά). Τότε το διάνυσμα $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S υπό την έννοια ότι αν $\mathbf{v}$ εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία διαφορίσιμη διαδρομή $\gamma(h)$ της S στο σημείο $h = 0$ με $\boldsymbol{\gamma}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, τότε $\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \mathbf{v} \rangle = 0$.



Κλίση (Gradient) - Δ4

Παρατήρηση: Εφόσον $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \gamma'(0)$ για κάθε παραγωγίσιμη διαδρομή $\gamma(h) \in S$, τότε το διάνυσμα $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Απόδειξη: Έστω $\gamma(h) \in S$. Τότε $f(\gamma(h)) = c$. Έστω $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ όπως στην υπόθεση του Θεωρήματος. Τότε:

$$0 = D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla f(\gamma(0)), \mathbf{v} \rangle$$

και επομένως $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \mathbf{v}$. □

Παράδειγμα: Υπολογίστε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση: $3xy + z^2 = 4$ στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Λύση: Έστω $f(x, y, z) = 3xy + z^2$. Τοτε $\nabla(f)(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$ και $\nabla(f)(1, 1, 1(= (3, 3, 2)$. Εφόσον η επιφάνεια $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 4$ είναι επιφάνεια στάθμης της f, το εφαπτομένο επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\langle \nabla f(1, 1, 1), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (3, 3, 2), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0$$

η $3x + 3y - 2z = 8 = 0$.

Κλίση (Gradient) - Δ5

Παρατήρηση: Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και θεωρήσουμε καμπύλη στάθμης $C = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$, τότε $\nabla(x,y) \perp C$ σε κάθε σημείο $(x,y) \in C$. Αν $\nabla(x,y) \neq \mathbf{0}$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία της C στο σημείο $(x_0, y_0) \in C$ είναι $\langle \nabla f(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$.

Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο): Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ και C καμπύλη στάθμης της f, $C = \{(x,y) : f(x,y) = 2\}$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{u}^*$, $\|\mathbf{u}^*\| = 1$, ώστε η παράγωγος $D_{\mathbf{u}^*} f(x,y)$ να μεγιστοποιείται στο σημείο $(1,2) \in C$.

Λύση: Από προηγούμενη ανάλυση

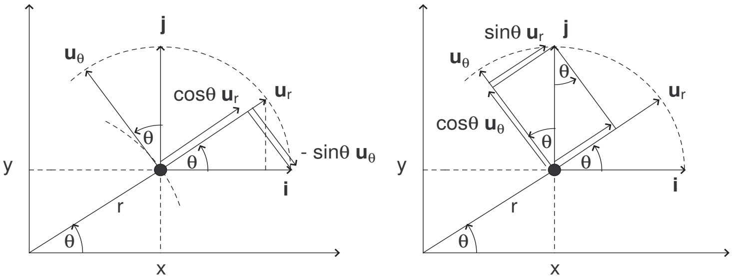
$$\mathbf{u}^* = \frac{\nabla(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \left.\frac{(x_2, x_1)}{\|\nabla f(1,2)\|}\right|_{(1,2)} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της τιμής της f σε αυτή την κατεύθυνση είναι $\|\nabla(1,2)\| = \sqrt{5}$. Η ευθεία που εφάπτεται στην C στο σημείο $(1,2)$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\nabla f(1,2)$ από προηγούμενο υπολογισμό.

Κλίση (Gradient) - Δ6

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρεθεί η κλίση της $\boldsymbol{\nabla} f$ σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση: Σε καρτεσιανές συντεταγμένες: $\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ αναλύονται ως: $\mathbf{i} = \cos\theta \mathbf{u}_r - \sin\theta \mathbf{u}_\theta$ και $\mathbf{j} = \sin\theta \mathbf{u}_r + \cos\theta \mathbf{u}_\theta$.



Κλίση (Gradient) - Δ7

Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta\,\mathbf{u}_r - \sin\theta\,\mathbf{u}_\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta\,\mathbf{u}_r + \cos\theta\,\mathbf{u}_\theta)\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)\mathbf{u}_\theta\end{aligned}$$

Εφόσον $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\\ \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\end{aligned}$$

και άρα

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης - Δ1

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^1$ ώστε οι μερικές παράγωγοι της f να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν οι συναρτήσεις αυτές έχουν με την σειρά τους συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε λέμε ότι η f είναι κλάσης $\mathcal{C}^2$ (δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη). Αντίστοιχα, ορίζουμε συναρτήσεις κλάσης $\mathcal{C}^3, \mathcal{C}^4, \dots, \mathcal{C}^\infty$. Συμβολικά, αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

κλπ. Επεκτείνουμε τον ορισμό κατά τον προφανή τρόπο ορίζοντας διαδοχικά παραγώγους υψηλότερης τάξης, π.χ.:

$$u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης: $u(x, y) = x^3 + 4x^2y^2 + y^4$. Έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 8xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 8x^2y + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 8y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x^2 + 12y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 16xy = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

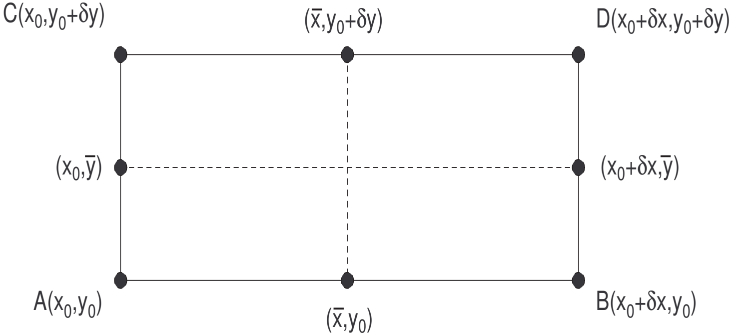
Παρατηρούμε ότι: $u_{xy} = u_{yx}$. Αυτό δεν συμβαίνει τυχαία όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα:

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης - Δ2

Θεώρημα: Αν η $f(x,y)$ είναι κλάσης $\mathcal{C}^2$, τότε $f_{xy} = f_{yx}$.

Απόδειξη: Ορίζουμε (δείτε διάγραμμα)

$$
\begin{aligned}
S(\delta x, \delta y) &= f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \delta y) + f(x_0, y_0) \\
&:= f_A - f_B - f_C + f_D
\end{aligned}
$$



Παράγωγοι υψηλότερης τάξης - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια): Κρατώντας σταθερά τα y_0 και δy ορίζουμε: $g(x) = f(x, y_0 + \delta y) - f(x, y_0)$, οπότε

$$\begin{aligned} g(x_0 + \delta x) - g(x_0) &= f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0 + \delta x, y_0) \\ &\quad - (f(x_0, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)) \\ &= f_A - f_B - f_C + f_D \\ &= S(\delta x, \delta y) \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) υπάρχει $\bar{x}$ μεταξύ των x_0 και $x_0 + \delta x$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0 + \delta x) - g(x_0) = g'(\bar{x})\delta x, \ \ \bar{x} \in (x_0, x_0 + \delta x) \text{ η } \bar{x} \in (x_0 + \delta x, x_0)$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} S(\delta x, \delta y) = g(x_0 + \delta x) - g(x_0) &= \left(f'(\bar{x}, y_0 + \delta y) - f'(\bar{x}, y_0)\right)\delta x \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} - y_0)\right)\delta x \end{aligned}$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης - Δ4

Απόδειξη (συνέχεια): Πάλι από το ΘΜΤ, υπάρχει $\bar{y} \in (y_0, y_0 + \delta y)$ η $\bar{y} \in (y_0 + \delta y, y_0)$, τ.ω.

$$S(\delta x, \delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\delta y \delta x$$

Εφόσον η $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ είναι συνεχής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{S(\delta x, \delta y)}{\delta x \delta y} \qquad (*)$$

Παρόμοια, έστω $h(y) = f(x_0 + \delta x), y) - f(x_0, y)$ με x_0, δx σταθεροποιημένα. Τότε:

$$\begin{aligned} h(y_0 + \delta y) - h(y_0) &= (f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0 + \delta y)) \\ &\quad - (f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) \\ &= f_D - f_C - f_B + f_A = S(\delta x, \delta y) \end{aligned}$$

Από το ΘΜΤ υπάρχει $\bar{y} \in (y_0, y_0 + \delta y)$ η $\bar{y} \in (y_0 + \delta y, y_0)$ τ.ω.

$$h(y_0 + \delta y, y_0) - h(y_0) = h'(\bar{y})\delta y$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης - Δ5

Απόδειξη (συνέχεια): δηλαδή,

$$S(\delta x, \delta y) = h'(\bar{y})\delta y = \left(f'(x_0 + \delta x, \bar{y}) - f'(x_0, \bar{y})\right)\delta y$$

Πάλι από το ΘΜΤ υπάρχει $\bar{x} \in (x_0, x_0 + \delta x)$ η $\bar{x} \in (x_0 + \delta x, x_0)$ τ.ω.

$$S(\delta x, \delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\delta x \delta y$$

Εφόσον η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{S(\delta x, \delta y)}{\delta x \delta y} \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

και επομένως $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ εφόσον το (x_0, y_0) είναι αυθαίρετο. $\square$

Θεώρημα Taylor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ1

Θεώρημα: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^k$. Τότε:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h)$$

όπου το υπόλοιπο του αναπτύγματος:

$$R_k := R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(\tau)d\tau$$

και όπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0$$

Παρατήρηση: Το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{R_k(x_0,h)}{h^k} = 0$ λέει ότι καθώς $h \to 0$, το $|R_k(x_0, h)|$ γίνεται 'μικρό' σε σύγκριση με την ήδη μικρή ποσότητα $|h|^k$.

Παρατήρηση: Καθώς $k \to \infty$ παίρνουμε την δυναμοσειρά Taylor της f.

Θεώρημα Taylor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ2

Απόδειξη: Για απλοποίηση της απόδειξης υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}^{k+1}$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)d\tau = f(x_0) - \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)d(x_0+h-\tau)$$

Θέτοντας $u = f'(\tau)$, $v = x_0 + h - \tau$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη με χρήση της ταυτότητας: $\int_\alpha^\beta udv = uv|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta vdu$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) - \left[f'(\tau)(x_0+h-\tau)\Big|_{\tau=x_0}^{x_0+h} - \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-\tau)f''(\tau)d\tau \right] \\ &= f(x_0) - \left[f'(\tau)\cdot 0 - f'(x_0)h - \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-\tau)f''(\tau)d\tau \right] \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h - \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)d\left(\frac{(x_0+h-\tau)^2}{2} \right) d\tau \end{aligned}$$

Θέτοντας $u = f''(\tau)$, $v = \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2}$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη με χρήση της ταυτότητας $\int_\alpha^\beta udv = uv|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta vdu$, έχουμε:

Θεώρημα Taylor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια):

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h - \left[f''(\tau)\frac{(x_0+h-\tau)^2}{2}\Bigg|_{\tau=x_0}^{x_0+h} \right. \\
&\qquad \left. - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2} f'''(\tau)d\tau \right] \\
&= f(x_0) + f'(x_0)h - \left[f''(x_0+h)\cdot 0 - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 \right. \\
&\qquad \left. - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2} f'''(\tau)d\tau \right] \\
&= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + R_2(x_0, h)
\end{aligned}$$

όπου

$$R_2(x_0+h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2!} f^{(3)}(\tau)d\tau$$

Θεώρημα Taylor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Δ4

Απόδειξη (συνέχεια): Επαγωγικά:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h)$$

όπου

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(\tau)d\tau$$

Εφόσον η f^{k+1} είναι συνεχής, είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_0, x_0 + h]$ και έστω ότι $|f^{k+1}(\tau)| \leq M$, $\tau \in [x_0, x_0 + h]$. Τότε

$$|R_k(x_0, h)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{M}{k!} \max_{\tau \in [x_0, x_0+h]} |(x_0 + h - \tau)^k| d\tau \right| = \frac{M}{k!}|h|^{k+1}$$

και επομένως

$$\frac{|R_k(x_0, h)|}{|h|^k} \leq \frac{M}{k!}|h| \to 0$$

καθώς $h \to 0$. □

Θεώρημα Taylor 1ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Θεώρημα (ανάπτυγμα 1ης τάξης): Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό, $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

όπου

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$$

καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Απόδειξη: Άμεση από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας. □

Παρατήρηση: Το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης εναλλακτικά γράφεται ως:

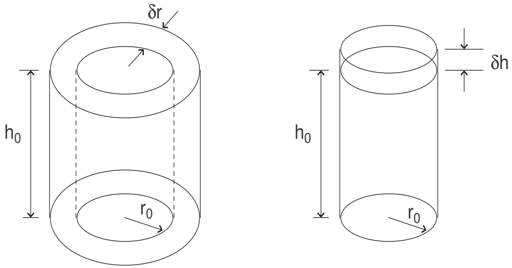
$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) h_i + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

όπου

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \ldots & x_n^0 \end{bmatrix}^T \quad \text{και} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \end{bmatrix}^T$$

Παράδειγμα: Προσέγγιση για μικρές μεταβολές - Δ1

Όγκος κυλίνδρου ακτίνας r και ύψους h είναι: $V(r,h) = \pi r^2 h$. Οι μερικές παράγωγοι της συναρτησης V: $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$ και $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$.



Εστω ότι $r = r_0$, $h = h_0$. Ποιό είναι το αποτέλεσμα μικρών μεταβολών δr και δh στον όγκο του κυλίνδρου;

$$\delta V = \pi(r_0+\delta r)^2(h_0+\delta h) - \pi r_0^2 h_0 = 2\pi r_0 h_0 \delta r + \pi r_0^2 \delta h + 2\pi r_0 (\delta r)(\delta h) + \pi (\delta r)^2 \delta h$$

$$\approx \frac{\partial V}{\partial r}(r_0,h_0)\delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0,h_0)\delta h \text{ για ‘μικρές’ μεταβολές } \delta r \text{ και } \delta h$$

Παράδειγμα: Προσέγγιση για μικρές μεταβολές - Δ2

Από το Θεώρημα Taylor:

$$\delta V = V(r_0+\delta r, h_0+\delta h)-V(r_0, h_0) = \frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0)\delta r+\frac{\partial V}{\partial h}(r_0, h_0)\delta h+R_1(r_0, h_0, \delta r, \delta h)$$

όπου

$$\frac{|R_1(r_0, h_0, \delta r, \delta h)|}{\sqrt{(\delta r)^2+(\delta h)^2}} \to 0$$

καθως $(\delta r\ \delta h) \to (0,0)$. Συμβολικά γράφουμε και την 'διαφορική μορφή':

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$

Γενικά, αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, είναι παραγωγίσιμη γράφουμε:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Θεώρημα Taylor 2ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - Δ1

Θεώρημα (ανάπτυγμα 2ης τάξης): Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Τότε:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T H(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

όπου

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

και

$$H(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ [H(\mathbf{x}_0)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0), \ i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, n$$

(Εσσιανός πίνακας) και όπου:

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0$$

καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. $\square$

Θεώρημα Taylor 2ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - Δ1

Παρατήρηση:

(i) Το ανάπτυγμα γράφεται και ως:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

Το διπλό άθροισμα είναι τετραγωνική μορφή με n^2 όρους (σταθεροποιούμε τον δείκτη i και αθροίζουμε ως προς j, κατόπιν αυξάνουμε το i κατά ένα και αθροίζουμε ως προς j, κλπ).

(ii) Εφόσον από την υπόθεση η f είναι κλάσης $\mathcal{C}^2$, ο πίνακας $H(\mathbf{x}_0)$ είναι συμμετρικός, δηλ.

$$H_{ij} = H_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Θεώρημα Taylor 2ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - Δ2

Απόδειξη: Για απλοποίηση της απόδειξης υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}^3$ (συνεχείς μερικές παράγωγοι 3ης τάξης).

Έστω $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ με $\mathbf{x}_0 \in U$ και $\|h\|$ αρκετά μικρό ώστε $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in U$ για κάθε $t \in [0, 1]$ (εφικτό αφού U ανοικτό). Τότε $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης $\mathcal{C}^3$. Από το Θεώρημα Taylor μίας μεταβλητής ($k = 2$, $x_0 = 0$, $h = 1$):

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2} + R_2, \quad R_2 = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} g^{(3)}(t)dt$$

Η $g(t)$ είναι σύνθεση συναρτήσεων:

$$t \in \mathbb{R} \to \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \to f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = g(t) \in \mathbb{R}$$

Από την κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = Df(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} = Df(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i$$

Θεώρημα Taylor 2ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - Δ3

Απόδειξη (συνέχεια): Δηλαδή,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)h_n$$

Θέτουμε: $g_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε,

$$g_1''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\right] h_1 h_i$$

$$g_2''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\right] h_2 h_i$$

$$\vdots$$

$$g_n''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\right] h_n h_i$$

Επομένως

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\right) h_j h_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j$$

Θεώρημα Taylor 2ης τάξης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - Δ4

Απόδειξη (συνέχεια): Παρόμοια:

$$g'''(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k$$

Επομένως

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!} g'''(t)dt$$

$$= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

όπου

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{(t-1)^2}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k$$

Εφόσον $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε για κάποια σταθερά C: $|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}| \leq C\|\mathbf{h}\|^3$ και επομένως: $\frac{|R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq C\|\mathbf{h}\| \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. $\square$

Παράδειγμα:

Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της $f(x,y) = e^x \cos y$ γύρω από το σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = e^x \cos y & f_x(x,y) = e^x \cos y & f_y(x,y) = -e^x \sin y \\ f_{xx}(x,y) = e^x \cos y & f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y & f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y \end{array}$$

Επομένως:

$$\begin{array}{lll} f(0,0) = 1 & f_x(0,0) = 1 & f_y(0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0) = 1 & f_{yy}(0,0) = -1 & f_{xy}(0,0) = 0 \end{array}$$

και

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) &= f(0,0) + h_1 f_x(0,0) + h_2 f_y(0,0) + \frac{1}{2} h_1^2 f_{xx}(0,0) \\ &+ \frac{1}{2} h_2^2 f_{yy}(0,0) + f_{xy}(0,0) h_1 h_2 + R_2(\mathbf{h}) \\ &= 1 + h_1 + \frac{1}{2} h_1^2 - \frac{1}{2} h_2^2 + R_2(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

όπου $R_2(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$.

Ακρότητα συναρτήσεων - Δ1

Ορισμοί:

(i) Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό. Το σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ λέγεται *τοπικό ελάχιστο (μέγιστο)* της f αν υπάρχει σφαίρα $B_r(\mathbf{x}_0)$, $r > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ $(f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}))$ για κάθε $x \in B_r(\mathbf{x}_0)$.

(ii) Αν $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι *ολικό ελάχιστο*. Αντίστοιχα, αν $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι *ολικό μέγιστο*.

(iii) Το σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ λέγεται *αυστηρά τοπικό ελάχιστο (μέγιστο)* της f αν υπάρχει σφαίρα $B_r(\mathbf{x}_0)$, $r > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ $(f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}))$ για κάθε $x \in B_r(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

(iv) Αν το $\mathbf{x}_0$ τοπικό ελάχιστο η τοπικό μέγιστο, τότε λέγεται *τοπικό ακρότατο*.

