Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Ορίζουμε: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots n\}$ όπου $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ διατεταγμένη n-αδα (διάνυσμα) με συντεταγμένες x_i. (Ισοδύναμος συμβολισμός: $\underline{x} \equiv \vec{x}$).

Ορίζουμε επίσης:

- Το άθροισμα $\underline{x}+\underline{y}$, $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\underline{x}+\underline{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots x_n+y_n)$$

- Το βαθμωτό γινόμενο:

$$a\cdot\underline{x} = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Βασικές έννοιες:

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν είναι διανυσματικός χώρος με τις πράξεις $(+,\cdot)$, δηλαδή αν $\underline{x},\underline{y} \in U \Rightarrow \underline{x}+\underline{y} \in U$ και $a \in \mathbb{R}, \underline{x} \in U \Rightarrow a\underline{x} \in U$. Υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ είναι το $\{\underline{0}\}$, ευθείες που διέρχονται από το $\underline{0}$, επίπεδα που διέρχονται από το $\underline{0}$, κλπ.

- Τα διανύσματα $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν $\sum_{i=1}^{m} a_i \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow a_i = 0$ για κάθε $i=1,2\dots m$ (Διαφορετικά είναι γραμμ. εξαρτημένα).

- Span $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{m} = \{\sum_{i=1}^{m} a_i \underline{u}_i : a_i \in \mathbb{R}\}$, όπου $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots,m$. Το span των $\{u_i\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

- Τα διανύσματα $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{m}$ είναι βάση ενός υπόχωρου του $\mathbb{R}^n$ αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα και span $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{m} = U$. Τυπική βάση του $\mathbb{R}^n$:

$\{\underline{e}_k\}_{k=1}^{n}$, $\underline{e}_k = (0,0\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k\ \text{θέση}}}{1},0\cdots0)$

Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ~~είναι~~ $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{k}$ είναι η διάσταση του υπόχωρου span$\{u_i\}_{i=1}^{k}$

- Γραμμικός μετασχηματισμός $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\underline{y} = A(\underline{x})$

$A(\alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2) = \alpha A(\underline{x}_1) + \beta A(\underline{x}_2)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε πολ/σμό $\underline{y} = A\underline{x}$ με πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, όπου $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Έστω $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ είναι διανύσματα στήλης. Ορίζουμε επίσης $\mathcal{R}(A)$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$, Ker(A) ως υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, Rank(A) = dim $\mathcal{R}(A)$, Null(A) = dim Ker(A).

<u>Ορισμός</u>: (Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$) : $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

Αν $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε $\|\underline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

<u>Ορισμός</u>: (Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$) : $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

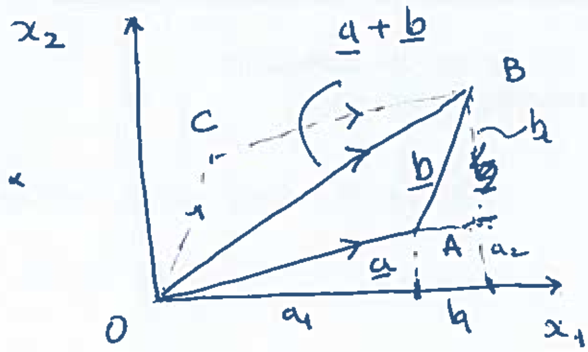
Αν $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ τότε $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

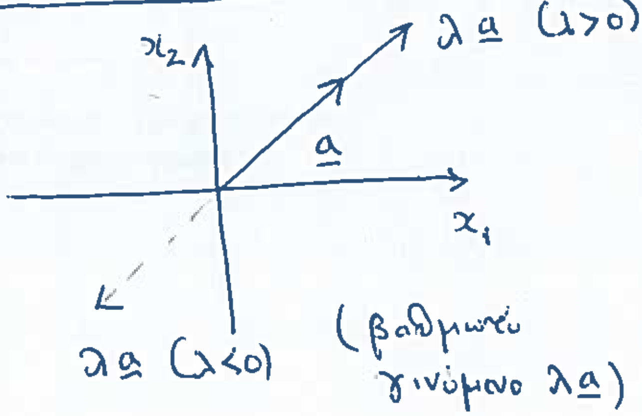
<u>Ιδιότητες</u>: (i) $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2$, (ii) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$,

(iii) $\langle \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}, \underline{z} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \beta \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία πράξεων στον $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)</u>

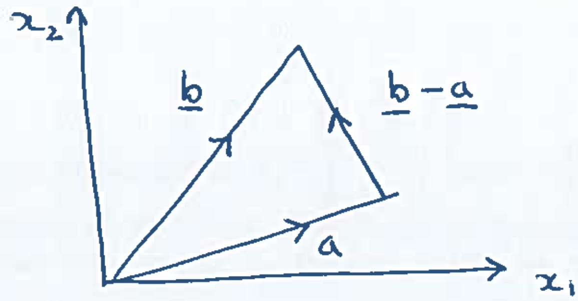
άθροισμα $\underline{a}+\underline{b}$



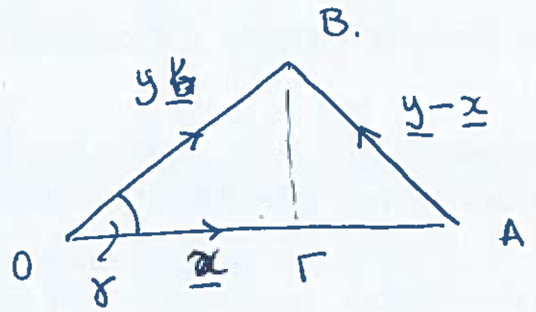


(βαθμωτό γινόμενο $\lambda\underline{a}$)

(Διαφορά $\underline{b}-\underline{a}$)



Εσωτερικό γινόμενο (γεωμετρική ερμηνεία στον $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$).



$$\left.\begin{array}{l} \underline{OA} = \underline{x} \\ \underline{OB} = \underline{y} \\ \underline{AB} = \underline{y}-\underline{x} \end{array}\right\}$$