(v) Το $\mathbf{x}_0$ λέγεται *κρίσιμο σημείο* αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ η αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

(vi) Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο σημείο και δεν είναι τοπικό ακρότατο, τότε λέγεται *σαγματικό σημείο*.

Ακρότητα συναρτήσεων - Δ2

Θεώρημα (κριτήριο 1ης παραγώγου): Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x_0 \in U$, η $f : U \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in U$ το οποίο είναι τοπικό ακρότατο, τότε $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (δηλαδή το $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο σημείο).

Απόδειξη: Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{x}_0$. (Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη). Τότε για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $g(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ έχει τοπικό μέγιστο στο $t = 0$. Επομένως$^{(*)}$, από την θεωρία συναρτήσεων μίας μεταβλητής $g'(0) = 0$. Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} \Rightarrow g'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = 0$$

για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $\mathbf{h} = \nabla^T f(\mathbf{x}_0)$ έχουμε $g'(0) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2 = 0$ και επομένως $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. $\square$

Παρατήρηση$^{(*)}$ (Υπενθύμιση της απόδειξης ότι $g'(0) = 0$): Εφόσον $g(0)$ τοπικό μέγιστο, $g(t) \leq g(0)$ για αρκούντως μικρό $t > 0$ και άρα $\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t} \leq 0$. Παρόμοια, για $t < 0$ και $|t|$ αρκούντως μικρό, $g(t) \leq g(0)$ και επομένως $\lim_{t \to 0^-} \frac{g(t)-g(0)}{t} \geq 0$. Εφόσον η g είναι διαφορίσιμη στο $t = 0$ τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα και επομένως $g'(0) = 0$.

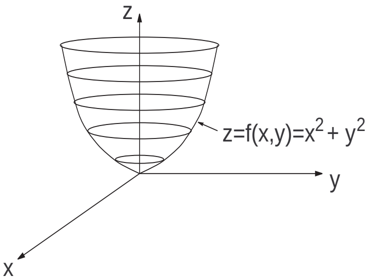
Ακρότητα συναρτήσεων - Δ3

Παράδειγμα: Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$: Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

Επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$.

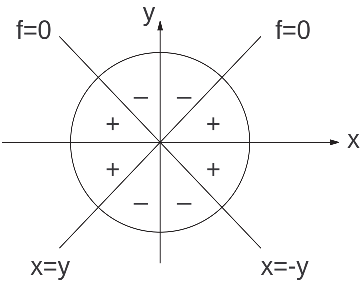
Εφόσον $0 = f(0,0) < f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, το σημείο $(0,0)$ είναι ελάχιστο (και μάλιστα ολικό).



Ακρότητα συναρτήσεων - Δ4

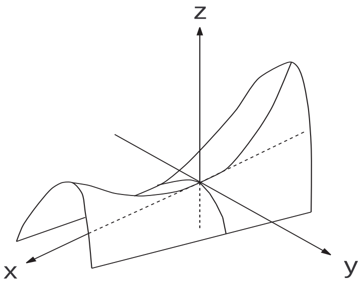
Παράδειγμα: Να ταξινομήσετε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ και επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Εξετάζουμε μια γειτονία αυθαίρετα μικρής ακτίνας με κέντρο το σημείο $(0,0)$ (όπου $f(0,0) = 0$):



Ακρότητα συναρτήσεων - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Εφόσον *σε κάθε* $B_r(\mathbf{0})$ υπάρχουν σημεία (x, y) με $f(x, y) > 0$ και σημεία με $f(x, y) < 0$ το σημείο $(0, 0)$ δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο. Επομένως είναι *σαγματικό* σημείο. Το γράφημα συνάρτησης $f(x, y)$ με σαγματικό σημείο $(0, 0)$:



Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f περιορισμένο στον άξονα των x (δηλ. $y = 0$) έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$, ενώ το πεδίο ορισμού της f περιορισμένο στον άξονα τν y (δηλ. $x = 0$) έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό.

Ακρότητα συναρτήσεων - Δ6

Παράδειγμα: Βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2x$.

Λύση: Κρίσιμα σημεία οι λύσεις του συστήματος: $f_x(x, y) = 2xy + y^2 = 0$, $f_y(x, y) = x^2 + 2xy = 0$. Ισοδύναμα: $y(2x + y) = 0$, $x(x + 2y) = 0$. Το σύστημα έχει λύσεις:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

και

$$x = -2y \Rightarrow y(y - 4y) = 0 \Rightarrow -3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Άρα $(x, y) = (0, 0)$ το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Στην ευθεία $x = y$ έχουμε $f(x, x) = 2x^3$. Επομένως για $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό έχουμε $f(\epsilon, \epsilon) = 2\epsilon^3 > 0$ και $f(-\epsilon, -\epsilon) = -2\epsilon^3 < 0$. Επομένως κάθε γειτονιά του σημείου $(0, 0)$ αυθαίρετα μικρής ακτίνας περιέχει σημεία με θετικό και με αρνητικό πρόσημο. Άρα το $(0, 0)$ δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο. Άρα είναι σαγματικό σημείο.

Θετικά ορισμένοι πίνακες - Δ1

Ορισμός: Ο πίνακας $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος ($H \succ 0$) αν (και μόνο αν) $\mathbf{x}^T H\mathbf{x} > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ο H είναι αρνητικά ορισμένος ($H \prec 0$) αν (και μόνο αν) $-H \succ 0$.

Παρατήρηση: Αν $H \succ 0$, χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = H^T$ (H συμμετρικός). Πράγματι:

$$\mathbf{x}^T H\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\frac{H + H^T}{2}\right)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \left(\frac{H - H^T}{2}\right)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T H_s\mathbf{x} + \mathbf{x}^T H_u\mathbf{x}$$

όπου $H_s = \frac{H+H^T}{2} = H_s^T$ και $H_u = \frac{H-H^T}{2} = -H_u^T$. Ισχύει ότι:

$$\mathbf{x}^T H_u\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T H_u\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T H_u^T\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T H_u\mathbf{x} \Rightarrow 2\mathbf{x}^T H_u\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T H_u\mathbf{x} = 0$$

και επομένως $\mathbf{x}^T H\mathbf{x} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T H_s\mathbf{x} > 0$, οπότε στη συνέχεια θα ορίζουμε τους θετικά-ορισμενους πίνακες ως συμμετρικούς.

Θετικά ορισμένοι πίνακες - Δ2

Λήμμα: Έστω $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε: (i) Ο H έχει πραγματικές ιδιοτιμές. (ii) Δύο ιδιοδιανύσματα του H που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Απόδειξη: (i) Έστω $(\lambda, \mathbf{x})$ ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος του H. Τότε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και συμβολίζοντας $\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^T$,

$$H\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow x^* H\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x} \Rightarrow (x^* H\mathbf{x})^* = (\lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x})^* = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

και επομένως $\mathbf{x}^* H^*\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^* H\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{x}$. Από τις παραπάνω σχέσεις: $(\lambda - \bar{\lambda})\|\mathbf{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω λ_i, λ_j δύο διακριτές ιδιοτιμές του H και $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε $H\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{x}_j^T H\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_j^T\mathbf{x}_i$. Επίσης: $H\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j \Rightarrow \mathbf{x}_i^T H\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j \Rightarrow \mathbf{x}_j^T H^T\mathbf{x}_i = \lambda_j\mathbf{x}_j^T\mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{x}_j^T H\mathbf{x}_i = \lambda_j\mathbf{x}_j^T x_i$.
Επομένως: $(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{x}_j^T\mathbf{x}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_j^T\mathbf{x}_i = 0$. □

Παρατήρηση: Αν υπάρχει ιδιοτιμή με πολλαπλότητα $r > 1$ τότε ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση r και μπορούμε να επιλέξουμε ορθογώνια βάση από r ιδιοδιανύσματα (μοναδιαίας νόρμας). Επομένως, αν $H = H^T$ μπορούμε να επιλέξουμε ορθογώνιο πίνακα ιδιοδιανυσμάτων.

Θετικά ορισμένοι πίνακες - Δ3

Λήμμα: Έστω πίνακας $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $(\lambda, \mathbf{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος. Τότε $H \succ 0$ αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του H είναι θετικές.

Απόδειξη: Έστω πίνακας $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $(\lambda, \mathbf{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος, δηλ. $H\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε:

$$\mathbf{u}^T H \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \lambda \frac{\mathbf{u}^T H \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} > 0$$

Αντίστροφα αν οι ιδιοτιμές του H $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ είναι θετικές και $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$H \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Γράφουμε την παραπάνω εξίσωση ως: $HU = U\Lambda$ όπου $UU^T = U^T U = I_n$. Τότε $HU = U\Lambda \Rightarrow H = U\Lambda U^T \Rightarrow \mathbf{x}^T H \mathbf{x} = \mathbf{x}^T U \Lambda U^T \mathbf{x}$. Θέτοντας $\mathbf{y} = U^T \mathbf{x}$ έχουμε: $\mathbf{x}^T H \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$ για $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και άρα $H = H^T \succ 0$. $\square$

Θετικά ορισμένοι πίνακες - Δ4

Λήμμα: Έστω ότι ο πίνακας $H = H^T \succ 0$ έχει ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. Τότε:

$$\max\{\mathbf{x}^T H\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda_1 \text{ και } \min\{\mathbf{x}^T H\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda_n$$

Απόδειξη: Έστω $H = U\Lambda U^T$ όπου $\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ και $U = U^{-T}$ ο πίνακας των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, αντίστοιχα, όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Τότε, αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, έχουμε

$$\mathbf{x}^T H\mathbf{x} = (U^T\mathbf{x})^T \Lambda (U^T\mathbf{x}) := \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}$$

όπου ορίσαμε $\mathbf{y} = U^T\mathbf{x}$. Παρατηρούμε ότι $\|\mathbf{x}\| = 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{y}\| = 1$ και ότι $\{U^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T H\mathbf{x} = \min_{\|\mathbf{y}\|=1} \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \min_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\
&= \min_{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=1} \lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \ldots \lambda_n^2 y_n^2 \\
&= \lambda_n
\end{aligned}$$

(όταν $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$ και $y_n = \pm 1$). Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι $\max\{\mathbf{x}^T H\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda_1$. $\square$

Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα - Δ1

Θεώρημα: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης $\mathcal{C}^2$, U ανοικτό. Έστω ότι $\mathbf{x}_0 \in U$ κρίσιμο σημείο και έστω ότι ο εσσιανός πίνακας

$$\mathbf{H}(x_0) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος ($\mathbf{H}(x_0) \succ 0$) όπου $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$. Τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρά τοπικό ελάχιστο της f. Αντίστοιχα, αν $H(\mathbf{x}_0) = H^T(\mathbf{x}_0) \prec 0$, το $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρά τοπικό μέγιστο.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Taylor δεύτερης τάξης, για $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{h}\|$ αρκούντως μικρή, έχουμε:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T H(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

όπου $\frac{|R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to 0$.

Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα - Δ2

Απόδειξη (συνέχεια):

- Εφόσον $H(\mathbf{x}_0) = H^T(\mathbf{x}_0) \succ 0$ έχουμε $\mathbf{h}^T H(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \geq \lambda_{min}(H(\mathbf{x}_0))\|\mathbf{h}\|^2$.
- Εφόσον $\mathbf{x}_0$ κρίσιμο σημείο έχουμε $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Άρα,

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{h}^T H(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}+R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}) \geq \frac{\lambda_{min}(H(\mathbf{x}_0))}{2}\|\mathbf{h}\|^2+R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})$$

- Έστω $M = \frac{\lambda_{min}(H(\mathbf{x}_0))}{2}$. Τότε $M > 0$. Εφόσον $\frac{|R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$0 < \|\mathbf{h}\| < \delta \Rightarrow |R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})| < M\|\mathbf{h}\|^2 \Rightarrow -M\|\mathbf{h}\|^2 < R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}) < M\|\mathbf{h}\|^2$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{h}\| < \delta &\Rightarrow f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \geq M\|\mathbf{h}\|^2 + R_2 > M\|\mathbf{h}\|^2 - M\|\mathbf{h}\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) > f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

και επομένως $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρά τοπικό ελάχιστο.

Παρόμοια είναι η απόδειξη για τοπικό μέγιστο (Ασκηση!). $\square$

Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα - Δ3

Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο): Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Όπως προηγουμένως, $\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Ο Εσσιανός πίνακας:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφόσον

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2y^2 > 0 \text{ για κάθε } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

ο πίνακας $H(0,0)$ είναι θετικά ορισμένος και επομένως το $(0,0)$ είναι ελάχιστο (και όπως ήδη είδαμε ολικό, όχι μόνο τοπικό).

Κριτήριο θετικά ορισμένου πίνακα - Δ1

Λήμμα: Έστω πίνακα $H = H^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Τότε $H \succ 0$ αν και μόνο αν: $a > 0$ και $\det(H) = ac - b^2 > 0$.

Απόδειξη: Άσκηση!

Παρατήρηση: Το Λήμμα γενικεύεται για πίνακες διαστάσεων $n \times n$. Αν $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $H \succ 0$ αν και μόνο αν $\det[H(1:j, 1:j)] > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$, όπου ο πίνακας $H(1:j, 1:j)$ προκύπτει από τον H διατηρώντας μόνο τις πρώτες j γραμμές και j στήλες του H.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών - Δ1

Θεώρημα: Έστω $f(x, y)$ κλάσης $\mathcal{C}^2$ με πεδίο ορισμού ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Ένα σημείο $(x_0, y_0) \in U$ είναι (αυστηρά) τοπικό ελάχιστο αν ισχύουν οι τρείς παρακάτω συνθήκες:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (δηλ. το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο).

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

(iii) $D := \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$.

Αν ισχύουν οι σχέσεις (i) και (iii) αλλά το πρόσημο της ανισότητας (ii) αντιστρέφεται ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$), τότε το κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) είναι (αυστηρά) τοπικό μέγιστο. Αν ισχύει η (i) αλλά $D < 0$ στο (iii), τότε κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη ανάλυση. $\square$

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών - Δ2

Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο): Να ταξινομήσετε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Από προηγούμενη ανάλυση έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ και επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$.

Ο Εσσιανός πίνακας είναι:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

που συνεπάγεται ότι

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $D = \det[H(0,0)] = -4 < 0$ το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών - Δ3

Παράδειγμα: Αναλύστε την συμπεριφορά της $f(x,y) = x^5y + xy^5 + xy$ στα κρίσιμα σημεία της.

Λύση: Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^5 + 5xy^4 + x = x(x^4 + 5y^4 + 1)$. Εφόσον $5x^4 + y^4 + 1 \geq 1$ και $x^4 + 5y^4 + 1 \geq 1$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x,y) = (0,0)$. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 20x^3y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 20xy^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 5x^4 + 5y^4 + 1$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Ο Εσσιανός πίνακας είναι:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D := \det[H(0,0)] = -1 < 0$$

και επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών - Δ4

Το γράφημα της $g(x,y) = \frac{1}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ είναι επιφάνεια S στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν τα σημεία της S πού είναι πλησιέστερα στο σημείο $O = (0,0,0)$.

Η απόσταση σημείου $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ από το O είναι:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Αν $(x,y,z) \in S$, τότε

$$d = d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}$$

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $d(x,y)$ (ισοδύναμα την $d^2(x,y)$) ως προς τις μεταβλητές x και y. Έστω $f(x,y) = d^2(x,y)$. Έχουμε:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x - \frac{2}{x^3y^2}, 2y - \frac{2}{y^3x^2}\right) = \mathbf{0}$$

αν και μόνο αν $x^4y^2 = 1$ και $x^2y^4 = 1$.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών - Δ5

Από την πρώτη εξίσωση: $y^2 = 1/x^4$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη: $x^6 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Επομένως έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία: $(\pm 1, \pm 1)$ (όλοι οι συνδιασμοί). Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{x^2 y^4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4}{x^3 y^3}$$

Επίσης,

$$D = \left(\frac{\partial^2 f(\pm 1, \pm 1)}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f(\pm 1, \pm 1)}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f(\pm 1, \pm 1)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 64 - (\pm 4)^2 > 0$$

και επομένως όλα τα ακρότατα είναι τοπικά ελάχιστα. Η ελάχιστη απόσταση της S απο το O είναι:

$$d^* = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + \frac{1}{(\pm 1)^2 (\pm 1)^2}} = \sqrt{3}$$

Διπλά και Τριπλά Ολοκληρώματα

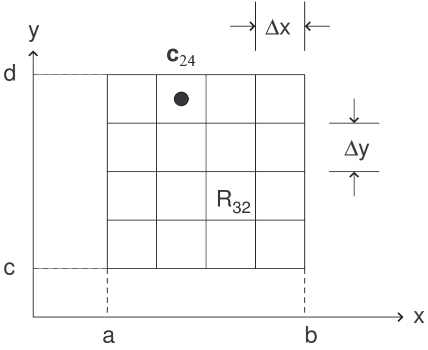
Διπλά Ολοκληρώματα - Δ1

Έστω $f : R \to \mathbb{R}$, $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ (ορθογώνιο), f φραγμένη.
Ορίζουμε μία κανονική διαμέριση του R:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n} = \Delta y$$

όπου $j = 0, 1, \ldots, n-1$ και $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



Διπλά Ολοκληρώματα - Δ2

Έστω $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ και $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$. Ορίζουμε

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y, \quad \Delta x \Delta y := \Delta A \quad (\text{Εμβαδόν } R_{jk})$$

Αν η ακολουθία $S_n \to S$ καθώς $n \to$ *γιά κάθε* επιλογή των $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) και γράφουμε:

$$S = \int\int_R f(x,y)dA = \int\int_R f(x,y)dxdy$$

Θεώρημα: Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη.

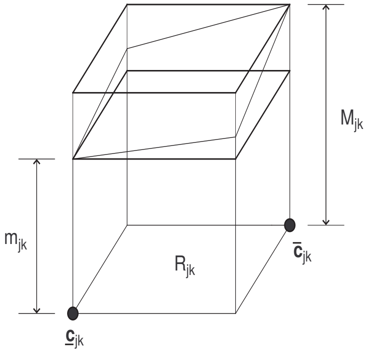
Απόδειξη: Marsden and Tromba. $\square$

Διπλά Ολοκληρώματα: Γεωμετρική Ερμηνεία - Δ1

Έστω $f \geq 0$. Τότε $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in R\}$ είναι το γράφημα της f που αντιστοιχεί σε επιφάνεια πάνω από το επίπεδο (x, y). Έστω

$$\bar{\mathbf{c}}_{jk} \in \operatorname{argmax}\{f(x, y) : (x, y) \in R_{jk}\}, \quad M_{jk} = f(\bar{\mathbf{c}}_{jk})$$
$$\underline{\mathbf{c}}_{jk} \in \operatorname{argmin}\{f(x, y) : (x, y) \in R_{jk}\}, \quad m_{jk} = f(\underline{\mathbf{c}}_{jk})$$

π.χ. όταν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f επιτυγχάνεται σε δύο γωνιακά σημεία του R_{jk}:



Διπλά Ολοκληρώματα: Γεωμετρική Ερμηνεία - Δ2

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή υπάρχουν γιατί το R_{jk} είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή κλειστό και φραγμένο. Αν $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$ (αυθαίρετο), τότε

$$L_n := \sum_{j,k=0}^{n-1} m_{jk} \Delta x \Delta y \leq \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y \leq \sum_{j,k=0}^{n-1} M_{jk} \Delta x \Delta y := U_n$$

Γεωμετρικά, L_n είναι ο όγκος του εγγεγραμμένου στερεού και U_n ο όγκος του περιγεγραμμένου στερεού στο στερεό που ορίζεται από την προβολή του γραφήματος της f στο ορθογώνιο R, δηλαδή στο στερεό

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\} \tag{*}$$

για n-διαμέριση των πλευρών του R. Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y$ υπάρχει ανεξάρτητα της επιλογής των $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$, τότε τα αντίστοιχα όρια $\lim_{n\to\infty} L_n$ και $\lim_{n\to\infty} U_n$ υπάρχουν, είναι ίσα και

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) = \lim_{n\to\infty} U_n = \int\int_R f(x, y) dA$$

είναι ίσο με τον όγκο του στερεού (*). Αν $f(x, y) < 0$ για κάποια $(x, y) \in R$, τότε το διπλό ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στον προσημασμένο όγκο, όπως σε ολοκληρώματα μίας μεταβλητής.

Διπλά Ολοκληρώματα: Ιδιότητες - Δ1

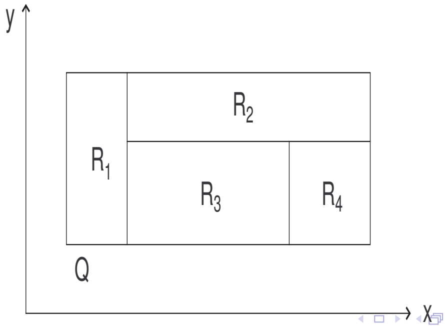
Αν f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^2$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε $f+g$ και cf ολοκληρώσιμες στο R και ισχύουν:

(i) Γραμμικότητα: $\int\int_R (f+g)dA = \int\int_R fdA + \int\int_R gdA$.

(ii) Ομογένεια: $\int\int_R (cf)dA = c\int\int_R fdA$.

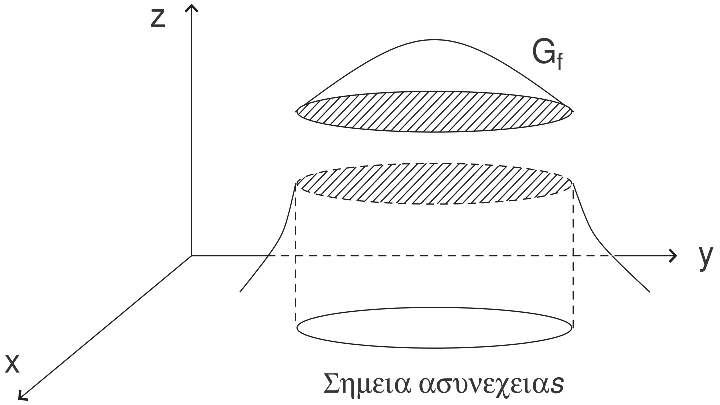
(iii) Μονοτονία: Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε $\int\int_R fdA \geq \int\int_R gdA$.

(iv) Προσθετικότητα: Αν $\{R_i\}_{i=1}^n$ ορθογώνια, $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$, η f φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε όλα τα R_i και $Q = \cup_{i=1}^n R_i$ ορθογώνιο, τότε $f : Q \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο Q και $\int\int_Q fdA = \sum_{i=1}^n \int\int_{R_i} fdA$.



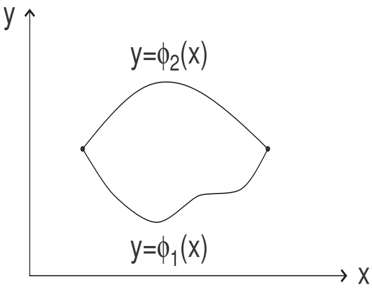
Διπλά Ολοκληρώματα: Ασυνέχεια - Δ1

Το Θεώρημα ολοκληρωσιμότητας γενικέυεται για ασυνεχείς συναρτήσεις ειδικής μορφής, π.χ:



Διπλά Ολοκληρώματα: Ασυνέχεια - Δ2

Θεώρημα: Αν $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη με πεδίο ορισμού $R = [a, b] \times [c, d]$ και το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι ασυνεχής βρίσκεται πάνω σε πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων (δείτε σχήμα), τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.



Θεώρημα Fubini και επέκταση - Δ1

Θεώρημα: Αν $f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $R = [a, b] \times [c, d]$, τότε:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Απόδειξη: Marsden & Tromba $\square$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα λέει ότι το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους. Με τον πρώτο σταθεροποιούμε το x και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)dy$ που είναι συνάρτηση του x, ας πούμε $F(x)$, την οποία στην συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς x, δηλ. υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b F(x)dx$.

Με τον δεύτερο τρόπο η σειρά υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι αντίστροφη: Σταθεροποιούμε το y και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x,y)dx$ που είναι συνάρτηση του y, ας πούμε $\hat{F}(y)$, την οποία στην συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς y, δηλ. $\int_c^d \hat{F}(y)dy$. Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα (ανάλογα με την εναλλαγή αθροίσματος σε πεπερασμένη διπλή σειρά, δηλ. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}$).

Θεώρημα Fubini και επέκταση - Δ2

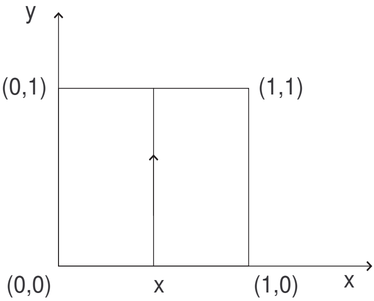
Θεώρημα (επέκταση): Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $R = [a, b] \times [c, d]$ και έστω ότι τα σημεία ασυνέχειας της f βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Αν το $\int_c^d f(x, y)dy$ υπάρχει για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$ υπάρχει και είναι ίσο με $\int\int_R fdA$. Αντίστοιχα, Αν το $\int_a^b f(x, y)dx$ υπάρχει για κάθε $y \in [c, d]$, τότε το $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$ υπάρχει και είναι ίσο με $\int\int_R fdA$. Επομένως, αν ισχύουν όλα τα παραπάνω:

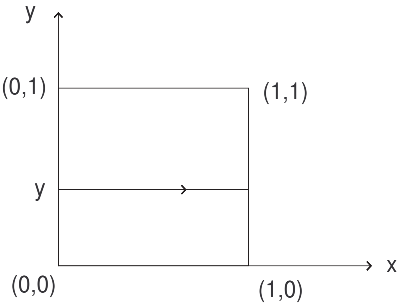
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b fdxdy = \int\int_R fdA$$

Απόδειξη: Marsden & Tromba $\square$

Θεώρημα Fubini και επέκταση - Δ3

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\int_R (x^2 + y)dA$ όπου $R = [0,1] \times [0,1]$.





Θεώρημα Fubini και επέκταση - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια):

Λύση:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(x^2+y)dydx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} dx$$
$$= \int_{x=0}^{1}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

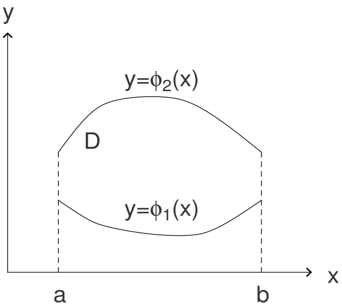
Επαλήθευση:

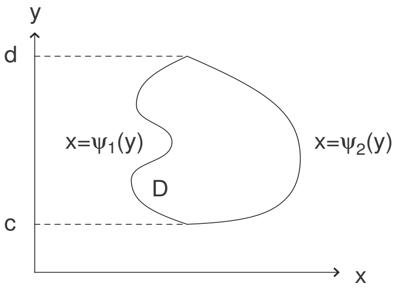
$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}(x^2+y)dydx = \int_{y=0}^{1} \left[\frac{x^3}{3} + xy\right]_{x=0}^{1} dy$$
$$= \int_{y=0}^{1}\left(\frac{1}{3}+y\right)dy = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ1

Έστω $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Καλούμε το χωρίο: $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq \phi_2(x)\}$ ως Δ y-απλό.

Παρόμοια, αν $\psi_1 : [c, d] \to \mathbb{R}$ και $\psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$ $\forall y \in [c, d]$, καλούμε το χωρίο: $D = \{(x, y) : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \phi_2(x)\}$ ως Δ x-απλό.





Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ2

Ορισμός: Αν D στοιχειώδες χωρίο (δηλ. x-απλό η y-απλό) στο επίπεδο, επιλέγουμε ορθογώνιο $R \supseteq D$. Δοσμένης $f : D \to \mathbb{R}$, f συνεχής (και άρα φραγμένη), ορίζουμε διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x,y)dA$ επεκτείνοντας την συνάρτηση f στην συνάρτηση $f^* : R \to \mathbb{R}$ ως εξής:

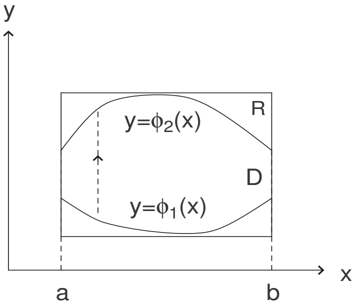
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{αν } (x,y) \in D \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$

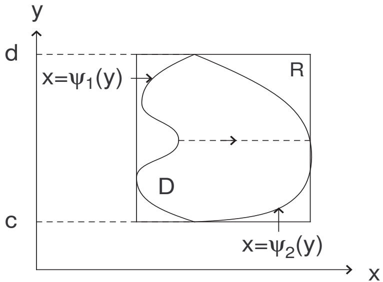
Παρατηρούμε ότι η f^* είναι φραγμένη στο R και συνεχής παντού, εκτός (πιθανόν) από το σύνορο του D, ∂D, που είναι ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Άρα η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R από προηγούμενο Θεώρημα και μπορούμε να ορίσουμε:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R f^*(x,y)dA$$

Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ3

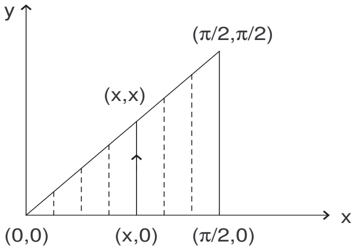
- Αν το D είναι y-απλό, $\int\int_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$.
- Αν το D είναι x-απλό, $\int\int_D f(x,y)dA = \int_{y=c}^{d}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$.

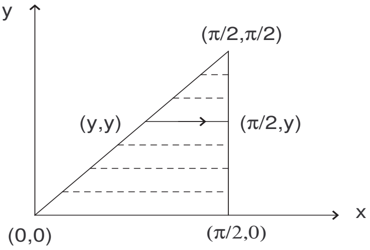




Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ4

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int\int_T (x^3y + \cos x)dA$ όπου T το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$ και $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.





Γράφουμε: $I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{x} (x^3y + \cos x)dydx$. Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα το x είναι σταθεροποιημένο. Επομένως:

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y\cos x\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^5}{2} + x\cos x\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \frac{\pi^6}{2^6\cdot 12} + I_1, \quad I_1 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Ολοκληρώνοντας κατά μέρη:

$$\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow I_1 = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow I = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε: $I = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=y}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 y + \cos x) dx dy$ όπου το y είναι σταθεροποιημένο στο εσωτερικό ολοκλήρωμα. Άρα:

$$I = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^4 y}{4} + \sin x\right]_{x=y}^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^4}{2^4\cdot 4} y + 1\right) - \left(\frac{y^5}{4} + \sin y\right) dy$$

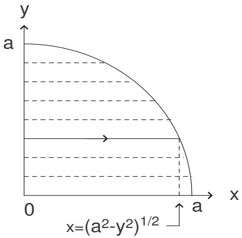
$$= \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^4}{2^6} y + 1 - \frac{y^5}{4} - \sin y\right) dy = \left[\frac{\pi^4}{2^6}\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^6}{6\cdot 4} + \cos y\right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi^4}{2^6}\frac{\pi^2}{2^3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{2^6\cdot 6\cdot 4} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0+1) = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

όπως προηγουμένως.

Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία - Δ6

Παράδειγμα: Αλλάζοντας σειρά ολοκλήρωσης υπολογίστε το ολοκλήρωμα:
$I = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dydx.$



$$
\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{a} \int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}dxdy = \int_{y=0}^{a} \sqrt{a^2-y^2} \int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dxdy \\
&= \int_{y=0}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, [x]_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_{y=0}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2}dy \\
&= \int_{y=0}^{a} (a^2-y^2)dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{a} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}
\end{aligned}
$$

Τριπλά ολοκληρώματα - Δ1

Έστω $f : B \to \mathbb{R}$, $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \subseteq \mathbb{R}^3$, φραγμένη. Διαμερίζοντας τις πλευρές του B σε n ίσα μέρη, ορίζουμε:

$$S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk})\Delta V$$

όπου

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ \Delta y = \frac{d-c}{n},\ \Delta z = \frac{q-p}{n}$$

και $\mathbf{c}_{ijk} \in B_{ijk}$ όπου

$$B_{ijk} := [a+i\Delta x, a+(i+1)\Delta x] \times [c+j\Delta y, c+(j+1)\Delta y] \times [p+k\Delta z, p+(k+1)\Delta z]$$

όπου $0 \leq i, j, k \leq n-1$. Αν $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο των $\mathbf{c}_{ijk}$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) και ορίζουμε το (τριπλό) ολοκλήρωμα: $S = \int\int\int_B f(x, y, z)dV$.

Παρατήρηση: Αν η f συνεχής στο $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

Τριπλά ολοκληρώματα - Δ2

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων και το Θεώρημα Fubini επεκτείνονται στα τριπλά ολοκληρώματα.

Αν η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη στο B, τότε κάθε διαδοχικό ολοκλήρωμα υπάρχει και ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\int\int\int_B f dxdydz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)dydxdz = \dots$$

(6 διατάξεις συνολικά).

Παράδειγμα: Ολοκληρώστε την συνάρτηση e^{x+y+z} στο $B=[0,1]^3$.

Λύση: Ολοκληρώνοντας με την συνήθη σειρά:

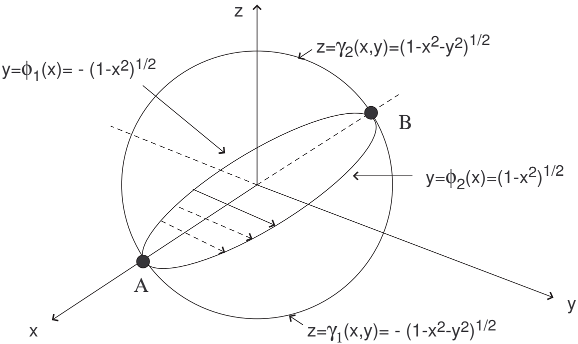
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \left[e^{x+y+z}\right]_{x=0}^1 dydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z})dydz = \int_0^1 \left[e^{1+y+z} - e^{y+z}\right]_{y=0}^1 dz \\ &= \int_0^1 \left(e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right) dz = \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right]_{z=0}^1 \\ &= (e^3 - 2e^2 + e) - (e^2 - 2e + 1) = e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e-1)^3 \end{aligned}$$

Στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ - Δ1

Χωρίο μία μεταβλητή του οποίου βρίσκεται μεταξύ δύο συναρτήσεων των υπόλοιπων μεταβλητών, τα πεδία ορισμού των οποίων είναι στοιχειώδη (x-απλά η y-απλά) χωρία στο επίπεδο. Π.χ. αν D στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο xy και $\gamma_1(x,y) \leq \gamma_2(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)\}\end{aligned}$$

είναι στοιχειώδες χωριό στον $\mathbb{R}^3$.



Τριπλά ολοκληρώματα μέσω διαδοχικής ολοκλήρωσης Δ1

Έστω W στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$, στο οποίο η μεταβλητή z φράσσεται μεταξύ δύο συναρτήσεων των x και y. Τότε για D y-απλό χωρίο:

$$\int\int\int_W f(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\int_{z=\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

ενώ για D x-απλό χωρίο:

$$\int\int\int_W f(x,y,z)dV = \int_{y=c}^{d}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\int_{z=\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

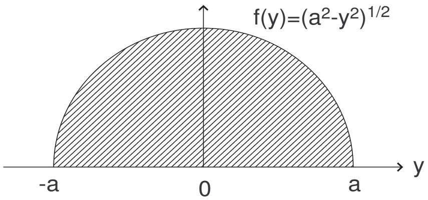
Παράδειγμα: Δείξτε ότι ο όγκος μοναδιαίας σφαίρας είναι $\frac{4\pi}{3}$.

Λύση: Έχουμε (δείτε διάγραμμα στην προηγούμενη διαφάνεια)

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx \\ &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [z]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dydx \\ &= 2\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dydx \end{aligned}$$

Τριπλά ολοκληρώματα μέσω διαδοχικής ολοκλήρωσης Δ2

Παράδειγμα (συνέχεια:) Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι της μορφής: $\int_{y=-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} dy$ με $a = \sqrt{1 - x^2}$ (εφόσον το x είναι σταθεροποιημένο στο εσωτερικό ολοκλήρωμα). Γεωμετρικά το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στο μισό εμβαδόν κύκλου ακτίνας a και άρα $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi(1-x^2)}{2}$.