Έστω ΒΓ ⊥ ΟΑ. Τότε

$$\|\underline{y}-\underline{x}\|^2 = \langle \underline{y}-\underline{x}, \underline{y}-\underline{x}\rangle = \langle \underline{y},\underline{y}\rangle + \langle \underline{x},\underline{x}\rangle - 2\langle \underline{x},\underline{y}\rangle$$

$$= \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\langle \underline{x},\underline{y}\rangle \qquad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΔΑΒΓ:

$$\|\underline{y}-\underline{x}\|^2 = (B\Gamma)^2 + (\Gamma A)^2 = (\|x\| - \|y\|\cos\gamma)^2 + \|y\|^2\sin^2\gamma$$

$$= \|\underline{x}\|^2 - 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cos\gamma + \|\underline{y}\|^2\underbrace{(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)}_{1}$$

$$= \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cos\gamma \qquad (2)$$

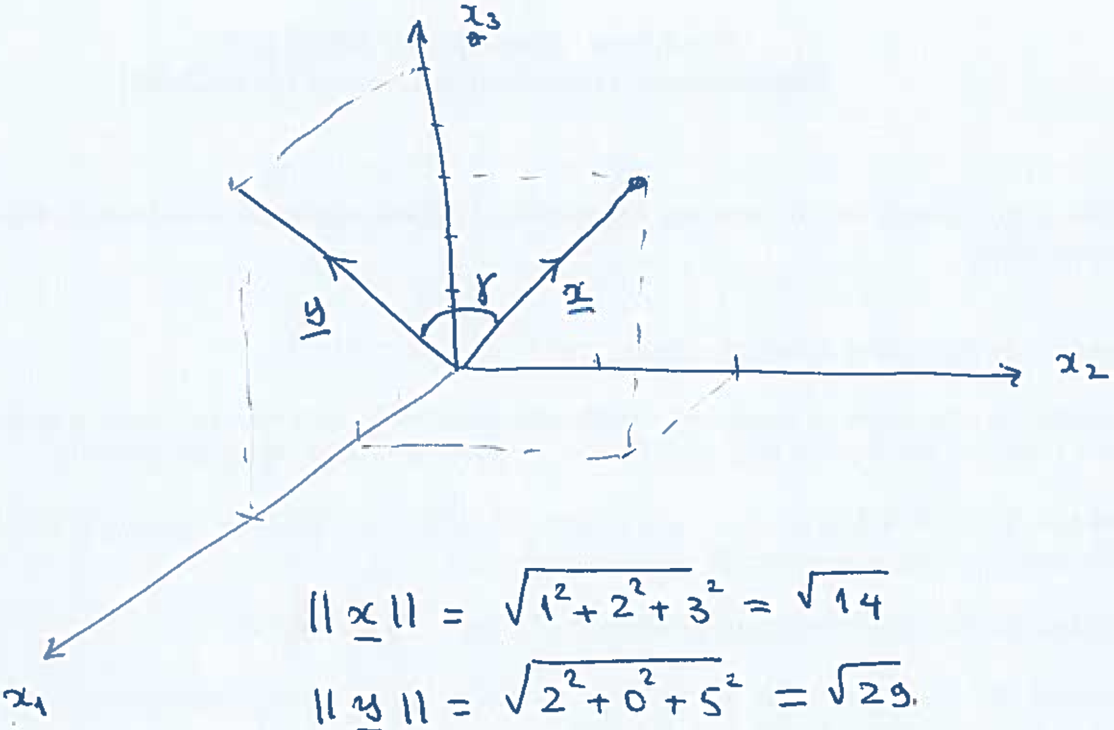
Από (1) και (2):

$$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cos\gamma$$

Επομένως αν $\underline{x}\neq\underline{0}, \underline{y}\neq\underline{0}$ τότε $\boxed{\underline{x}\perp\underline{y} \Leftrightarrow \langle \underline{x},\underline{y}\rangle = 0}$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων

$\underline{x} = (1,2,3)$ και $\underline{y} = (2,0,5)$.



$$\|\underline{x}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{2^2+0^2+5^2} = \sqrt{29}.$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}\cdot\underline{y} = 2+0+15 = 17$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}\right).$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz (στον $\mathbb{R}^n$)

Θεώρημα: Ισχύει: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$

Ισοδύναμα $|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| \leq \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$

Απόδειξη: Η ανισότητα είναι προφανής (ως ισότητα!) αν $\underline{y}=\underline{0}$. Έστω $\underline{y}\neq\underline{0}$. Τότε $\forall \lambda\in\mathbb{R}$:

$$0 \leq \|\underline{x}-\lambda\underline{y}\|^2 = \langle \underline{x}-\lambda\underline{y}, \underline{x}-\lambda\underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|^2 - 2\lambda\langle\underline{x},\underline{y}\rangle + \lambda^2\|\underline{y}\|^2 := f(\lambda)$$

Η $f(\lambda)$ ελαχιστοποιείται όταν $f'(\lambda)=0$

$$f'(\lambda) = 2\lambda\|\underline{y}\|^2 - 2\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^* = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}.$$

Επομένως

$$0 \leq \|\underline{x} - \lambda^* \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - \frac{2\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\cdot\langle \underline{x}, y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|\underline{y}\|^{\cancel{4}2}}\cancel{\|y\|^2}$$

$$= \|\underline{x}\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \Rightarrow |\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

$\square$

Τριγωνική ανισότητα:

Θεώρημα: Αν $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

Απόδειξη: $\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x}+\underline{y}, \underline{x}+\underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + \|\underline{y}\|^2$

Απο ανισότητα CS:

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle| + \|\underline{y}\|^2$$

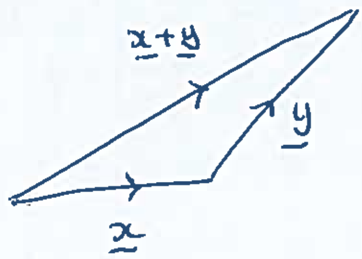
$$\leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2$$

$$= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}+y\| \leq \|\underline{x}\| + \|y\|$$

$\square$

Γεωμετρική ερμηνεία:



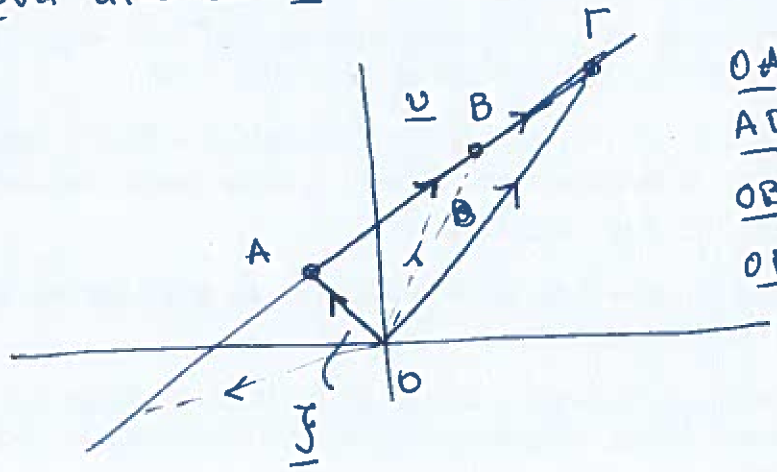
Ισότητα $(\|x+y\| = \|x\| + \|y\|)$ όταν $\underline{x} = \lambda\underline{y}$, $\lambda \geq 0$.

Απόσταση διανυσμάτων

Αν $\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\|$ που γενικεύει την απόσταση $|x-y|$ στον $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$. Αν $\underline{x}\neq\underline{0}$ τότε $\hat{\underline{x}} = \dfrac{\underline{x}}{\|x\|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα ($\|\hat{\underline{x}}\|=1$) στην διεύθυνση $\underline{x}$.

Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\underline{\xi},\underline{v}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{v}\neq\underline{0}$. Το σύνολο των διανυσμάτων (σημείων): $L=\{\underline{\xi}+t\underline{v} : t\in\mathbb{R}\}$ ορίζει ευθεία που περνά από το $\underline{\xi}$ και έχει διεύθυνση $\underline{v}$



$\underline{OA} = \underline{\xi}$

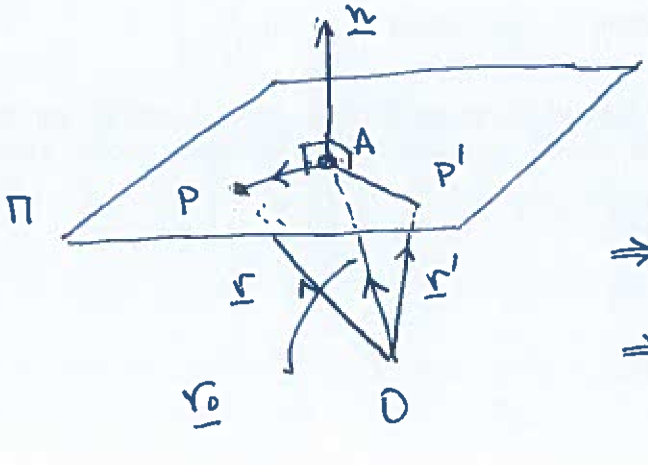
$\underline{AB} = \underline{v}$

$\underline{OB} = \underline{OA} + \underline{AB} = \underline{\xi}+\underline{v}$

$\underline{O\Gamma} = \underline{\xi} + t\underline{v}$

(Υπερ)Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$

Έστω επίπεδο Π στον $\mathbb{R}^3$, σημείο $A\in\Pi$ και διάνυσμα $\underline{n}\perp\Pi$



Έστω $\underline{OA} = \underline{r_0}$

$\underline{OP} = \underline{r}$

Τότε $\underline{AP} = \underline{r}-\underline{r_0}\perp\underline{n}$

$\Rightarrow \langle \underline{r}-\underline{r_0}, \underline{n}\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \underline{r},\underline{n}\rangle = \langle \underline{r_0}, n\rangle$

Πού είναι η (διανυσματική) εξίσωση του Π. Αν

$$\underline{r_0} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \;, \; \underline{r} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \;, \; \underline{n} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

τότε

$$\langle \underline{r}, \underline{n} \rangle = \langle \underline{r_0}, \underline{n} \rangle \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n := \gamma$$

δηλ. η εξίσωση του Π σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \gamma \Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \gamma$$

<u>Εξωτερικό γινόμενο</u> (στην $\mathbb{R}^3$)

Έστω $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$ και $\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$ $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$. (Έσω $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων (x, y, z)). Σε προηγούμενο συμβολισμό $\underline{i} = \underline{e_1} = (1,0,0)$, $\underline{j} = \underline{e_2} = (0,1,0)$, $\underline{k} = e_3 = (0,0,1)$. Το εξωτερικό γινόμενο $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \wedge \underline{b}$ ορίζεται (συμβολικά) ως : $(\cdot \wedge \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \, (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j} \, (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k} \, (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

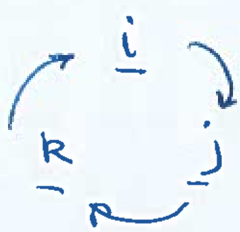
Ιδιότητες : $\underline{a} \wedge \underline{b} = - \underline{b} \wedge \underline{a}$, $\underline{a} \wedge (\beta \underline{b} + \gamma \underline{c}) = \beta (\underline{a} \wedge \underline{b}) + \gamma (\underline{a} \wedge \underline{c})$

$$\underline{a} \wedge \underline{a} = - \underline{a} \wedge \underline{a} \Rightarrow \underline{a} \wedge \underline{a} = 0$$

$\underline{i}\wedge\underline{i} = \underline{j}\wedge\underline{j} = \underline{k}\wedge\underline{k} = \underline{0}$

$\cancel{\underline{i}\wedge\underline{j} = \underline{j}\wedge\underline{k} = \underline{k}\wedge\underline{i}}$

$\underline{i}\wedge\underline{j} = \underline{k}\,,\quad \underline{j}\wedge\underline{k} = \underline{i}\,,\quad \underline{k}\wedge\underline{i} = \underline{j}$



(μνημονικός κανόνας).

<u>Τριπλό γινόμενο</u>: Έστω $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$. Τότε

$$\underline{a}\wedge\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \cancel{\underline{i}(a_2b_3} \ \underline{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow (\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot\underline{c} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (με ανάπτυξη ως προς την 3η γραμμή).

Έστω ότι $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, δηλαδή $\underline{c} \in \Pi(\underline{a},\underline{b})$, το επίπεδο που ορίζεται από τα $\underline{a}$ και $\underline{b}$. Τότε

$$(\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot(\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha a_1+\beta b_1 & \alpha a_2+\beta b_2 & \alpha a_3+\beta b_3 \end{vmatrix} = 0$$

από ιδιότητες οριζουσών (οι 3 γραμμές του πίνακα είναι γραμ. εξαρτημένες $\Rightarrow$ ο πίνακας είναι ιδιάζων $\Rightarrow$ η ορίζουσα είναι 0).

Συμπέρασμα:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} \perp \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a} \wedge \underline{b} \perp \Pi(\underline{a}, \underline{b})$$

Υπολογίζουμε την νόρμα $\|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$:

$$\|\underline{a} \wedge \underline{b}\|^2 = \langle \underline{a} \wedge \underline{b}, \underline{a} \wedge \underline{b} \rangle = \langle \underline{i}\,\Delta_{11} + \underline{j}\,\Delta_{12} + \underline{k}\,\Delta_{13},\ \underline{i}\,\Delta_{11} + \underline{j}\,\Delta_{12} + \underline{k}\,\Delta_{13} \rangle$$

όπου Δ_{1j} η ορίζουσα που προκύπτει αν απαλείψουμε την $1^{η}$ γραμμή και j-στήλη στον πίνακα.

$$\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Επομένως: $\|\underline{a} \wedge \underline{b}\|^2 = \Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 =$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3$$

$$+ a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3$$

$$+ a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$= a_1^2\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2) + a_2^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2) + a_3^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$- a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2$$
$$- 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2$$

$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2$$

$$= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 \cos^2\gamma$$

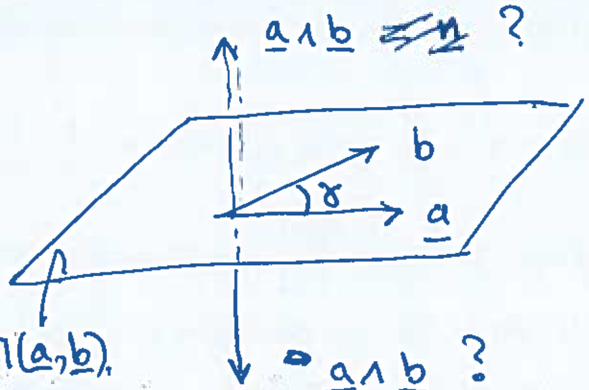
$$= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2\gamma$$

$0 \le \gamma \le \pi$ η γωνία μεταξύ διανυσμάτων $\underline{a}$ και $\underline{b}$

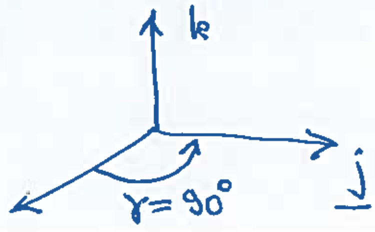
$$\Rightarrow \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \sin\gamma.$$

Συμπέρασμα: $\left.\begin{array}{l} \underline{a} \wedge \underline{b} \perp \Pi(\underline{a}, \underline{b}) \text{ καί} \\ \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \sin\gamma \end{array}\right\}.$

Γεωμετρικά υπάρχουν δύο δυνατά επιλογά:

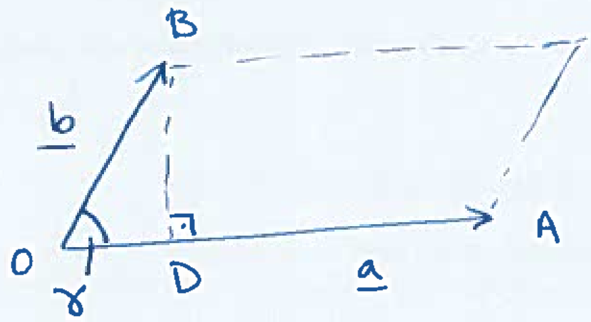


Η σωστή επιλογή (για τό συγκεκριμένο σχήμα) είναι η πρώτη και δίνεται από τον κανόνα του "δεξιόστροφου κοχλίου". Επαληθεύουμε: $\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$



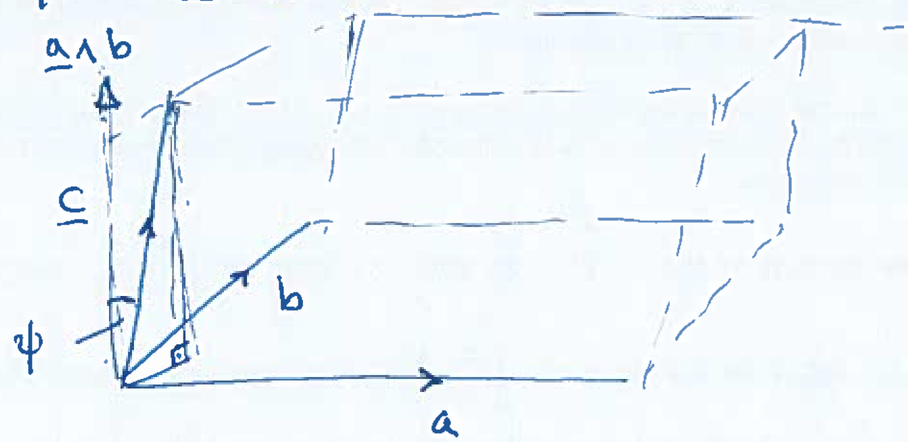
Γεωμετρική Ερμηνεία Εξωτερικού γινομένου.

- Εστω παραλληλόγραμμο με πλευρές που αντιστοιχούν στά διανύσματα $\underline{a}$ και $\underline{b}$.