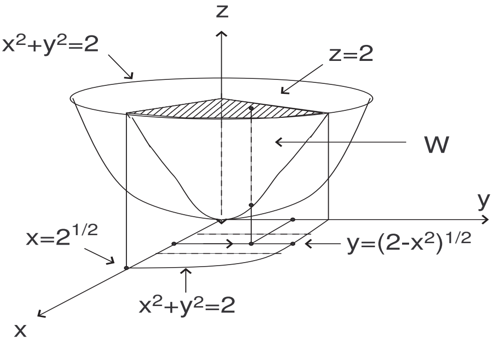


(Ισοδύναμα, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αντικατάσταση $y = a \sin\theta$). Επομένως,

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \pi \left[(1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{4\pi}{3}$$

Τριπλά ολοκληρώματα μέσω διαδοχικής ολοκλήρωσης Δ3

Παράδειγμα: Έστω W το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ και την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ που βρίσκεται στο τεταρτημόριο $x \geq 0$, $y \geq 0$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\int_W x dV$.



$$V = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{2} xdzdydx = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} x \, [z]_{z=x^2+y^2}^{2} \, dydx$$

Τριπλά ολοκληρώματα μέσω διαδοχικής ολοκλήρωσης Δ4

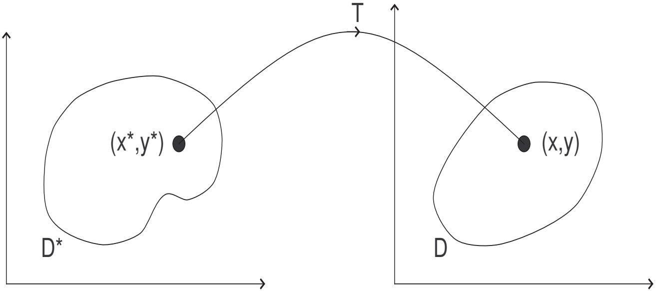
Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)dydx \\
&= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)y - x\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)(2-x^2)^{1/2} - \frac{1}{3}x(2-x^2)^{3/2} \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}x(2-x^2)^{3/2} \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}x(2-x^2)^{3/2}dx = -\frac{1}{3}\int_{x=0}^{\sqrt{2}} (-2x)(2-x^2)^{3/2}dx \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{(2-x^2)^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}\frac{2}{5}\left[(2-x^2)^{5/2} \right]_{\sqrt{2}}^{0} \\
&= \frac{2}{15}\cdot 2^{5/2} = \frac{2}{15}7\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση (διπλά και τριπλά ολοκληρώματα) - Δ1

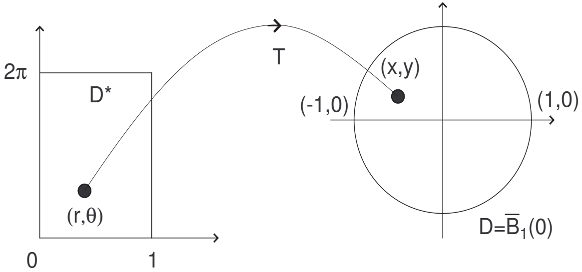
Έστω $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ και $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση.
Συμβολίζουμε με $D = T(D^*)$ την εικόνα του D^* μέσω της T, δηλαδή

$$D = T(D^*) = \{(x, y) = T(x^*, y^*) : (x^*, y^*) \in D^*\}$$



Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση (διπλά και τριπλά ολοκληρώματα) - Δ2

Παράδειγμα: Έστω $D^* = [0,1] \times [0,2\pi] = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ και έστω $T : D^* \to \mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) := (x,y)$. Βρείτε το σύνολο $D = T(D^*)$, δηλ. την εικόνα του D^* μέσω της T.



Λόγω της ταυτότητας $x^2 + y^2 = r^2 \leq 1$ το σύνολο των σημείων $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $(x,y) \in D$ είναι μέσα στον δίσκο $\bar{B}_1(\mathbf{0})$. Επιπλέον, κάθε $(x,y) \in \bar{B}_1(\mathbf{0})$ γράφεται ως $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $(r,\theta) \in D$. Άρα $D = \bar{B}_1(\mathbf{0})$.

Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση (διπλά και τριπλά ολοκληρώματα) - Δ3

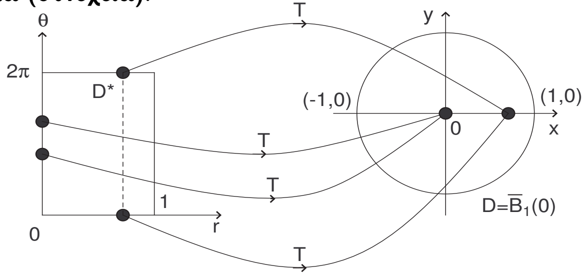
Ορισμός: Μία συνάρτηση $T : D^* \to D$ είναι $1-1$ στο D όταν απεικονίζει διαφορετικά σημεία του πεδίου ορισμού της D^* σε διαφορετικά σημεία του D (δηλ. $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}$). Η T είναι *επί* του D όταν $T(D^*) = D$, δηλ. η εικόνα του D^* μέσω της T είναι όλο το D.

Γραμμική συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με πίνακα $A_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δηλ. $T(\mathbf{x}) = A_T\mathbf{x}$. Ισχύει ότι η T είναι $1-1$ αν και μόνο αν η T επί του $\mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν $\det(A_T) \neq 0$.

Παράδειγμα: Έστω $T : D^* = [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Από προηγούμενο παράδειγμα $T(D^*) = D = \bar{B}_1(\mathbf{0})$. Η T δεν είναι $1-1$ στο D^*, αλλά γίνεται $1-1$ αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο σύνολο $S = (0,1] \times [0,2\pi)$, οπότε $T(S) = \bar{B}_1(\mathbf{0})\backslash\{\mathbf{0}\}$.

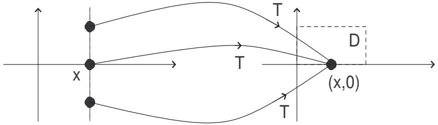
Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια):



Δοσμένου χωρίου D και συνάρτησης T, ο προσδιορισμός χωρίου D^* τέτοιου ώστε $T(D^*) = D$ είναι δυνατός μόνο όταν η T είναι επί του D.

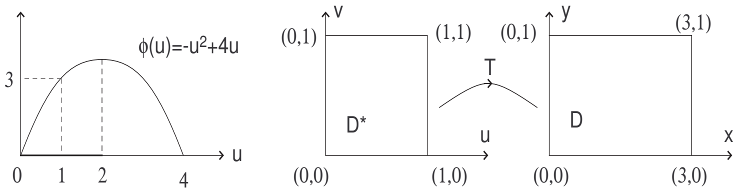
Παράδειγμα: Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$. Έστω $D = [0, 1]^2$. Τότε δεν υπάρχει $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$. τ.ω. $T(D^*) = D$.



Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα - Δ1

Έστω $T : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $T(D^*) = D$ και $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θέλουμε να εκφράσουμε το $\int\int_D f(x,y)dA$ ως ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f \circ T$ επί του D^*. Έστω D^* χωρίο του επιπέδου (u,v), D χωρίο του επιπέδου (x,y) και $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in D^*$. Το επόμενο παράδειγμα σχετίζεται με τον υπολογισμό της εικόνας $D = T(D^*)$.

Παράδειγμα: Έστω $T(u,v) = (-u^2 + 4u, v) := (x,y)$, $D^* = [0,1] \times [0,1]$. Ορίζουμε: $\phi(u) = -u^2 + 4u = u(4-u)$. Άρα $D = T(D^*) = [0,3] \times [0,1]$.



Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα - Δ2

Θεώρημα: Έστω D και D^* στοιχειώδη χωρία του $\mathbb{R}^2$ και έστω ότι $T : D^* \to D$ είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$. Αν η T είναι $1-1$ στο D^* (εκτός πιθανώς από κάποια σημεία στο σύνορο του D^*, ∂D^*) και επιπλέον $D = T(D^*)$, τότε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

όπου

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του πίνακα παραγώγων $DT(u,v)$.

Παρατήρηση: Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα:

$$\text{Εμβαδόν}(D) := E(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

και το στοιχείο εμβαδού $dxdy$ στο επίπεδο (x,y) μετασχηματίζεται στο $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$ στο επίπεδο (u,v).

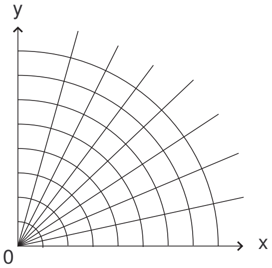
Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα: Καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες - Δ3

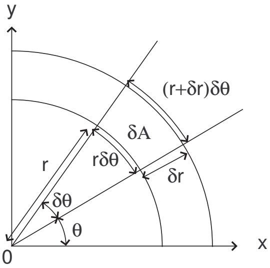
Παράδειγμα: Η συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που μετασχηματίζει πολικές σε Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι η: $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) := (x,y)$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

και άρα $dA = dxdy \to rdrd\theta$. Γεωμετρικά:

$$\delta A = \pi\left((r+\delta r)^2 - r^2\right)\frac{\delta\theta}{2\pi} = \left(2r\delta r + (\delta r)^2\right)\frac{\delta\theta}{2} = r\delta r\delta\theta + \frac{1}{2}(\delta r)^2\delta\theta \approx r\delta r\delta\theta$$





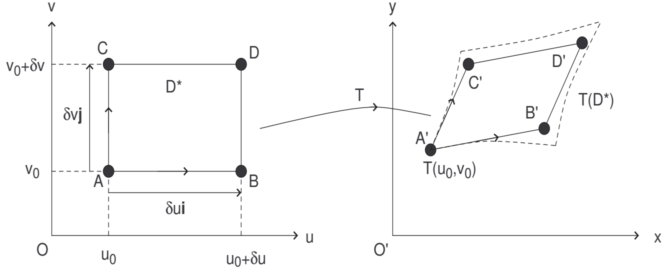
Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα: Γεωμετρική ερμηνεία - Δ4

Έστω μικρό ορθογώνιο D^* στο επίπεδο (u, v) με κορυφές τα σημεία $A(u_0, v_0)$, $B(u_0 + \delta u, v_0)$, $C(u_0, v_0 + \delta v)$ και $D(u_0 + \delta u, v_0 + \delta v)$. Έστω $T(D^*)$ η εικόνα του D^* όπου T απεικόνιση κλάσης $\mathcal{C}^1$. Έστω A' η είκόνα του A μέσω της T. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor (προσεγγιστικά):

$$T(u_0 + \delta u, v_0 + \delta v) \approx T(u_0, v_0) + DT(u_0, v_0) \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}$$

όπου

$$DT(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$



Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα: Γεωμετρική ερμηνεία - Δ5

και επομένως αν προσεγγιστικά $\overrightarrow{O'D'} = T(\overrightarrow{OD})$, έχουμε

$$\overrightarrow{A'D'} = T(u_0+\delta u, v_0+\delta v) - T(u_0, v_0) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v\right)\mathbf{j}$$

(όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (u_0, v_0). Παρόμοια:

$$\overrightarrow{A'B'} = T(u_0+\delta u, v_0) - T(u_0, v_0) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j}\right)\delta u := \mathbf{T}_u \delta u$$

$$\overrightarrow{A'C'} = T(u_0, v_0+\delta v) - T(u_0, v_0) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j}\right)\delta v := \mathbf{T}_v \delta v$$

Επομένως αν $\delta E =$ Εμβαδόν$(ABDC) = \delta u \delta v$ και $\delta E' =$ Εμβαδόν$(A'B'D'C')$,

$$\begin{aligned}
\delta E' &\approx \left\| \delta u \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j}\right) \wedge \delta v \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j}\right) \right\| \\
&= \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)(u_0, v_0)\mathbf{k} \right\| \delta u \delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) \right| \delta E
\end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα: Γεωμετρική ερμηνεία - Δ6

Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο): Εδώ

$T(u,v) = (-u^2+4u, v) := (x,y)$, $D^* = [0,1]\times[0,1] \Rightarrow D = T(D^*) = [0,3]\times[0,1]$

Αν $f(x,y) = 1$, τότε έχουμε:

$$I := \int\int_D f(x,y)dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{3} dxdy = 3$$

Επίσης:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 4-2u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = |4-2u|$$

και επομένως:

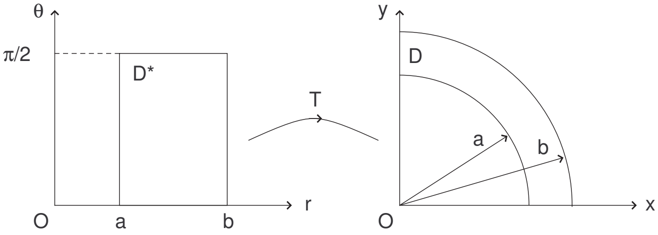
$$I' := \int\int_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{1} |4-2u| dudv$$

$$= \int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{1} (4-2u)dudv = \int_{v=0}^{1} [4u-u^2]_{u=0}^{1} dv = \int_{v=0}^{1} 3dv = 3 = I$$

που επαληθεύει το Θεώρημα.

Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα - Δ7

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int\int_D \ln(x^2+y^2)dxdy$ όπου D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (x,y) που βρίσκεται μεταξύ των τόξων: $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=b^2$ όπου $0<a<b$.



Λύση: Ο μετασχηματισμός $T: D^* \to D$ είναι $1-1$ στο D^*, οπότε

$$I = \int\int_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \int_a^b \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r\ln(r^2)d\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b 2r\ln(r)dr$$

Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα - Δ8

Λύση (συνέχεια): Έστω

$$J = \int x\ln(x)dx = \int \ln(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_D \ln(x^2+y^2)dxdy \\
&= \pi\int_a^b r\ln(r)dr \\
&= \pi\left[\frac{r^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4}\right]_{r=a}^{b} \\
&= \pi\left[\left(\frac{b^2}{2}\ln(b) - \frac{b^2}{4}\right) - \left(\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{a^2}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[b^2\ln(b) - a^2\ln(a) - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right]
\end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα - Δ9

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Λύση: Υπολογίζουμε αρχικά το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I_\alpha = \int\int_{D_\alpha} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \ \text{ όπου } \ D_\alpha = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq \alpha^2\}$$

Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες έχουμε: $x^2+y^2 = r^2$, $dxdy \to rdrd\theta$, $D_{\alpha^*} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, οπότε:

$$I_\alpha = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\alpha} e^{-r^2} rdrd\theta = -\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\alpha} (-2r) e^{-r^2} drd\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{\alpha} d\theta = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\alpha^2}\right) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \pi \left(1 - e^{-\alpha^2}\right)$$

Επομένως:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{\alpha \to \infty} I_\alpha = \pi \Rightarrow \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dxdy = \pi$$

και άρα

$$\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \Rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Αλλαγή μεταβλητών σε τριπλά ολοκληρώματα - Δ1

Ορισμός: Αν $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^1$ που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$x = x(u, v, w), \;\; y = y(u, v, w), \;\; z = z(u, v, w)$$

τότε η Ιακωβιανή της T είναι η ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_w = \frac{\partial x}{\partial w}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\mathbf{k}$$

Επίσης:

Αλλαγή μεταβλητών σε τριπλά ολοκληρώματα - Δ2

Ορισμός (συνέχεια): Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών για τριπλά ολοκληρώματα:

$$\int\int\int_W f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \int\int\int_{W*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

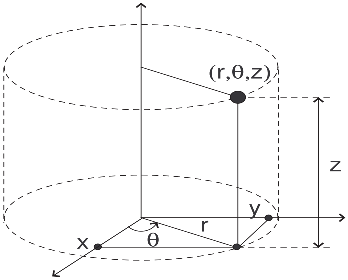
όπου W^* στοιχειώδες χωρίο του χώρου (u,v,w) που αντιστοιχεί στο στοιχειώδες χωρίο W του χώρου (x,y,z) μέσω της απεικόνισης

$$T : (u,v,w) \in W^* \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in W$$

υπό την προυπόθεση ότι η T είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ και $1-1$ στο W^* (εκτός πιθανώς από σύνολο που είναι ένωση γραφημάτων συναρτήσεων δύο μεταβλητών).

Πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες - Δ1

Έστω σημείο στον $\mathbb{R}^3$ με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες του σημείου ορίζονται ως: (r, θ, z) όπως δείχνει το σχήμα.



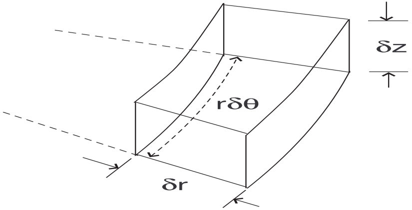
Επομένως, $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ και η Ιακωβιανή ορίζουσα του μεταχηματισμού $T : (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$ είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

Πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες - Δ2

- Άρα στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες: $dV = r dr d\theta dz$.
- Ο τύπος αλλαγής μεταβλητων σε τριπλά ολοκληρώματα απο Καρτεσιανές σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\int\int\int_W f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz$$

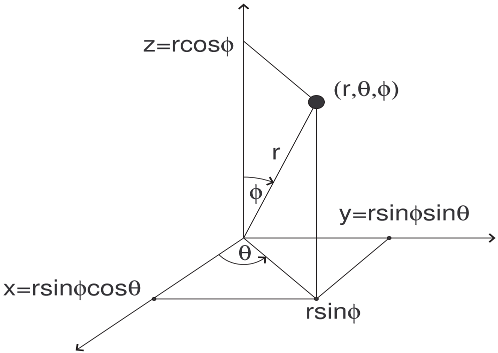


Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες - Δ1

Έστω σημείο στον $\mathbb{R}^3$ με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες του σημείου ορίζονται ως: (r, θ, ϕ) όπως δείχνει το σχήμα, δηλ.

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \ y = r\sin\phi\sin\theta, \ z = r\cos\theta$$

όπου $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και $0 \leq \phi \leq \pi$.



Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες - Δ2

Εφόσον $(x, y, z) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$ και η Ιακωβιανή ορίζουσα του μεταχηματισμού $T : (r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$ είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας ως προς την τρίτη γραμμή:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \cos\phi \ \det\begin{bmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$- r\sin\phi \ \det\begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \cos\phi(-r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta - r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta)$$

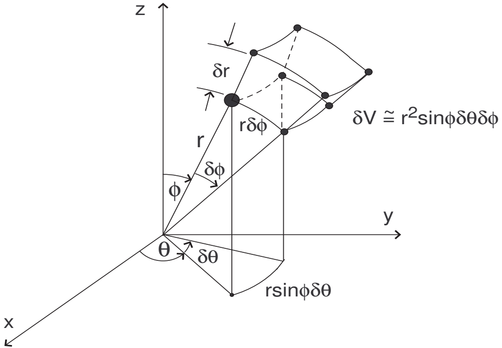
$$- r\sin\phi(r\sin^2\phi\cos^2\theta + r\sin^2\phi\sin^2\theta)$$

$$= -r^2\cos^2\phi\sin\phi - r^2\sin^3\phi = -r^2\sin\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = -r^2\sin\phi$$

Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες - Δ3

Επομένως, εφόσον $0 \leq \phi \leq \pi$, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r^2 \sin\phi$ και

$$\int\int\int_W f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\int\int\int_{W*} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)r^2\sin\phi drd\theta d\phi$$



Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες - Δ4

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int\int_W \exp[(x + 2 + y^2 + x^2)^{3/2}]dV$$

όπου W η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε πολικές σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) οπότε:
$dV = dxdydz = r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi$,

$$W^* = \{(r, \theta, \phi) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\}$$

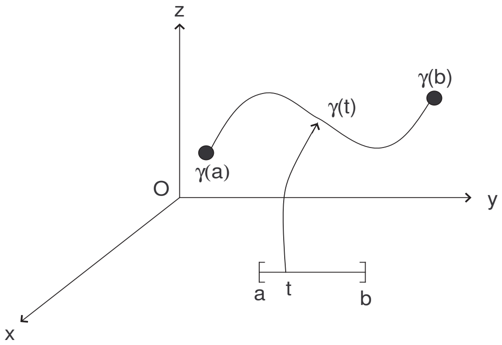
και $(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = r^3$.Επομένως:

$$I = \int\int\int_{W*} e^{r^3} r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi = \frac{1}{3}\int_{r=0}^{1} 3r^2 e^{r^3} dr \int_{\phi=0}^{\pi} \sin\phi d\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$
$$= \frac{1}{3}[e^{r^3}]_{r=0}^{1}[-\cos\phi]_{\phi=0}^{\pi}[\theta]_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{1}{3}(1 - e)(-2)(2\pi) = \frac{4\pi}{3}(e - 1)$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

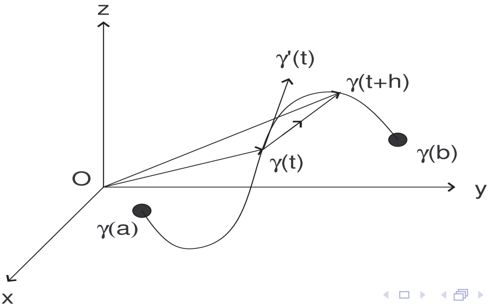
Εισαγωγικά - Δ1

- *Διαδρομή στον* $\mathbb{R}^n$*:* Απεικόνιση $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. $C = \{\boldsymbol{\gamma}(t) : t \in [a, b]\}$ είναι η *καμπύλη* της διαδρομής και $\boldsymbol{\gamma}(a)$, $\boldsymbol{\gamma}(b)$ τα *άκρα* της.
- Αν $n = 3$ γράφουμε $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ όπου x, y, z οι συνιστώσες της $\boldsymbol{\gamma}(t)$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. (Ισοδύναμα περιγραφή της $\boldsymbol{\gamma}(t)$ σε πολικές κυλινδρικές, πολικές σφαιρικές η άλλες συντεταγμένες).



Εισαγωγικά - Δ2

- Μπορούμε να φανταστούμε την $\gamma(t)$ ως την καμπύλη που διαγράφει κινούμενο σωματίδιο σε χρόνο t. Αν η $\gamma(t)$ είναι παραγωγίσιμη, η ταχύτητα του σωματιδίου την χρονική στιγμή t είναι:
$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$
Το μέτρο της ταχύτητας της διαδρομής $\gamma(t)$ είναι $\|\gamma'(t)\|$. Αν $n = 3$, τότε
$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$
Γεωμετρικά, $\gamma'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην $\gamma(t)$ την χρονική στιγμή t.



Εισαγωγικά - Δ3

- Έστω $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ παραγωγίσιμη διαδρομή. Το μήκος της διαδρομής (μήκος τόξου) στο διάστημα $[t_0, t_1]$ είναι

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Η απειροστή μετατόπιση κινουμένου σωματιδίου που ακολουθεί την διαδρομή $\gamma(t)$ ορίζεται ως:

$$\mathbf{ds} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt$$

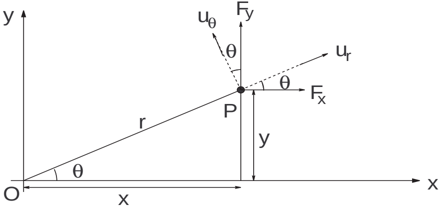
και το μήκος της:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{ds}\| := ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

είναι το διαφορικό μήκος τόξου.

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^2$ - Δ1

Στον $\mathbb{R}^2$ συνήθως χρησιμοποιούμε Καρτεσιανές η πολικές συντεταγμένες, (x, y) και (r, θ) αντίστοιχα. Έχουμε: $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$.



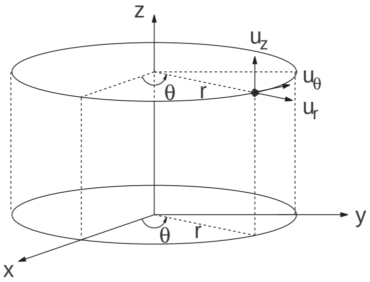
Έστω $\mathbf{F}(x, y)$ διανυσματικό πεδίο. Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες γράφουμε: $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$.

Ισοδύναμα σε πολικές συντεταγμένες: $\mathbf{F} = F_r\mathbf{u_r} + F_\theta\mathbf{u}_\theta$ όπου $\mathbf{u_r}$ και $\mathbf{u}_\theta$ μοναδιαία διανύσματα στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση, αντίστοιχα. Έχουμε:

$$F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta, \quad F_\theta = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta$$

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ1

Στον $\mathbb{R}^3$ διανυσματικά πεδία περιγράφονται από Καρτεσιανές συντεταγμένες ως $((x, y, z)$ η $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ η πολικές συντεταγμένες. Χρησιμοποιούμε συνήθως κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες $(r,\ \theta,\ z)$ σε προβλήματα με συμμετρία ως προς ευθεία.



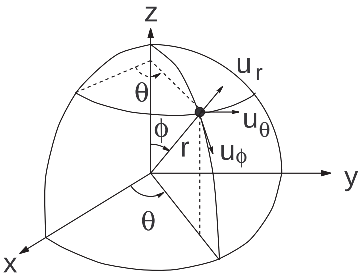
Έχουμε: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (και $z = z$). Γράφουμε

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = F_r\mathbf{u_r} + F_\theta\mathbf{u}_\theta + F_z\mathbf{u_z}$$

όπου $F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta$, $F_\theta = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta$. Επίσης $\mathbf{u_z} = \mathbf{k}$.

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ2

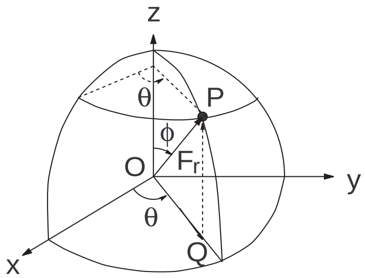
Σε προβλήματα με συμμετρία ως προς σημείο χρησιμοποιούμε συνήθως *σφαιρικές πολικές* συντεταγμένες (r, θ, ϕ).



Έχουμε: $x = r \sin\phi \cos\theta$, $y = r \sin\phi \sin\theta$ και $z = r \cos\phi$. Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ διανυσματικό πεδίο (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες). Θα εκφράσουμε το $\mathbf{F}$ σε *σφαιρικές πολικές* συντεταγμένες F_r, F_θ και F_ϕ.

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ3

Εξετάζουμε πρώτα την συνιστώσα $F_r \mathbf{u}_r$:



Έχουμε:

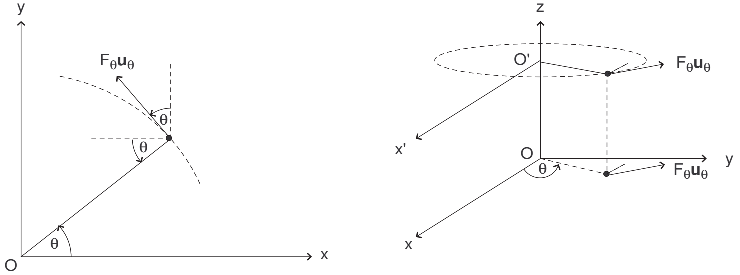
$$F_r \mathbf{u_r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP}$$

και άρα:

$$F_r \mathbf{u_r} = F_r \sin\phi \cos\theta \mathbf{i} + F_r \sin\phi \sin\theta \mathbf{j} + F_r \cos\phi \mathbf{k}$$

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ4

Στη συνέχεια αναλύουμε την συνιστώσα $F_\theta \mathbf{u}_\theta$:

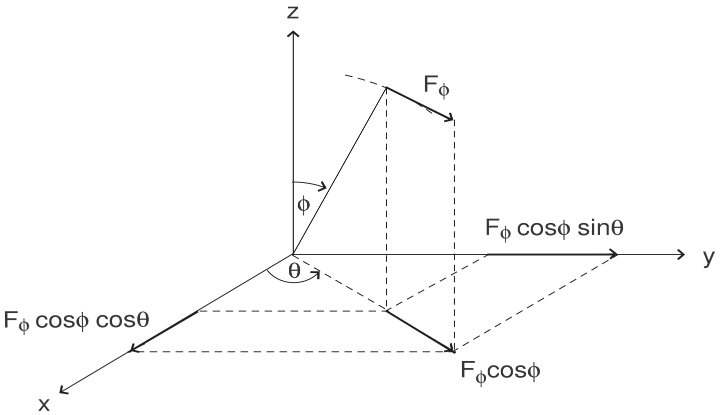


Το διάνυσμα $\mathbf{u}_\theta$ δεν έχει κατακόρυφη συνιστώσα. Επομένως:

$$F_\theta \mathbf{u}_\theta = -F_\theta \sin\theta \mathbf{i} + F_\theta \cos\theta \mathbf{j}$$

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ5

Τελευταία αναλύουμε την συνιστώσα $F_\phi \mathbf{u}_\phi$:



Επομένως:

$$\mathbf{F}_\phi \mathbf{u}_\phi = F_\phi \cos\phi \cos\theta \mathbf{i} + F_\phi \cos\phi \sin\theta \mathbf{j} - F_\phi \sin\phi \mathbf{k}$$

Διανυσματικά πεδία: Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$ - Δ6

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} F_x &= F_r \sin\phi\cos\theta - F_\theta \sin\theta + F_\phi \cos\phi\cos\theta \\ F_y &= F_r \sin\phi\sin\theta + F_\theta \cos\theta + F_\phi \cos\phi\sin\theta \\ F_z &= F_r \cos\phi - F_\phi \sin\phi \end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι ορθογώνιος και επομένως:

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση (ερμηνεία;): Ο πρώτος πίνακας γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 1ου είδους - Δ1

- Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και διαδρομή $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ κλάσης $\mathcal{C}^1$ και έστω ότι η $f \circ \gamma$, $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$, είναι συνεχής στο I. Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους, ή ολοκλήρωμα της $f(x, y, z)$ κατά μήκος της διαδρομής $\gamma(t)$:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

  Εναλλακτικός συμβολισμός: $\int_\gamma f(x, y, z) ds$, $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$.
- Αν η $\gamma(t)$ είναι μόνο τμηματικά $\mathcal{C}^1$ ή η $f(\gamma(t))$ είναι μόνο τμηματικά συνεχής, ορίζουμε το $\int_\gamma f ds$ διασπώντας το $[a, b]$ σε τμήματα επί των οποίων η $f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|$ είναι συνεχής και αθροίζοντας τα ολοκληρώματα επί των τμημάτων.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 1ου είδους - Δ2

Παράδειγμα: Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t) := (x(t), y(t), z(t))$ και $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(x, y, z)ds$.

Λύση: Έχουμε:

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$$

Επίσης

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

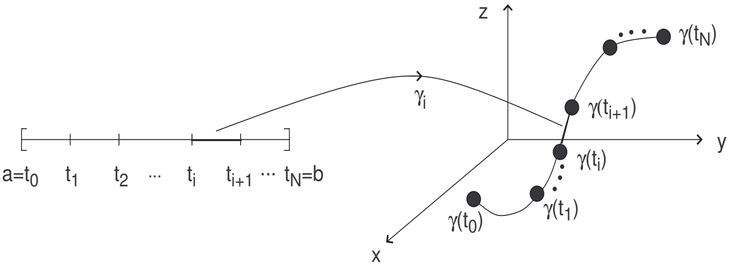
κατά μήκος της $\gamma(t)$. Επομένως:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 1ου είδους: Αιτιολόγηση ορισμού - Δ3

Έστω ότι η γ είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ στο $I = [a, b]$. Ορίζουμε διαμερισμό: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ και διασπάμε την διαδρομή γ σε N συνεχόμεν ες διαδρομές $\boldsymbol{\gamma}_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^N$, $0 \leq i \leq N-1$.



Έστω Δs_i το μήκος τόξου της γ_i, δηλ. $\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$. Γιά μεγάλες τιμές του N (πύκνή διαμέριση) η $f(x, y, z)$ είναι προσεγγιστικά σταθερή στα σημεία της $\boldsymbol{\gamma}_i$.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 1ου είδους: Αιτιολόγηση ορισμού - Δ4

Ορίζουμε:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

όπου $(x_i, y_i, z_i) = \gamma(t)$ για κάποιο $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ τέτοιο ώστε $\Delta s_i = \|\gamma'(t_i^*)\|\Delta t_i$ όπου $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Από την Θεωρία ολοκληρωμάτων Riemann αποδεικνύεται ότι

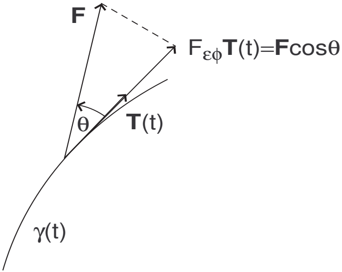
$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\|\gamma'(t_i^*)\|\Delta t_i \\
&= \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\gamma'(t)\|dt \\
&= \int_\gamma f(x, y, z)ds
\end{aligned}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ1

Έστω **F** διανυσματικό πεδίο στην $\mathcal{C}^1$ διαδρομή $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους της **F** κατά μήκος της γ ως:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

δηλαδή ολοκληρώνουμε το εσωτερικό γινόμενο του **F** με το γ' επί του διαστήματος $[a, b]$.



Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ2

Παρατήρηση (δείτε διάγραμμα στην προηγούμενη διαφάνεια): Αν $\gamma(t) \neq \mathbf{0}$,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b \left(\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt$$

Ορίζουμε: $\mathbf{T}(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην $\gamma(t)$ και άρα

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \mathbf{T}(t) := F_{\varepsilon\varphi}(t)$$

η εφαπτομενική συνιστώσα της $\mathbf{F}(t)$ κατά μήκος της $\gamma'(t)$. Άρα:

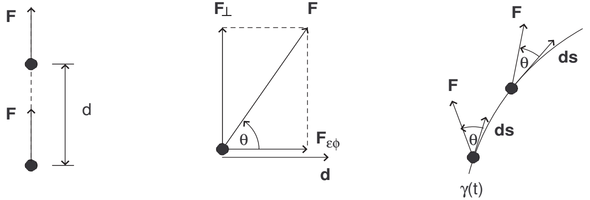
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b F_{\varepsilon\varphi}(t) \|\gamma'(t)\| dt := \int_\gamma F_{\varepsilon\varphi}(x, y, z) ds$$

όπου $F_{\varepsilon\varphi}(x, y, z)$ το εφαπτομενικό πεδίο της $\mathbf{F}$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση ορίζει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ3

Παρατήρηση (Έργο διανυσματικού πεδίου)

- Έστω **F** (σταθερή) δύναμη που κινεί σωματίδιο απόσταση d κατά μήκος της **F**. Το έργο που ασκεί η **F** για την μετακίνηση του σωματιδίου είναι $W = \|\mathbf{F}\| d$.
- Αν η (σταθερή) δύναμη δρά υπό (σταθερή) γωνία θ και η μετατόπιση δίνεται από διάνυσμα **d**, τότε $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{d}\| \cos\theta = F_{\varepsilon\varphi} d$, όπου $F_{\varepsilon\varphi}$ το μέτρο της συνιστώσας της **F** κατά την διεύθυνση **d** και $d = \|\mathbf{d}\|$.
- Έστω $\mathbf{F}(x, y, z)$ πεδίο δυνάμεων που κινεί το σωματίδιο κατά μήκος της διαδρομής $\gamma(t)$. Τότε $dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \|\mathbf{F}\| ds \cos\theta$ το έργο που εκτελεί η δύναμη **F** για την μετατόπιση του σωματιδίου κατά απόσταση $ds = \|\mathbf{ds}\|$ στην διεύθυνση **ds** και $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma F_{\varepsilon\varphi}(x, y, z) ds$ το συνολικό έργο που ασκείται για την κίνηση του σωματιδίου κατά μήκος της διαδρομής γ.



Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ4

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{F}$ το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Παραμετρικοποιήστε τον κύκλο ακτίνας a του επιπέδου (y,z) που έχει κέντρο το σημείο $(0,0)$, θεωρώντας ως συνιστώσες της $\gamma(\theta)$ τις μεταβλητές $x = 0$, $y = a\cos\theta$, $z = a\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, και υπολογίστε το έργο $W = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$.

Λύση: Έχουμε $\frac{dx}{d\theta} = 0$, $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$ και $\frac{dz}{d\theta} = a\cos\theta$. Επίσης:

$$\mathbf{F}(\gamma(\theta)) = 0^3\mathbf{i} + a\cos\theta\mathbf{j} + a\sin\theta\mathbf{k}$$

και

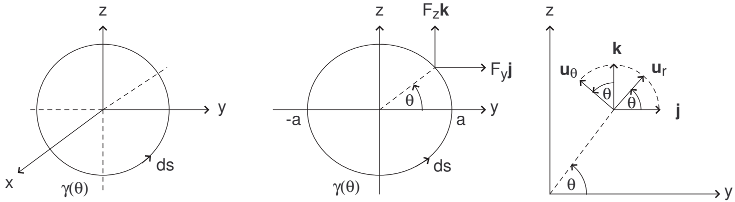
$$\gamma'(\theta) = \frac{dx}{d\theta}\mathbf{i} + \frac{dy}{d\theta}\mathbf{j} + \frac{dz}{d\theta}\mathbf{k} = -a\sin\theta\mathbf{j} + a\cos\theta\mathbf{k}$$

Άρα

$$\begin{aligned} W = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (a\cos\theta\mathbf{j} + a\sin\theta\mathbf{k})\cdot(-a\sin\theta\mathbf{j} + a\cos\theta\mathbf{k})d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2\cos\theta\sin\theta + a^2\sin\theta\cos\theta)d\theta = 0 \end{aligned}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Σχηματικά:



όπου $\mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(\theta)) = F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, $F_y = a\cos\theta$, $F_z = a\sin\theta$.

Σε πολικές συντεταγμένες: $\mathbf{j} = \cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta$ και $\mathbf{k} = \sin\theta\mathbf{u}_r + \cos\theta\mathbf{u}_\theta$.
Άρα:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(\theta)) &= a\cos\theta(\cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta) + a\sin\theta(\sin\theta\mathbf{u}_r + \cos\theta\mathbf{u}_\theta)\\ &= a(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\mathbf{u}_r = a\mathbf{u}_r\end{aligned}$$

$\mathbf{F}(\gamma(\theta)) \perp \mathbf{ds}$ σε κάθε σημείο της διαδρομής και επομένως $W = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = 0$ όπως προηγουμένως.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ6

Παράδειγμα: Έστω $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ και έστω $\mathbf{F}(\gamma(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$.

Λύση: Έχουμε:

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Επίσης

$$\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) &= (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}) \cdot (\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \sin t \cos t - \cos t \sin t + t = t \end{aligned}$$

και

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} = 2\pi^2$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 2ου είδους - Δ7

Παρατήρηση: Επικαμπύλια ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν μέσω συμβολισμού διαφορικών μορφών. Αν $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, τότε:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz &= \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε τιν τιμή του ολοκληρώματος 2ου είδους: $I = \int_{\gamma} x^2 dx + xy dy + dz$ όπου $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = 1$.

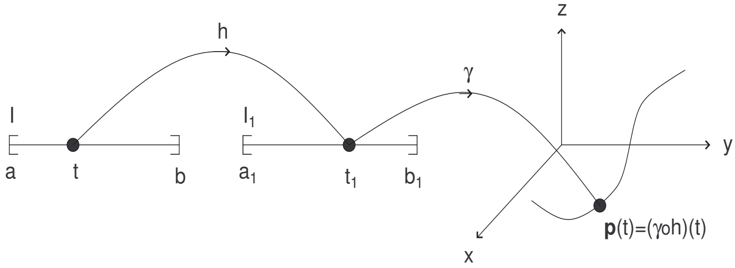
Λύση: Έχουμε: $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dz}{dt} = 0$. Επομένως $x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 0$ και

$$I = \int_0^1 (t^2 + t^3(2t) + 0) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_{t=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ1

Η παραμετρικοποίηση μιάς διαδρομής δεν είναι μοναδική (π.χ. μπορεί να διατρέχουμε την ίδια γεωμετρική καμπύλη αλλά με διπλάσια ταχύτητα).