Φέρωμε την κάθετο $BD \perp OA$. Τότε $|BD| = \|\underline{b}\| \sin\gamma$ και εμβαδόν $E = |BD| \cdot |OA| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \sin\gamma = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$

- Εστω παραλληλεπίπεδο με πλευρές που αντιστοιχούν σέ διανύσματα $\underline{a}$, $\underline{b}$ και $\underline{c}$

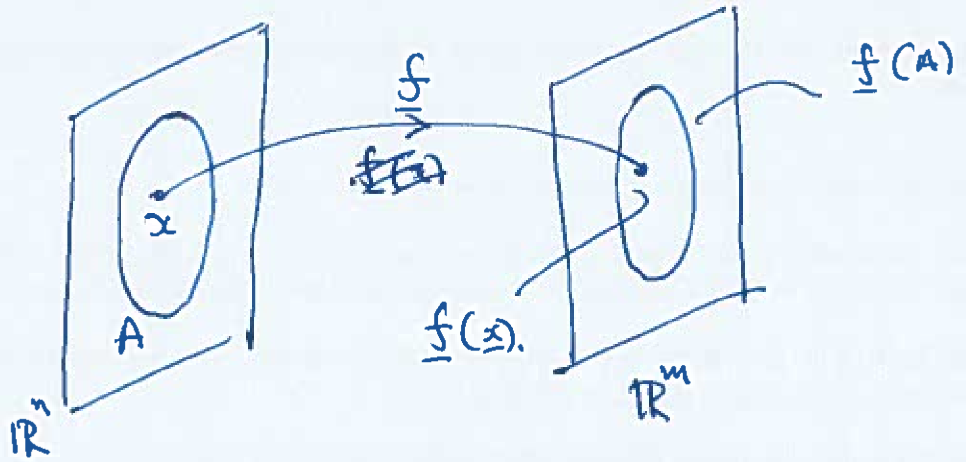


Εμβαδον βάσης $= E = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$. Ογκος $V = E \|c\| \cos\psi$

$$\Rightarrow V = |(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

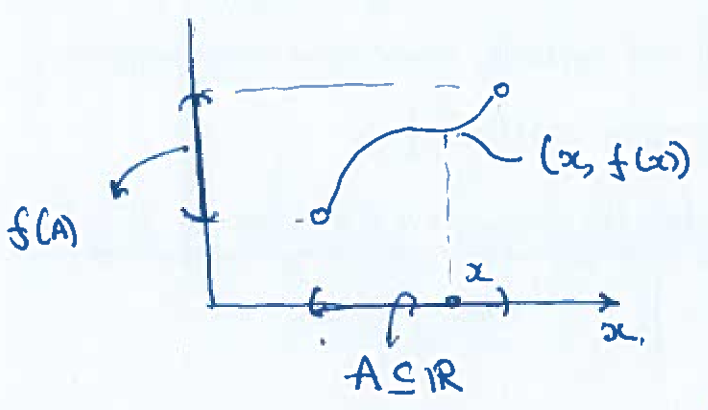
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\underline{f} : A \to \mathbb{R}^m$, δηλαδή η f απεικονίζει $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ στο $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots f_m(\underline{x})) \in \mathbb{R}^m$



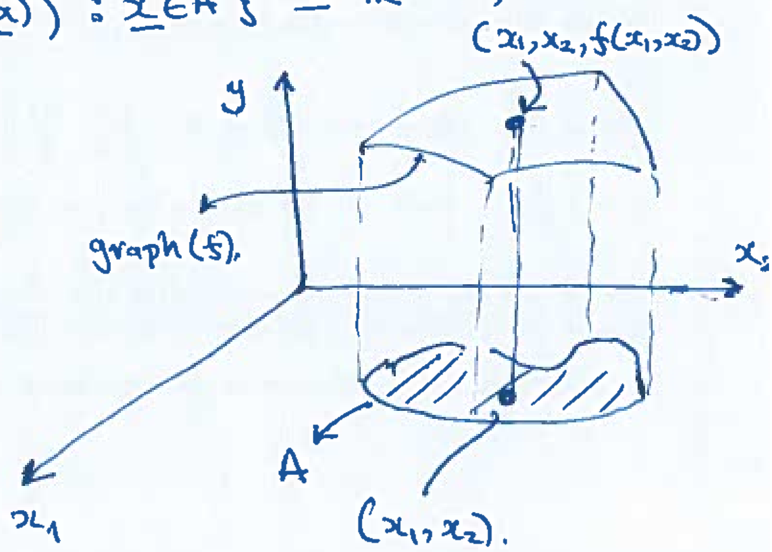
Η $\underline{f}$ λέγεται διανυσματική συνάρτηση αν $m>1$ και βαθμωτή αν $m=1$. Το σύνολο A είναι το πεδίο ορισμού της $\underline{f}$. Ορίζουμε επίσης:

- $$\underline{f}(A) = \{ \underline{f}(\underline{x}) : \underline{x} \in A \}$$
  ως την "εικόνα" της $\underline{f}$.

- Επίσης: Το γράφημα της $\underline{f}$ είναι το σύνολο
  $$\text{graph}(\underline{f}) = \{ (\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) : \underline{x} \in A \} \subseteq \mathbb{R}^{n+m},$$ π.χ



$n=m=1$



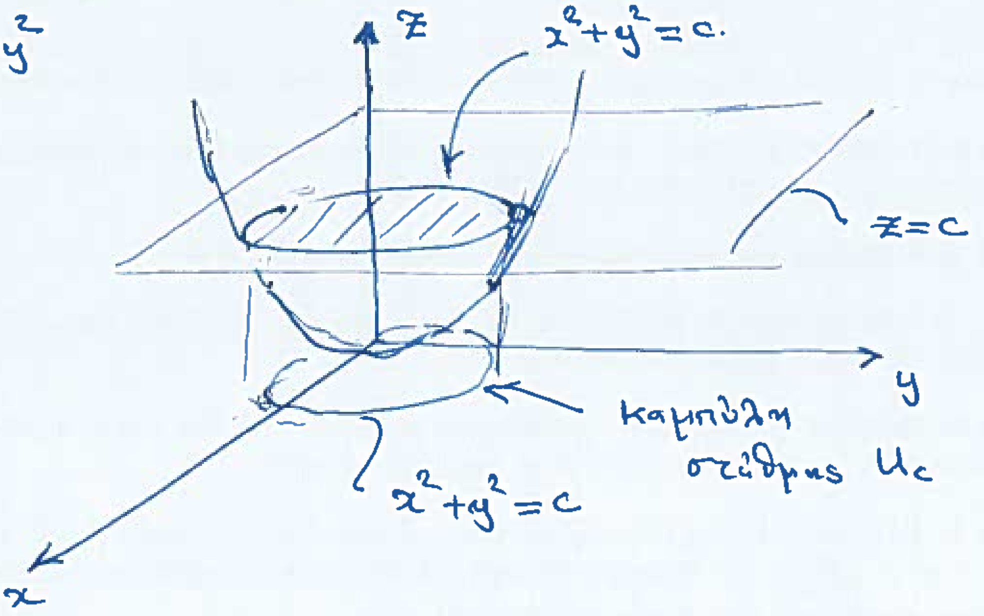
$n=2, \; m=1.$

Έστω $\underline{f} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (βαθμωτή), και $c \in \mathbb{R}$. Τό σύνολο στάθμης με τιμή c ορίζεται ως:

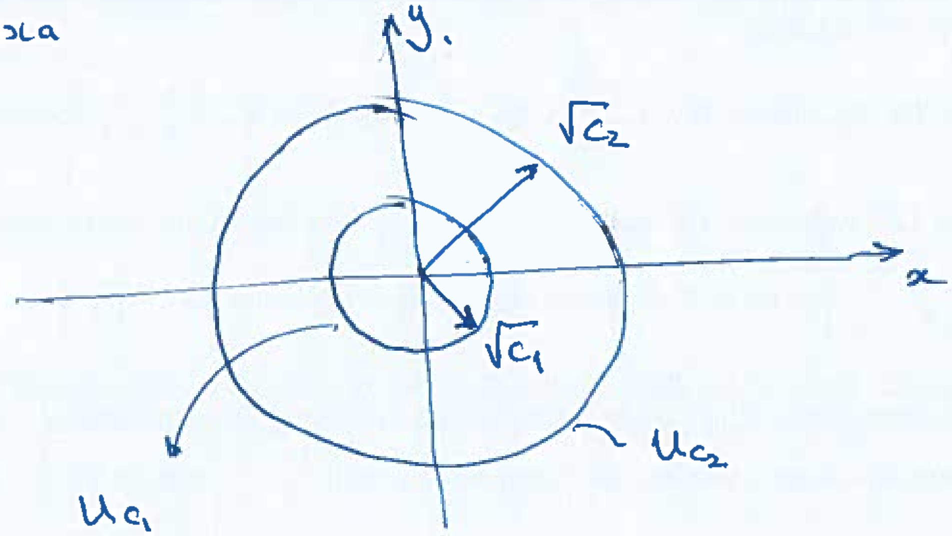
$$\mathcal{U}_c = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = c \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

<u>Παράδειγμα.</u> Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$

Το γράφημα της f είναι παραβολοειδές $z = f(x,y) = x^2+y^2$



Αν $c_2 > c_1$ οι καμπύλες στάθμης είναι κύκλοι με κέντρο τό $(x,y)=(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{c_2} > \sqrt{c_1}$ αντίστοιχα



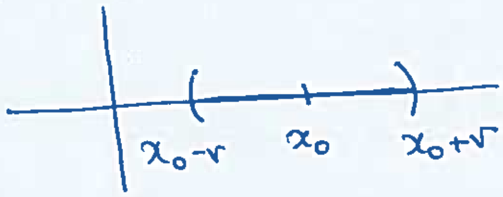
Βασική τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Η ανοικτή σφαίρα (μπάλα) ακτίνας r ~~και~~ ($r \in \mathbb{R}$) και κέντρο x_0 ορίζεται ως:

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r \}$$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2)$

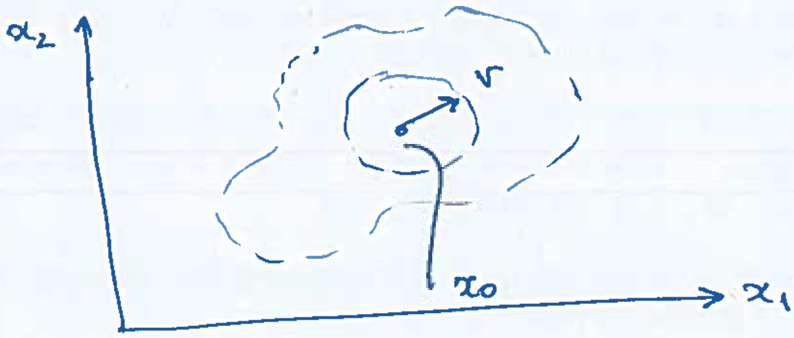
π.χ.



$(n=1)$

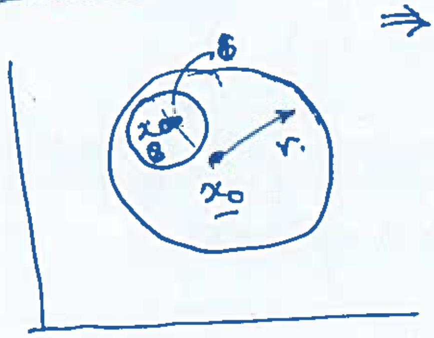
$(n=2)$,

Το σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό αν $\forall x_0 \in U$ $\exists r = r(x_0) > 0$ τ.ω. $B_r(x_0) \subseteq U$. ~~Συμβατικά $\emptyset$ είναι ανοικτό~~



Θεώρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ το $B_r(x_0)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Έστω $x \in B_r(x_0)$ $\Rightarrow \|x - x_0\| < r$. Θα δείξουμε ότι $\exists s > 0$ τ.ω. $B_s(x) \subseteq B_r(x_0)$. Έστω $s = r - \|x - x_0\|$. Τότε αν $y \in B_s(x)$ έχουμε $\|y - x\| < s$ και



$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \le \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + r - s = r \Rightarrow y \in B_r(x_0)$$

$$\Rightarrow B_s(x) \subseteq B_r(x_0)$$

□

<u>Ασκηση</u>: Δείξτε ότι $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\}$ είναι ανοικτό.

<u>Ορισμός</u>: Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τό σημείο $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A ($\underline{x} \in \partial A$, το σύνορο του A) αν για κάθε $r>0$ η σφαίρα (μπάλα) $B_r(x) =: \cancel{\{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\|<r\}}$ περιέχει ένα σημείο του A και ένα σημείο εκτός του A, δηλ στο $\mathbb{R}^n \setminus A$. Το A είναι κλειστό αν περιέχει όλα τά συνοριακά του σημεία, δηλ αν $\partial A \subseteq A$. Γράφουμε επίσης

$\bar{A} = A \cup \partial A$

<u>Παράδειγμα</u>: Στον $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ τό διάστημα $A=(0,1)$ είναι ανοικτό. Έχουμε $\partial A = \{0,1\}$ καί $\bar{A} = [0,1]$.