Ορισμός: Έστω $h : I = [a, b] \to I_1 = [a_1, b_1]$ συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^1$ και $1-1$. Αν $\boldsymbol{\gamma} : I_1 \to \mathbb{R}^3$ τμηματικά $\mathcal{C}^1$ διαδρομή, τότε $\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma} \circ h : I \to \mathbb{R}^3$ λέγεται αναπαραμετρικοποίηση της διαδρομής $\boldsymbol{\gamma}$.



Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ2

Παρατήρηση: Εφόσον $\mathbf{p}(t) = \gamma(h(t))$, η γεωμετρική καμπύλη της διαδρομής παραμένει ίδια αλλά η μεταβλητή χρόνου μεταβάλλεται. Εναλλακτικά, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\mathbf{p}'(t) = (\boldsymbol{\gamma} \circ h)'(t) = \boldsymbol{\gamma}'(h(t))h'(t)$$

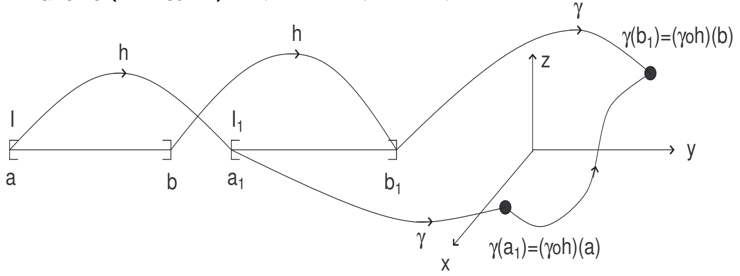
και επομένως η κατεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας της $\mathbf{p}$ δεν μεταβάλλεται, αλλά το διάνυσμα ταχύτητας της $\mathbf{p}$ είναι ίσο με το διάνυσμα ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$ πολλαπλασιασμένο με την (βαθμωτή) ποσότητα $h'(t)$ και άρα διατρέχουμε την ίδια καμπύλη με διαφορετική ταχύτητα.

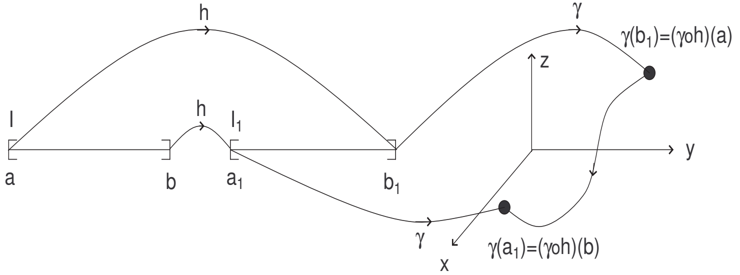
Παρατήρηση: Διακρίνουμε δύο τύπους αναπαραμετρικοποιήσεων:

- Ο προσανατολισμός της διαδρομής διατηρείται: $(\boldsymbol{\gamma} \circ h)(a) = \boldsymbol{\gamma}(a_1)$ και $(\boldsymbol{\gamma} \circ h)(b) = \boldsymbol{\gamma}(b_1)$.
- Ο προσανατολισμός της διαδρομής αντιστρέφεται: $(\boldsymbol{\gamma} \circ h)(a) = \boldsymbol{\gamma}(b_1)$ και $(\boldsymbol{\gamma} \circ h)(b) = \boldsymbol{\gamma}(a_1)$.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ3

Παρατήρηση (συνέχεια): 1η και 2 περίπτωση:





Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ4

Θεώρημα: Έστω $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο συνεχές στην $\mathcal{C}^1$ διαδρομή $\gamma : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ και έστω $\mathbf{p}$ μία αναμετρικοποίηση της γ. Αν η $\mathbf{p}$ διατηρεί τον προσανατολισμό της γ (περίπτωση 1η), τότε $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$, ενώ αν η $\mathbf{p}$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της γ (περίπτωση 2η), τότε $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$.

Απόδειξη: Έστω απεικόνιση h τ.ω. $\mathbf{p} = \gamma \circ h$. Από τον κανόνα της αλυσίδας: $\mathbf{p}'(t) = \gamma'(h(t))h'(t)$. Άρα

$$I := \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{p}'(t)dt = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t))h'(t)dt$$

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητών $s = h(t) \Rightarrow ds = h'(t)dt$:

$$\begin{aligned} t = a \Rightarrow s = h(a) &= a_1 \;\; \text{(ο προσανατολισμός διατηρείται)} \\ &= b_1 \;\; \text{(ο προσανατολισμός δεν διατηρείται)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = b \Rightarrow s = h(b) &= b_1 \;\; \text{(ο προσανατολισμός διατηρείται)} \\ &= a_1 \;\; \text{(ο προσανατολισμός δεν διατηρείται)} \end{aligned}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ5

Απόδειξη (συνέχεια): Επομένως αν ο προσανατολισμός διατηρείται:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

ενώ αν ο προσανατολισμο΄ς αντιστρέφεται,

$$I = \int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = -\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

$\square$

Το επόμενο Θεώρημα αναφέρεται στην αλλαγή παραμετρικοποίησης για επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου είδους:

Θεώρημα: Έστω διαδρομή γ τμηματικά $\mathcal{C}^1$ και f συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στην εικόνα της γ. Τότε, αν $\mathbf{p}$ είναι μία αναπαραμετρικοποίηση της γ,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\mathbf{p}} f(x, y, z) ds$$

(ανεξάρτητα από προσανατολισμό).

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ6

Απόδειξη: Έστω $I = \int_{\mathbf{p}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{p}(t))\|\mathbf{p}'(t)\|dt$. Έχουμε: $\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\gamma}(h(t))$ που συνεπάγεται ότι $\mathbf{p}'(t) = \boldsymbol{\gamma}'(h(t))h'(t)$. Άρα:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(h(t)))\|\boldsymbol{\gamma}'(h(t))\||h'(t)|dt \\ &= \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(h(t)))\|\boldsymbol{\gamma}'(h(t))\|h'(t)\text{sign}(h'(t))dt \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητών: $\tau = h(t) \Rightarrow d\tau = h'(t)dt$. Αν η $\mathbf{p}$ διατηρεί τον προσανατολισμό: $t = a \Rightarrow \tau = h(a) = a_1$ και $t = b \Rightarrow \tau = h(b) = b_1$. Επίσης, εφόσον η h είναι αύξουσα, $\text{sign}(h') = +1$ καί άρα:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{\gamma}(\tau))\|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\|d\tau = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f ds$$

Αν η $\mathbf{p}$ δεν διατηρεί τον προσανατολισμό: $t = a \Rightarrow \tau = h(a) = b_1$ και $t = b \Rightarrow \tau = h(b) = a_1$. Επίσης εφόσον η h είναι φθίνουσα, $\text{sign}(h') = -1$ και άρα

$$I = -\int_{b_1}^{a_1} f(\boldsymbol{\gamma}(\tau))\|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\|d\tau = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f ds$$

Σε κάθε περίπτωση: $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f ds$ ανεξάρτητα από την διατήρηση η μή του προσανατολισμού. $\square$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ6

Θεώρημα (Επικαμπύλια ολοκληρώματα 2ου είδους διανυσματικών πεδίων κλίσεων): Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ και $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, είναι τμηματικά $\mathcal{C}^1$ διαδρομή, τότε $\int_\gamma \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στην $F : t \mapsto f(\gamma(t))$,

$$F'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \boldsymbol{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad (*)$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού:

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Συνεπώς:

$$\int_\gamma \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \boldsymbol{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \overset{(*)}{=} \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$\square$

Παρατήρηση: Αν $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ πεδίο δυνάμεων, τότε το έργο $W = \int_\gamma \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{ds}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της διαδρομής γ. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο είναι *συντηρητικό* και η συνάρτηση f είναι το *δυναμικό* του. Το έργο $W = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ είναι ίσο με την διαφορά δυναμικού στα άκρα της διαδρομής. Αν τα άκρα ταυτίζονται (κλειστή διαδρομή) έχουμε $W = 0$.

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα: Αναπαραμετρικοποίηση-Δ7

Παράδειγμα: Έστω $\gamma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin^3 \frac{\pi t}{2}\right) := (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$.
Υπολογίστε την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος: $\int_\gamma ydx + xdy$.

Λύση: Αναγνωρίζουμε το πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ως την κλίση της συνάρτησης $f(x, y) = xy$, δηλαδή $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$. Έχουμε

$$\gamma(1) = \left(\frac{1}{4}, \sin^3 \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \text{ και } \gamma(0) = (0, 0)$$

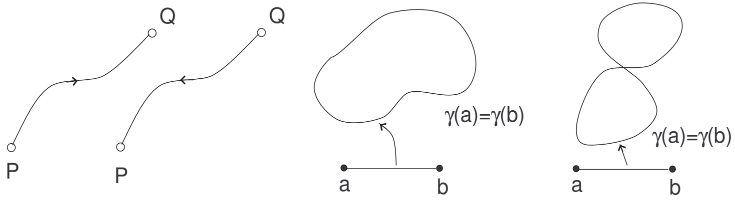
Επομένως: $\int_\gamma ydx + xdy = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = f\left(\frac{1}{4}, 1\right) - f(0, 0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$. $\square$

Παράδειγμα (Αναπαραμετρικοποίηση): Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ τμηματικά συνεχής διαδρομή.

- Η διαδρομή $\gamma_{\alpha\nu\tau} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ είναι μία αναπαραμετρικοποίηση της γ που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $h : [a, b] \to [a, b]$, $t \mapsto a + b - t$ και αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Η $\gamma_{\alpha\nu\tau}$ λέγεται αντίθετη διαδρομή της γ.
- Η διαδρομή $\mathbf{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(a + (b - a)t)$ διατηρεί τον προσανατολισμό της γ και αντιστοιχεί στην απεικόνιση $h : [0, 1] \to [a, b]$, $t \mapsto a + (b - a)t$.

Ολοκληρώματα επί γεωμετρικών καμπυλών - Δ1

Επειδή τα επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου και 2ου είδους είναι ανεξάρτητα από την παραμετρικοποίηση (εκτός πιθανόν από το πρόσημο) μπορούμε να διατυπώσουμε την θεωρία με πιο γεωμετρικό τρόπο.



- *Απλή* καμπύλη Γ είναι η εικόνα μίας τμηματικά $\mathcal{C}^1$ και $1-1$ απεικόνισης $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Αν $I = [a, b]$, τότε $\boldsymbol{\gamma}(a)$ και $\boldsymbol{\gamma}(b)$ είναι τα άκρα της καμπύλης.
- Σε κάθε απλή καμπύλη με άκρα τα σημεία $P = \boldsymbol{\gamma}(a)$ και $Q = \boldsymbol{\gamma}(b)$ αντιστοιχούν δύο προσανατολισμοί (κατευθύνσεις), $P \to Q$ και $Q \to P$. *Προσανατολισμένη απλή καμπύλη:* Απλή καμπύλη με κατεύθυνση.
- *Απλή κλειστή καμπύλη:* Εικόνα μιάς τμηματικά $\mathcal{C}^1$ απεικόνισης $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ που είναι $1-1$ στο $[a, b)$ και ικανοποιεί: $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$

Ολοκληρώματα επί γεωμετρικών καμπυλών - Δ2

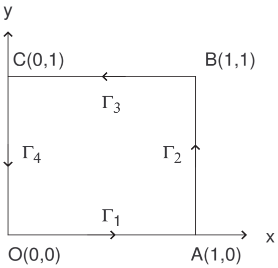
- Αν η γ ικανοποιεί την συνθήκη $\gamma(a) = \gamma(\beta)$ αλλά δεν είναι απαραίτητα $1-1$ στο $[a, b)$, τότε η εικόνα της είναι *κλειστή καμπύλη*.
- Κάθε απλή κλειστή καμπύλη έχει δύο προσανατολισμούς που αντιστοιχούν στις δύο δυνατές κατευθύνσεις κίνησης κατά μήκος της καμπύλης.
- Ορίζουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα 2ου και 1ου είδους, αντίστοιχα, επί προσανατολισμένων απλών καμπυλών και απλών κλειστών καμπυλών Γ:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \;\; \text{και} \;\; \int_\Gamma f ds = \int_\gamma f ds$$

  όπου γ μία παραμετροποίηση της καμπύλης Γ που διατηρεί τον προσανατολισμό.
- Αν Γ^- είναι η ιδια καμπύλη με την Γ αλλά με αντίθετο προσανατολισμό, τότε $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{\Gamma^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$.
- Αν Γ είναι προσανατολισμένη καμπύλη που αποτελείται από προσανατολισμένες συνιστώσες καμπύλες Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} + \ldots + \int_{\Gamma_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$.

Ολοκληρώματα επί γεωμετρικών καμπυλών - Δ3

Παράδειγμα: Έστω Γ η περίμετρος του τετραγώνου $OABCO$ στον $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ και $C(0,1)$ με αριστερόστροφο προσανατολισμό. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma x^2 dx + xydy$.



Λύση: Ορίζουμε παραμετρικοποίηση της καμπύλης Γ με τον κατάλληλο προσανατολισμό:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} : [0,4] \to \mathbb{R}^3 : \quad t &\mapsto (t,0) & \Gamma_1 &= \{t : 0 \leq t \leq 1\} \\
&\mapsto (1, t-1) & \Gamma_2 &= \{t : 1 \leq t \leq 2\} \\
&\mapsto (3-t, 1) & \Gamma_3 &= \{t : 2 \leq t \leq 3\} \\
&\mapsto (0, 4-t) & \Gamma_4 &= \{t : 3 \leq t \leq 4\}
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώματα επί γεωμετρικών καμπυλών - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια): Έχουμε:

$$\int_{\Gamma_1} x^2dx + xydy = \int_0^1 \left(t^2\frac{dx}{dt} + 0\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \;\; (x' = 1, y' = 0)$$

$$\int_{\Gamma_2} x^2dx + xydy = \int_1^2 \left(1^2\frac{dx}{dt} + 1(t-1)\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_1^2 (t-1)dt$$

$$= \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \;\; (x' = 0, y' = 1)$$

$$\int_{\Gamma_3} x^2dx + xydy = \int_2^3 \left((3-t)^2\frac{dx}{dt} + (3-t)\cdot 1\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^1 t^2 dt$$

$$= \int_2^3 -(3-t)^2 dt = \left[\frac{(3-t)^3}{3} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} \;\; (x' = -1, y' = 0)$$

$$\int_{\Gamma_4} x^2dx + xydy = \int_3^4 \left(0^2\frac{dx}{dt} + 0(4-t)\frac{dy}{dt} \right) dt = 0 \;\; (x' = 0, y' = -1)$$

και επομένως $\int_\Gamma x^2dx + xydy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$.

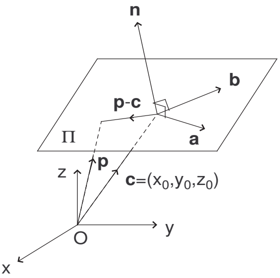
Παραμετρικοποιημένες Επιφάνειες - Δ1

Ορισμός: Παραμετρικοποίηση μίας επιφάνειας είναι συνάρτηση: $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ όπου D χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Η επιφάνεια $S = \Phi(D)$ (η εικόνα του D μέσω της Φ). Γράφουμε:

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Αν η Φ είναι παραγωγίσιμη η κλάσης $\mathcal{C}^1$ (ισοδύναμα $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ είναι παραγωγίσιμες, η συναρτήσεις $\mathcal{C}^1$ του ζεύγους (u, v)), καλούμε την S παραγωγίσιμη η επιφάνεια $\mathcal{C}^1$.

Παραμετρικοποίηση επιπέδου: Έστω επίπεδο Π, παράλληλο σε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα **a** και **b**, το οποίο διέρχεται από σημείο $\mathbf{c} = (x_0, y_0, z_0)$. Αν $\mathbf{n} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, τότε $\mathbf{n} \perp \Pi$.



Παραμετρικοποιημένες Επιφάνειες - Δ2

Αν $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \Pi$ (αυθαίρετο), τότε

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow (n_1, n_2, n_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

και επομένως

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0$$

που είναι η εξίσωση του Π σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Μία διανυσματική παραμετρικοποίηση του Π είναι:

$$\Phi(u, v) = \Pi = \{u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + \mathbf{c} : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

Εφαπτόμενα επίπεδα σε παραμετρικοποιημένες επιφάνειες: Έστω $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ παραμετρικοποιημένη επιφάνεια, παραγωγίσιμη στο $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Κρατώντας το u_0 σταθερό, ορίζουμε απεικόνιση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \Phi(u_0, t)$, η εικόνα της οποίας είναι καμπύλη της επιφάνειας. Το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής της καμπύλης στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ είναι:

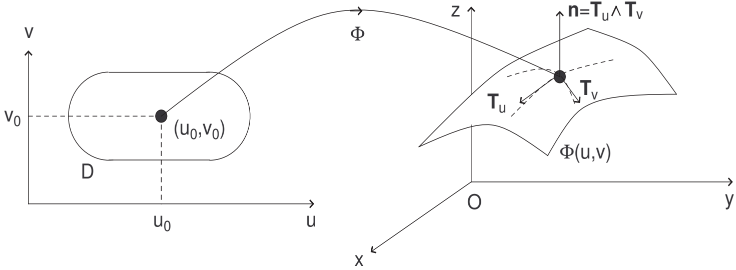
$$T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

Αντίστοιχα, κρατώντας το $v = v_0$ σταθερό, παίρνουμε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $t \mapsto \Phi(t, v_0)$ στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$:

$$T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

Παραμετρικοποιημένες Επιφάνειες - Δ3

Εφόσον $\mathbf{T}_u$ και $\mathbf{T}_v$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα σε δύο καμπύλες της επιφάνειας στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$, το διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v$ είναι κάθετο στην επιφάνεια σε αυτό το σημείο (δηλαδή κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$.



- Η επιφάνεια $S = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι *κανονική (ομαλή)* στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ αν $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\Phi(u_0, v_0)$ γράφεται ως $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, όπου $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$.
- Η επιφάνεια $S = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι *κανονική (ομαλή)* αν είναι κανονική σε κάθε σημείο $\Phi(u_0, v_0) \in S$.

Παραμετρικοποιημένες Επιφάνειες - Δ4

Παράδειγμα: Έστω ότι $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$. Που υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο; Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(1,0)$.

Λύση: Έχουμε:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = -u\sin v\mathbf{i} + u\cos v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

και επομένως

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 2v \end{bmatrix}$$
$$= (2v\sin v - 2u^2\cos v)\mathbf{i} - (2v\cos v + 2u^2\sin v)\mathbf{j} + u(\cos^2 v + u\sin^2 v)\mathbf{k}$$

Παραμετρικοποιημένες Επιφάνειες - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v)(u_0, v_0) = \mathbf{0} &\Rightarrow u_0 = 0 \Rightarrow v_0 \sin v_0 = 0 \text{ και } v_0 \cos v_0 = 0 \\ &\Rightarrow u_0 = 0 \text{ και } v_0^2(\sin^2 v_0 + \cos^2 v_0) = 0 \\ &\Rightarrow (u_0, v_0) = (0,0) \\ &\Rightarrow \Phi(u_0, v_0) = (0,0,0)\end{aligned}$$

και άρα το μόνο μη-κανονικό σημείο της επιφάνειας $\{\Phi(u,v) : (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ είναι το σημείο $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Στο σημείο $(u_0, v_0) = (1,0)$ έχουμε $(x,y,z) = (1,0,1)$ και

$$\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v)(u_0, v_0) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

Άρα το εφαπτομενικό επίπεδο είναι

$$(x-1, y, z-1) \cdot (-2, 0, 1) = 0 \Rightarrow 2(x-1) = z - 1 \Rightarrow z = 2x - 1$$

Εμβαδόν Επιφάνειας - Δ1

Έστω παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Έστω ότι η S είναι κανονική στο σημείο $\Phi(u,v) \in S$, δηλ. $\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, όπου

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathbf{k}$$

Γενικά εξετάζουμε *τμηματικά κανονικές* επιφάνειες $S = \cup_i S_i$, $S_i = \Phi_i(D_i)$, $\Phi_i : D_i \to \mathbb{R}^3$, όπου:

- D_i στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^2$ (x-απλό, y-απλό).
- Φ_i είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ και $1-1$ εκτός (ίσως) από το σύνορο του D_i, ∂D_i.
- $S_i = \Phi_i(D_i)$ κανονική, εκτός (ίσως) από πεπερασμένο πλήθος σημείων.

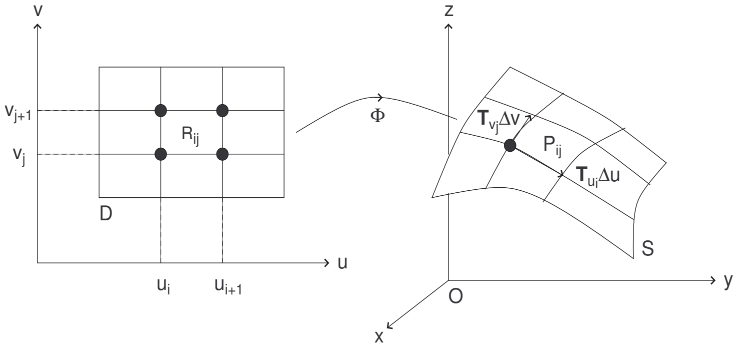
Το εμβαδόν $A(S)$ παραμετρικοποιημένης επιφάνειας S ορίζεται ως:

$$A(S) = \int\int_D \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| dudv$$

και $dS = \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| dudv$ είναι το βαθμωτό στοιχείο επιφάνειας. Αν $S = \cup S_i$ τμηματικά κανονική, τότε $A(S) = \sum_i A(S_i)$.

Εμβαδόν Επιφάνειας: Γεωμετρική ερμηνεία - Δ2

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο R στο (u, v) επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες u και v. Θεωρούμε κανονική διαμέριση του R και έστω R_{ij} το (i, j) ορθογώνιο της διαμέρισης με κορυφές (u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}) και (u_{i+1}, v_{j+1}), $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$. Έστω $\mathbf{T}_{u_i}\Delta u$ και $\mathbf{T}_{v_j}\Delta v$ τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια στο σημείο $\Phi(u_i, v_j) := (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ όπου $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ και $\Delta v = v_{j+1} - v_j$. Τα διανύσματα σχηματίζουν παραλληλόγραμμο P_{ij}.



Εμβαδόν Επιφάνειας: Γεωμετρική ερμηνεία - Δ3

Έχουμε:

$$A(P_{ij}) \approx \|\mathbf{T}_{u_i}\Delta u \wedge \mathbf{T}_{v_j}\Delta v\| = \|\mathbf{T}_{u_i} \wedge \mathbf{T}_{v_j}\|\Delta u\Delta v$$

και επομένως:

$$A(S) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{T}_{u_i} \wedge \mathbf{T}_{v_j}\|\Delta u\Delta v \to \int\int_D \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| du dv$$

καθώς $n \to \infty$. Επίσης:

$$\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

Επομένως:

$$\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

και

$$A(S) = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} du dv$$

Εμβαδόν Επιφάνειας - Δ4

Παράδειγμα: Έστω $D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\theta) = (x,y,z)$, όπου: $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\sin\theta$, $z(r,\theta) = r$ (παραμετρικοποίηση κώνου). Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου.

Λύση: Έχουμε:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = r\sin\theta$$

Άρα

$$\|\mathbf{T}_r \wedge \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = \sqrt{2}r$$

και

$$A(s) = \int\int_D \|\mathbf{T}_r \wedge \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{2} r d\theta dr = 2\sqrt{2}\pi \int_{r=0}^{1} r dr$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{1} = \sqrt{2}\pi$$

Εμβαδόν Επιφάνειας - Δ5

Παράδειγμα (συνέχεια): Αυστηρά, η εφαρμογή του Θεωρήματος για τον παραπάνω υπολογισμό απαιτεί να δείξουμε ότι η Φ είναι $1-1$ αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της Φ στο εσωτερικό του D, δηλαδή στο σύνολο:

$$D^o = D \setminus \partial D = \{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$$

Έστω $\Phi(r,\theta) = \Phi(r_1,\theta_1)$, $(r,\theta) \in D^o$, $(r_1,\theta_1) \in D^o$. Τότε

$$\Phi(r,\theta) = \Phi(r_1,\theta_1) \Rightarrow \begin{cases} r\cos\theta = r_1\cos\theta_1 \\ r\sin\theta = r_1\sin\theta_1 \\ r = r_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta_1 \\ \sin\theta = \sin\theta_1 \\ r = r_1 \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{cases} \theta = \theta_1 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ r = r_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_1 \ \ (\text{εφόσον } |\theta - \theta_1| < 2\pi) \\ r = r_1 \end{cases}$$

και επομένως πράγματι η Φ είναι $1-1$ στο D^o.

Εμβαδόν Επιφάνειας γραφήματος $z = g(x, y)$, $g \in \mathcal{C}^1$ - Δ6

Εδώ η S είναι στην μορφή $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ και επιδέχεται παραμετρικοποίηση:

$$S = \Phi(D) = \{(x, y, z) : x = u,\ y = v,\ z = g(u, v),\ (u, v) \in D\}$$

Έχουμε

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{k}$$

Επομένως:

$$\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial u}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Επομένως:

$$\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \Rightarrow A(S) = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Ολοκληρώματα βαθμωτών συναρτήσεων επί επιφανειών - Δ1

Ορισμός: Έστω επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ που παραμετρικοποιείται με απεικόνιση $\Phi : D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου D στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Αν $f(x, y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση ορισμένη στην S, τότε το ολοκλήρωμα της f επί της S ορίζεται ως:

$$\int\int_S f(x, y, z)dS = \int\int_S fdS = \int\int_D f(\Phi(u, v))\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\|dudv$$

όπου

$$\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}$$

Αν $f \equiv 1$ τότε $\int\int_S dS = A(s)$, το εμβαδόν της S, όπως προηγουμένως.

Παράδειγμα: Έστω επιφάνεια που ορίζεται από την απεικόνιση:

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \ \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) = (x, y, z)$$

και $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ (ελικοειδές). Αν

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

να βρεθεί το $\int\int_S fdS$.

Ολοκληρώματα βαθμωτών συναρτήσεων επί επιφανειών - Δ2

Παράδειγμα (συνέχεια):

Λύση: Παρόμοια με προηγούμενο υπολογισμό:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r, \ \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin\theta \ \text{ και } \ \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \cos\theta$$

Επομένως:

$$\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| = \sqrt{r^2 + \sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{r^2+1}$$

Επίσης:

$$f(\Phi(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) = \sqrt{r^2+1}$$

Άρα

$$\int\int_S f dS = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\,d\theta dr = 2\pi\int_{r=0}^{1}(r^2+1)dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}+r\right]_{r=0}^{1} = 2\pi\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Ολοκληρώματα βαθμωτών συναρτήσεων επί επιφανειών - Δ3

Παράδειγμα: Έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την συνάρτηση $z = g(x, y) = x^2 + y$ και όπου $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_S x dS$.

Λύση: Έχουμε:

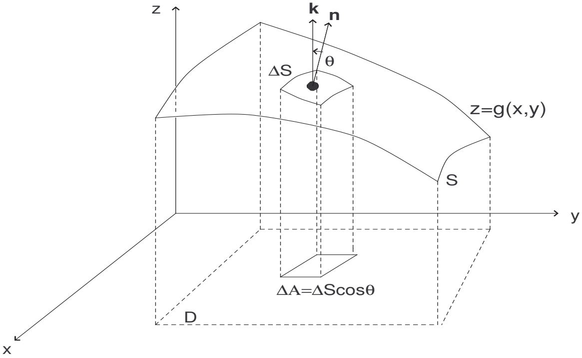
$$
\begin{aligned}
\int \int_S f dS &= \int \int_D x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\
&= \int_{x=0}^{1} x \sqrt{4x^2 + 2} dx \int_{y=-1}^{1} dy \\
&= \frac{1}{4} \int_{x=0}^{1} 8x(4x^2 + 2)^{1/2} dx \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{(4x^2 + 2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{1}{6}(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώματα επί γραφημάτων - Δ1

Αν S είναι το γράφημα συνάρτησης $z = g(x, y)$ ένας εναλλακτικός τύπος για επιφανειακά ολοκληρώματα συνάρτησης f επί της S είναι:

$$\int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}dxdy$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$ που είναι κάθετο στην επιφάνεια S στο σημείο $(x, y, g(x, y))$ με το μοναδιαίο διάνυσμα k που είναι παράλληλο με την θετική κατεύθυνση του άξονα των z.



Ολοκληρώματα επί γραφημάτων - Δ2

Εφόσον η S περιγράφεται ως επιφάνεια στάθμης: $\phi = z - g(x,y) = 0$, έχουμε

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \ \perp S$$

Επομένως

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \|\mathbf{n}\|\cos\theta = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{k} = 1$$

που συνεπάγεται ότι:

$$\cos\theta\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Από προηγούμενη ανάλυση:

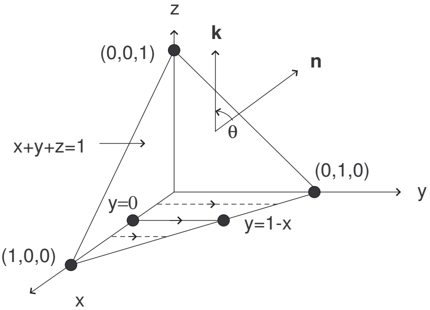
$$I := \int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_D f(x,y,g(x,y))\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\|dxdy$$

και επομένως

$$\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \Rightarrow I = \int\int_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}dxdy$$

Ολοκληρώματα επί γραφημάτων - Δ3

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα επιφανείας $I = \int\int_S x dS$ όπου S η επιφάνεια που περικλείει το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.



Λύση: Εξίσωση επιπέδου:

$$f(x,y,z) = x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z$$

Διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το τρίγωνο:

$$\mathbf{n} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Ολοκληρώματα επί γραφημάτων - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως, μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

και επομένως

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

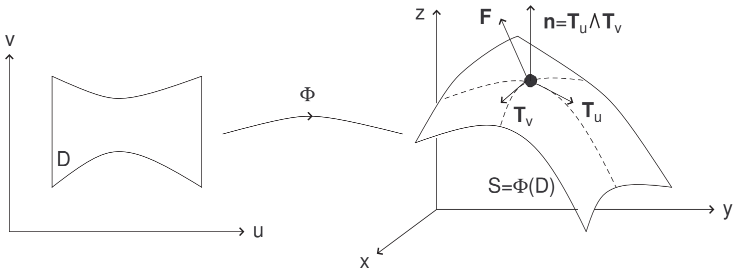
Άρα:

$$\int\int_S x dS = \int\int_D \frac{x}{\cos\theta} dA = \int\int_D \frac{x}{1/\sqrt{3}} dA = \sqrt{3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x dy dx$$
$$= \sqrt{3}\int_{x=0}^{1} x(1-x)dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1}$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ1

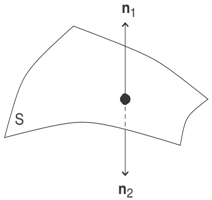
Ορισμός: Έστω **F** διανυσματικό πεδίο στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S = \Phi(D)$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του **F** επί της S ορίζεται ως:

$$\int\int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int\int_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v) dudv$$



Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων: Προσανατολισμός επιφανειών - Δ2

Μία *προσανατολισμένη επιφάνεια* είναι *δίπλευρη* επιφάνεια S με μία εξωτερική (θετική) και μία εσωτερική (αρνητική) πλευρά που αντιστοιχούν, αντίστοιχα, σε δύο μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ κάθετα στην S σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in S$. Αν $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $S = \Phi(D)$ και η S είναι κανονική στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$, τότε: $\frac{\mathbf{T}_{u_0} \wedge \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \wedge \mathbf{T}_{v_0}\|} = \pm \mathbf{n}_1$, $(-\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2)$.



Αν το διάνυσμα $\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v$ έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της επιφάνειας, τότε λέμε ότι η παραμετρικοποίηση Φ διατηρεί τον προσανατολισμό, διαφορετικά τον αντιστρέφει. Για κλειστές επιφάνειας η έννοια της εξωτερικής επιφάνειας είναι προφανής διαισθητικά, ενώ για ανοικτές επιφάνειες μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα.

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ3

Παράδειγμα: Έστω D το ορθογώνιο του επιπέδου (θ, ϕ) που ορίζεται από τις ανισότητες $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq \phi \leq \pi$ και έστω S η επιφάνεια που ορίζεται απο την παραμετρικοποίηση:

$$\Phi(\theta, \phi) = (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = (\cos\theta \sin\phi,\ \sin\theta \sin\phi,\ \cos\phi)$$

δηλαδή η S είναι η επιφάνεια μοναδιαίας σφαίρας παραμετρικοποιημένη σε πολικές σφαιρικές συντεταγμένες θ και ϕ (με $r = 1$). Έστω $\mathbf{r} \in S$ το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\int_{\Phi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{dS}$.

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε:

$$\mathbf{T}_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\sin\theta \sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\theta \sin\phi\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_\phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \cos\theta \cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\theta \cos\phi\, \mathbf{j} - \sin\phi\, \mathbf{k}$$

και

$$\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix}$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως:

$$\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi = -\cos\theta\sin^2\phi\,\mathbf{i} - \sin\theta\sin^2\phi\,\mathbf{j} - (\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)\,\mathbf{k}$$
$$= -\cos\theta\sin^2\phi\,\mathbf{i} - \sin\theta\sin^2\phi\,\mathbf{j} - \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi) &= (\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}) \\ &\quad\cdot(-\cos\theta\sin^2\phi\,\mathbf{i} - \sin\theta\sin^2\phi\,\mathbf{j} - \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}) \\ &= -\cos^2\theta\sin^3\phi - \sin^2\theta\sin^3\phi - \cos^2\phi\sin\phi \\ &= -\sin^3\phi - \sin\phi\cos^2\phi = -\sin\phi(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= -\sin\phi\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int\int_\Phi \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi)d\theta d\phi$$
$$= \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}(-\sin\phi)d\theta d\phi = 2\pi\left[\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\pi} 2\pi(-1-1) = -4\pi$$

Παρατήρηση: Το εμβαδόν της επιφάνειας μοναδιαίας σφαίρας είναι 4π.

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ5

Παρατήρηση: Στό προηγούμενο παράδειγμα το διάνυσμα θέσης που προκύπτει από την παραμετρικοποίηση:

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) := (x, y, z)$$

είναι:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \cos\theta \sin\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta \sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} = \mathbf{u}_r$$

όπου $\mathbf{u}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική κατεύθυνση του σφαιρικού πολικού συστήματος συντεταγμένων. Τα άλλα δύο μοναδιαία διανύσματα του συστήματος αυτού είναι:

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{u}_\phi = \cos\theta \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta \cos\phi\,\mathbf{j} - \sin\phi\,\mathbf{k}$$

Επομένως, από την λύση του παραδείγματος:

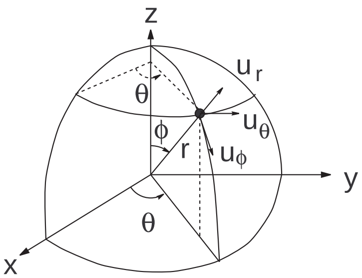
$$\mathbf{T}_\theta = \sin\phi(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) = \sin\phi\,\mathbf{u}_\theta$$
$$\mathbf{T}_\phi = \cos\theta \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta \cos\phi\,\mathbf{j} - \sin\phi\,\mathbf{k} = \mathbf{u}_\phi$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ6

Παρατήρηση (συνέχεια): Επομένως (δείτε παρακάτω διάγραμμα) το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_\phi$ κατευθύνεται προς το εσωτερικό της σφαίρας. Επίσης, εφόσον $0 \leq \phi \leq \pi$, $\sin\phi \geq 0$, το διάνυσμα

$$\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi = \sin\phi \, \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_\phi$$

κατευθύνεται προς το κέντρο της σφαίρας και η παραμετρικοποίηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό.



Επομένως, για την συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi) = \mathbf{u}_r \cdot (\sin\phi \, \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_\phi) = -\sin\phi$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ7

Παρατήρηση (συνέχεια): και

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Phi} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} &= \int\int_{D} \mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi)d\theta d\phi = \int\int_{D} \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}(-\sin\phi)d\theta d\phi \\
&= \int\int_{D} \|\mathbf{r}\|^2(-\sin\phi)d\theta d\phi = \int\int_{D}(-\sin\phi)d\theta d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}(-\sin\phi)d\theta d\phi = 2\pi\int_0^{\pi}(-\sin\phi)d\phi \\
&= 2\pi\left[\cos\phi\right]_0^{\pi} = -4\pi \\
&= (-1)\times \text{Εμβαδόν επιφανείας μοναδιαίας σφαίρας}
\end{aligned}$$

Μιά παραμετρικοποίηση που διατηρεί τον προσανατολισμό προκύπτει αν αντιστρέψουμε την σειρά των παραμέτρων (θ, ϕ), δηλαδή αν ορίσουμε

$$\hat{D} = \{(\phi,\theta) : 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}, \hat{\Phi} : \hat{D} \to \mathbb{R}^3$$

Τότε $\mathbf{T}_\phi \wedge \mathbf{T}_\theta = -\mathbf{T}_\theta \wedge \mathbf{T}_\phi = \sin\phi\, \mathbf{u}_r$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό της σφαίρας και $\int\int_{\hat{\Phi}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$.

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων: Ανεξαρτησία από παραμετρικοποίηση - Δ8

Θεώρημα: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και $\mathbf{F}$ συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S.

- Αν Φ_1, Φ_2 δύο κανονικές παραμετρικοποιήσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό, τότε

$$\int\int_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int\int_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} := \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$$

- Αν η Φ_1 διατηρεί τον προσανατολισμό και η Φ_2 τον αντιστρέφει, τότε

$$\int\int_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} := \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = -\int\int_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$$

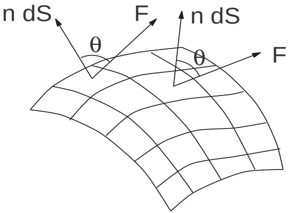
- Αν η f είναι συνεχής βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη στην S και Φ_1, Φ_2 δύο παραμετρικοποιήσεις της S, τότε

$$\int\int_{\Phi_1} f dS = \int\int_{\Phi_2} f dS$$

(ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό).