Στον $\mathbb{R}^n$ η σφαίρα $B_r(\underline{x}_0)$ είναι ανοικτό σύνολο (όπως δείξαμε), $\partial B_r(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| = r\}$
καί $\bar{B}_r(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \le r\}$.

<u>Σύγκλιση ακολουθιών στόν $\mathbb{R}^n$</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω ακολουθία $(\underline{x}_k)$, $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε $\underline{x}_k \to \underline{b}$ καθώς $k \to \infty$ (ισοδύναμα $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{b}$) αν καί μόνο αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists K \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|\underline{x}_k - \underline{b}\| < \varepsilon$ $\forall k>K$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\underline{x}_k \to \underline{b}$ αν "τελικά" η απόσταση των $\underline{x}_k$ από τό $\underline{b}$ είναι μικρότερη του $\varepsilon>0$, όσο μικρό καί αν διαλέξουμε το ε.

<u>Θεώρημα:</u> $\underline{x}_k \to \underline{\xi}$ καθώς $k\to\infty$ αν και μόνο αν $x_k^i \to \xi_i$ καθώς $k\to\infty$, όπου $\underline{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \dots x_k^n)$ και $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

<u>Απόδειξη:</u> (για $n=2$, η γενική περίπτωση παρόμοια).
Έστω $\underline{x}_k = (\alpha_k, \beta_k)$ και $\underline{\xi} = (\alpha, \beta)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\alpha_k \to \alpha$ και $\beta_k \to \beta$ καθώς $k\to\infty$.

- Έστω $\underline{x}_k \to \underline{\xi}$ καθώς $k\to\infty$. Τότε $\|\underline{x}_k - \underline{\xi}\| \to 0$ και άρα

$$|\alpha_k - \alpha| \leq \sqrt{(\alpha_k-\alpha)^2 + (\beta_k-\beta)^2} \to 0 \quad \text{καθώς } k\to\infty$$

Παρόμοια ~~ποιώ~~ $\beta_k \to \beta$.

- Αντίστροφα, έστω ότι $\alpha_k \to \alpha$ και $\beta_k \to \beta$. Τότε

$$\|\underline{x}_k - \underline{\xi}\| = \sqrt{(\alpha_k-\alpha)^2 + (\beta_k-\beta)^2} \to \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

καθώς $k\to\infty$. $\square$

και άρα $\underline{x}_k \to \underline{\xi}$ καθώς $k \to \infty$.

<u>Όρια συναρτήσεων $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$</u>

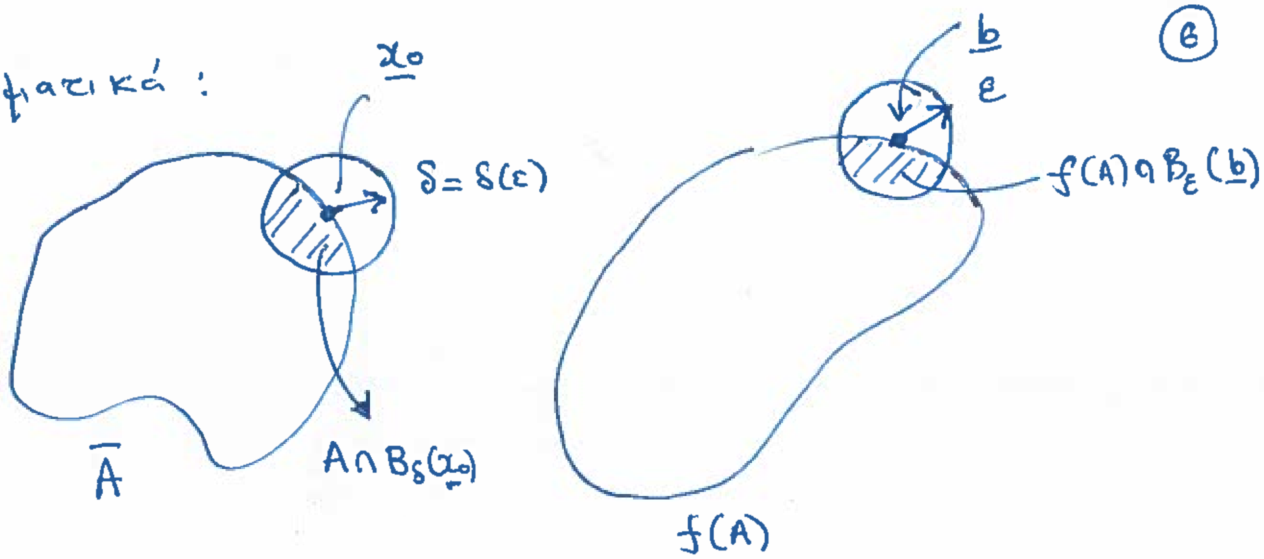
<u>Ορισμός:</u> Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, και $\underline{x}_0 \in \bar{A}$.
Το όριο $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b}$ αν και μόνο αν:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ τ.ω } \left(\underline{x} \in A \text{ και } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta\right) \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}\| < \varepsilon$$

(Ισοδύναμα: $\underline{x} \in A \cap B_{\underline{x}_0}(\delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}\| < \varepsilon$).

<u>Παρατήρηση:</u> Το $\underline{x}_0$ μπορεί να μην ανήκει στο A και επομένως η τιμή $\underline{f}(\underline{x}_0)$ να μην ορίζεται.