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων: Φυσική σημασία - Δ9

Έστω **F** διανυσματικό πεδίο ταχύτητας ρευστού διαμέσω (καμπύλης) επιφάνειας S. Ποιά είναι η ροή Q (σε m^3/s) του ρευστού διαμέσω της S;



Η ροή διαμέσω του στοιχείου επιφάνειας dS είναι:

$$dQ = \|\mathbf{F}\| \cos\theta dS = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} dS) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$$

όπου $\mathbf{n} \perp dS$, $\|\mathbf{n}\| = 1$. Επομένως, για παραμετρικοποίηση της S που διατηρεί τον προσανατολισμοό,

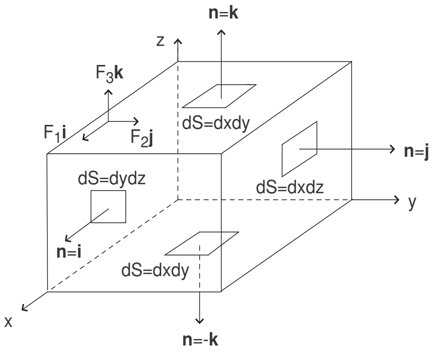
$$Q = \int\int_\Phi \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v) dudv = \int\int_\Phi \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| dudv$$
$$= \int\int_\Phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int_\Phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ10

Παράδειγμα: Να βρεθεί το ολοκλήρωμα επιφάνειας (ροή) του πεδίου $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + y^2zx\mathbf{j} + z^2xy\mathbf{k}$ διαμέσω της επιφάνειας κύβου που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ και $z = 1$.

Λύση: Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$. Έχουμε

$$Q = \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^{6} \int\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$



Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ11

Παράδειγμα (συνέχεια): όπου

- S_1 κάτω έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ και:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) = -F_3(x, y, 0) = 0^2 xy = 0$$

Άρα $\int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} 0 dydx = 0.$

- S_2 μπροστινή έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ και:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = F_1(1, y, z) = 1^2 yz, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$$

$$\text{Άρα:} \quad \int\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} yzdzdy = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- S_3 δεξιά έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ και:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}) = F_2(x, 1, z) = 1^2 xz, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$$

$$\text{Αρα:} \quad \int\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1} xzdzdx = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα (συνέχεια):

- S_4 πάνω έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ και:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = F_3(x, y, 1) = 1^2 xy = xy$$

Άρα $\int\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} dy dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- S_5 πίσω έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ και:

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i}) = -F_1(0, y, z) = 0, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$

$$\text{Αρα:} \quad \int\int_{S_5} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} 0 dy dz = 0$$

- S_6 αριστερή έδρα: Επομένως $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ και:

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{j}) = -F_2(x, 0, z) = 0, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$

$$\text{Αρα:} \quad \int\int_{S_6} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1} 0 dz dx = 0$$

Επομένως:

$$Q = \int\int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^{6} \int\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{3}{4}$$

(Πιό εύκολος υπολογισμός με Θεώρημα Gauss - στην συνέχεια).

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων - Δ13

Παράδειγμα: Στη Φυσική, αν $T(x, y, z)$ είναι βαθμωτό πεδίο θερμοκρασίας που περιγράφεται από συνάρτηση κλάσης $\mathcal{C}^1$, τότε η θερμότητα $\mathbf{F}$ ρέει κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = -k\nabla T$ όπου k θετική σταθερά. Έστω $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και $S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ (με τον συνηθισμένο θετικό προσανατολισμό). Να βρεθεί η ροή θερμότητας διαμέσω της S_1 αν $k = 1$.

Λύση: Έχουμε $\mathbf{F} = -\nabla T = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} := -2\mathbf{r}$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
Q &= \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -2 \int\int_{S_1} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} dS = -2 \int\int_{S_1} \|r\| dS \\
&= -2 \int\int_{S_1} dS = -2(4\pi) = -8\pi
\end{aligned}
$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η θερμότητα ρέει από το εξωτερικό της σφαίρας (όπου $T > 1$) προς το εσωτερικό της σφαίρας (όπου $T < 1$).

Απόκλιση, Στροβιλισμός, Θεωρήματα Gauss, Stokes και Green

Απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου - Δ1

Για τον μαθηματικό συμβολισμό της απόκλισης και του στροβιλισμού χρησιμοποιούμε τον διανυσματικό τελεστή ανάδελτα ($\boldsymbol{\nabla}$):

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

τον οποίο έχουμε ήδη συναντήσει στον ορισμό κλίσης βαθμωτού διανυσματικού πεδίου $f(x, y, z)$, δηλ. $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

Ορισμός 1: Αν $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ είναι διανυσματικό πεδίο κλάσης $\mathcal{C}^1$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε η απόκλιση του $\mathbf{F}$ είναι το βαθμωτό πεδίο:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει το μειονέκτημα ότι εξαρτάται από ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων (Καρτεσιανό). Ένας ισοδύναμος ορισμός ανεξάρτητος από σύστημα συντεταγμένων είναι ο ακόλουθος:

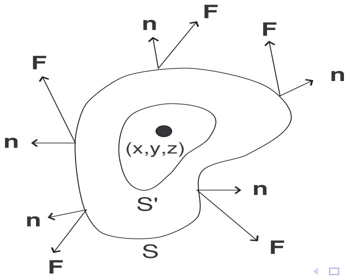
Απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου - Δ2

Ορισμός 2: Αν $\mathbf{F}(x, y, z)$ είναι διανυσματικό πεδίο κλάσης $\mathcal{C}^1$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε η απόκλιση του $\mathbf{F}$ είναι το βαθμωτό πεδίο:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS}{\delta V}$$

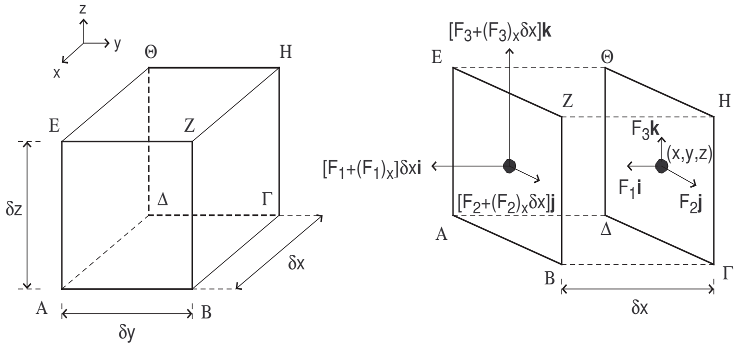
όπου S προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που περικλείει όγκο δV και $\mathbf{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο σε κάθε σημείο της S με θετική κατεύθυνση, δηλ. με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της επιφάνειας S.

Παρατήρηση: Η $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ στο σημείο (x, y, z) ορίζεται ως το όριο του λόγου της ροής του πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσω κλειστής επιφάνειας S προς τον όγκο που περικλείει η S, καθώς η επιφάνεια S συρρικνώνεται γύρω από το σημείο (x, y, z) (και επομένως ο όγκος που περικλείεται από την S τείνει στο 0).



Απόκλιση διανυσματικού πεδίου: Ισοδυναμία ορισμών - Δ3

Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκη ακμών δx, δy και δz και έδρες παράλληλες στα επίπεδα (x, y), (x, z) και $y, z)$.



Εξετάζουμε την ροή πεδίου F στην κατεύθυνση του x-άξονα μέσω της επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου. Η ροή είναι μη-μηδενική μόνο μέσω των εδρών ΓΔΘΗ και ΑΒΖΕ.

Απόκλιση διανυσματικού πεδίου: Ισοδυναμία ορισμών - Δ4

Προσεγγιστικά για μικρά δx, δy και δz,

$$\int\int_{\Gamma\Delta\Theta\mathrm{H}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i})\delta y\delta z = -F_1\delta y\delta z$$

και

$$\int\int_{\mathrm{ABZE}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left\{\left[F_1+\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x\right]\mathbf{i}+\left[F_2+\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x\right]\mathbf{j}+\left[F_3+\frac{\partial F_3}{\partial x}\delta x\right]\mathbf{k}\right\}\cdot\mathbf{i}\delta y\delta z$$

$$= F_1\delta y\delta z + \frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

Επομένως, η συνολική ροή στην διεύθυνση του x-άξονα είναι: $Q_x \approx \frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$. Παρόμοια η συνολική ροή στην διεύθυνση του y και z άξονα είναι: $Q_y \approx \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$ και $Q_z \approx \frac{\partial F_3}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$, αντίστοιχα. Άρα, εφόσον $\delta V = \delta x\delta y\delta z$:

$$Q_x+Q_y+Q_z \approx \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\delta V$$

και στο όριο καθώς $\delta V \to 0$,

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Απόκλιση διανυσματικού πεδίου σε πολικές συντεταγμένες (κυλινδρικές, σφαιρικές) - Δ5

- Απόκλιση σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right)$$

  όπου F_r, F_θ και F_z η ακτινική, εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα της $\mathbf{F}$, αντίστοιχα.

- Απόκλιση σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi F_\phi) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

  όπου F_r, F_θ και F_ϕ οι συνιστώσες της $\mathbf{F}$ ως προς τις διευθύνσεις $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ και $\mathbf{u}_\phi$, αντίστοιχα.

- Δεν χρειάζεται απομνημόνευση! ....

Θεώρημα Gauss - Δ1 -

Θεώρημα (Gauss): Έστω V συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με κλειστή, τμηματικά $\mathcal{C}^1$ και θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια $S = \partial V$. Έστω $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο κλάσης $\mathcal{C}^1$ στο V. Τότε το ολοκλήρωμα επιφάνειας του $\mathbf{F}$ διαμέσω της S είναι ίσο με το τριπλό ολοκλήρωμα (όγκου) της απόκλισης του πεδίου $\mathbf{F}$ ως προς V, δηλαδή.

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

όπου dV είναι το στοιχείο όγκου και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε κάθε σημείο της επιφάνειας S με θετική κατεύθυνση (δηλ. με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της S).

Απόδειξη: Marsden & Tromba. $\square$

Θεώρημα Gauss - Δ2 -

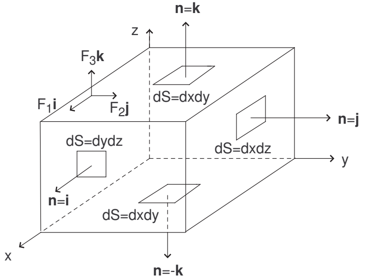
Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο): Να βρεθεί το ολοκλήρωμα επιφάνειας (ροή) του πεδίου $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + y^2zx\mathbf{j} + z^2xy\mathbf{k}$ διαμέσω της επιφάνειας κύβου που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ και $z = 1$.

Λύση: Η απόκλιση του πεδίου είναι: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 6xyz$.
Επομένως από το Θεώρημα του Gauss:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}dv = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1\int_{z=0}^1 6xyz\, dzdydx$$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x=0}^1 = 6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

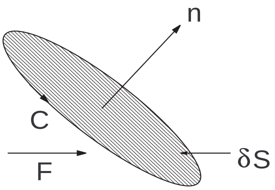
όπως προηγουμένως.



Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου - Δ1

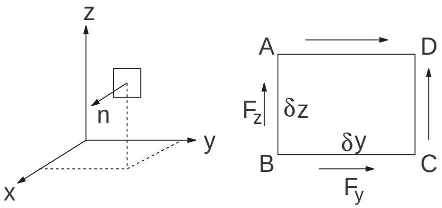
Ορισμός (ανεξάρτητος συστήματος συντεταγμένων): Ό *στροβιλισμός* (curl) διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ κλάσης $\mathcal{C}^1$ σε σημείο (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η προβολή του κατά μήκος μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$ αυθαίρετης κατεύθυνσης είναι ίση με το όριο του λόγου της τιμής αριστερόστροφου επικαμπύλιου ολοκληρώματος του πεδίου $\mathbf{F}$ κατά μήκος κλειστής καμπύλης C που περιβάλλει το σημείο (x, y, z) και κείται σε επίπεδο κάθετο στο $\mathbf{n}$, προς το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την C, καθώς η C συρρικνώνεται γύρω από το σημείο (x, y, z) (και επομένως το εμβαδόν τείνει στο 0), δηλαδή:

$$(\mathrm{Curl}\mathbf{F})_{\mathbf{n}} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}}{\delta S}$$



Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου: Καρτεσιανές συντεταγμένες - Δ2

Τοποθετούμε στοιχείο επιφάνειας παράλληλα με το επίπεδο (y, z) (δηλαδή με κάθετο στην διεύθυνση του x άξονα).



Αν το πεδίο κατά μήκος των πλευρών BC και BA είναι F_y και F_z, αντίστοιχα, τότε το πεδίο κατά μήκος των πλευρών AD και CD είναι:

$$F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz, \; F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy$$

αντίστοιχα.

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου: Καρτεσιανές συντεταγμένες - Δ3

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατα μήκος της καμπύλης $ABCDA$ είναι

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = -F_z dz + F_y dy + \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy \right) dz - \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz \right) dy$$
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dydz$$

Επομένως:

$$(\mathrm{Curl}\mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

και παρόμοια:

$$(\mathrm{Curl}\mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \ (\mathrm{Curl}\mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου: Καρτεσιανές συντεταγμένες - Δ4

Σε ποιό συμπαγή μορφή:

$$\mathrm{Curl}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

όπου

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial k}$$

είναι ο (γνωστός) τελεστής ανάδελτα.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο στροβιλισμός του πεδίου: $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$.

Λύση: Έχουμε:

$$\mathrm{Curl}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & 2xz^3 & y^4 \end{vmatrix}$$

δηλαδή:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$$

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου - Δ5

Θεώρημα: Αν $f(x, y, z)$ βαθμωτό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ κλάσης $\mathcal{C}^2$, τότε $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F}$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} f = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

λόγω ισότητας μεικτών παραγώγων για $\mathcal{C}^2$ συναρτήσεις. □

Παρατήρηση: Έστω $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. Τότε το $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό διανυσματικό πεδίο και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης C είναι 0. Επομένως το όριο στον ορισμό του $(\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F})_{\mathbf{n}}$ είναι 0. Εφόσον η προβολή του $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F}$ σε αυθαίρετη κατεύθυνση $\mathbf{n}$ είναι 0, έχουμε ότι $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$.

Ορισμός: Αν $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ γιά κάθε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, το $\mathbf{F}$ λέγεται αστρόβιλο.

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου - Δ6

Θεώρημα: Αν $\mathbf{F}(x, y, z)$ διανυσματικό πεδίο κλάσης $\mathcal{C}^2$, τότε $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F} = 0$.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \\
&\quad \left(\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \mathbf{k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

πάλι λόγω ισότητας των μεικτών μερικών παραγώγων 2ης τάξης γιά $\mathcal{C}^2$ συναρτήσεις. $\square$

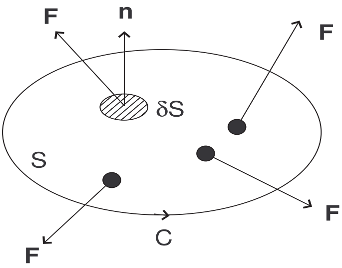
Θεώρημα Stokes

Θεώρημα (Stokes): Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από $1-1$ παραμετρικοποίηση $\Phi : D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ όπου D απλό χωρίο. Αν $C = \partial S$ είναι το προσανατολισμένο σύνορο της S και **F** είναι διανυσματικό πεδίο κλάσης κλάσης $\mathcal{C}^1$ στο S, τότε:

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Αν η S δεν έχει σύνορο (π.χ. αν είναι σφαίρα) τότε το αριστερό ολοκλήρωμα ισούται με 0.

Απόδειξη: Marsden & Tromba □

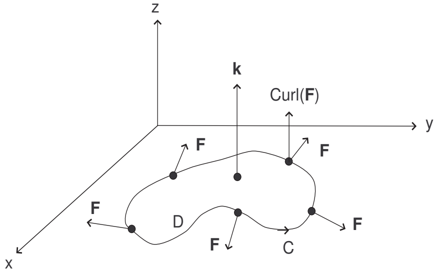


Θεώρημα Green - Δ1

Θεώρημα (Green): Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλό χωρίο και $C = \partial D$ το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του. Αν $\mathbf{F}(x, y) = F_x(x, y)\mathbf{i} + F_y(x, y)\mathbf{j}$ είναι διανυσματικό πεδίο κλάσης $\mathcal{C}^1$ στο D, τότε

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \oint_C F_x dx + F_y dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dxdy$$

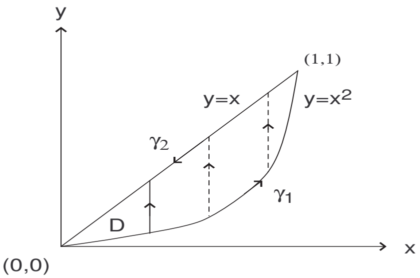
Απόδειξη: Marsden & Tromba $\square$



Παρατήρηση: Το Θεώρηνα Green είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Stokes. Αν $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, τότε $\nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$. Η ισοδύναμη διατύπωση σε αυτή την περίπτωση προκύπτει γιατί S είναι χωρίο του επιπέδου (x, y).

Θεώρημα Green - Δ2

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ όπου $F_x(x,y) = xy^2$ και $F_y(x,y) = x + y$. Επιβεβαιώστε το Θεώρημα Green για το χωρίο D στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (x,y) που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$.



Λύση: Έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (δείτε διάγραμμα). Υπολογίζουμε αρχικά τον στροβιλισμό $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x+y & 0 \end{bmatrix} = (1 - 2xy)\mathbf{k}$$

Θεώρημα Green - Δ3

Παράδειγμα (συνέχεια): Επομένως:

$$\int\int_D (1-2xy)dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x}(1-2xy)dydx = \int_{x=0}^{1}\left[y-xy^2\right]_{y=x^2}^{x}dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}[(x-x^3)-(x^2-x^5)]dx = \int_0^1 (x-x^3-x^2+x^5)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$= \frac{6-3-4+2}{12} = \frac{1}{12}$$

Υπολογίζουμε απευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\int_\gamma F_x dx + F_y dy = \int_{\gamma_1} xy^2 dx + (x+y)dy + \int_{\gamma_2} xy^2 dx + (x+y)dy$$

Θεώρημα Green - Δ4

Παράδειγμα (συνέχεια): Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} xy^2 dx + (x+y)dy = \int_{\gamma_1} x \cdot x^4 + (x+x^2)2xdx = \int_{x=0}^{1} (x^5 + 2x^2 + 2x^3)dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{6} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

Επίσης

$$\int_{\gamma_2} xy^2 dx + (x_y)dy = -\int_{\gamma_2^-} xy^2 dx + (x+y)dy = -\int_0^1 (x^3 + 2x)dx$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{4} + 1\right) = -\frac{5}{4}$$

και επομένως

$$\int_{\gamma} F_x dx + F_y dy = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{16-15}{12} = \frac{1}{12}$$

όπως προηγουμένως.