Σχηματικά :



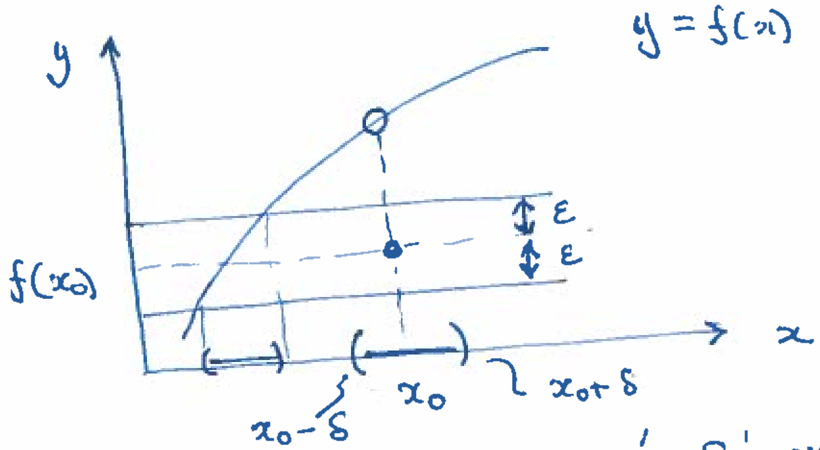
<u>Ορισμός</u> (συνέχειας) : Έστω $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καί $\underline{x}_0 \in A$.

Η f είναι συνεχής στό $\underline{x}_0$ αν καί μόνο αν:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. $(\underline{x}\in A$ καί $\|\underline{x}-\underline{x}_0\|<\delta)$
$\Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x})-\underline{f}(\underline{x}_0)\|<\varepsilon$

(Ισοδύναμα αν $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_0)$).

<u>Παράδειγμα</u> (ασυνέχειας γιά $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$).



Αν επιλέξουμε το ε αρκετά μικρό <u>δέν</u> υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Όπως καί στην περίπτωση συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τά όρια συναρτήσεων είναι μοναδικά (όταν υπάρχουν):

Θεώρημα: Έστω $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό και $\underline{x}_0 \in \bar{A} = A \cup \partial A$. Τότε, αν

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b}_1 \quad \text{και} \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b}_2$$

έχουμε $\underline{b}_1 = \underline{b}_2$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ (αυθαίρετο). Τότε

$\exists\, \delta_1 > 0$ τ.ω. $\underline{x} \in A$ και $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}_1\| < \varepsilon$

και $\exists\, \delta_2 > 0$ τ.ω. $\underline{x} \in A$ " $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}_2\| < \varepsilon$

Θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Τότε:

$\underline{x} \in A$ και $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2$

Τέτοια $\underline{x}$ υπάρχουν γιατί $\underline{x}_0 \in A$ (ανοικτό) ή $\underline{x}_0 \in \partial A$.

Επομένως για ένα τέτοιο $\underline{x}$:

$$\|\underline{b}_1 - \underline{b}_2\| = \|\underline{b}_1 - \underline{f}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}_2\|$$

$$\leq \|\underline{b}_1 - \underline{f}(\underline{x})\| + \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}_2\|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Εφόσον το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, η νόρμα $\|\underline{b}_1 - \underline{b}_2\|$ είναι μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό, άρα

$$\|\underline{b}_1 - \underline{b}_2\| = 0 \Rightarrow \underline{b}_1 = \underline{b}_2 \qquad \square$$

Ιδιότητες Ορίων: Έστω $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{g}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό. Αν $\underline{x}_0 \in \bar{A} = A \cup \partial A$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$:

(I_1): $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b} \Rightarrow \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} c\underline{f}(\underline{x}) = c\underline{b}$

(I_2): $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b}_1$ και $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{g}(\underline{x}) = \underline{b}_2 \Rightarrow \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (\underline{f}+\underline{g})(\underline{x}) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$

(I_3): Αν $m=1$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = b_1$ καί $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(\underline{x}) = b_2$,

τότε $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} (fg)(x) = b_1 b_2$

(I_4): Αν $m=1$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = b \neq 0$ καί $f(\underline{x})\neq 0 \ \forall \underline{x}\in A$

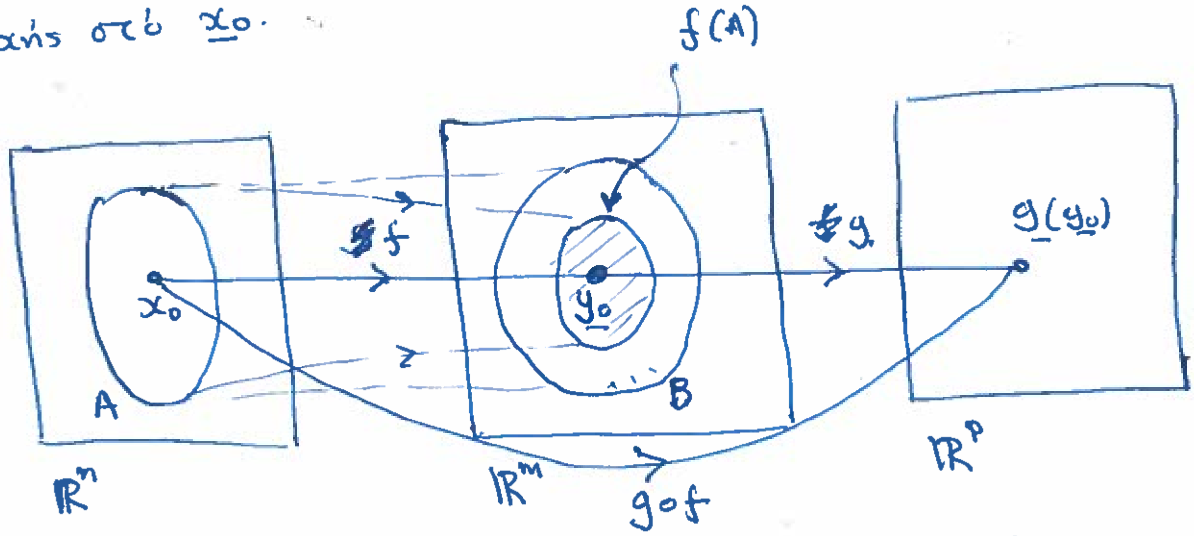
τότε $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f}: A\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{1}{f(x)}$

(I_5) Αν $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots f_m(\underline{x}))$, $f_i: A\to\mathbb{R}$, $i=1,2,..m$,

τότε $\underline{f}(x)\to \underline{b}$ αν καί μόνο αν $f_i(\underline{x})\to b_i$,

$\forall i=1,2,\dots,m$.

<u>Θεώρημα</u>: (Συνέχεια σύνθεσης). Έστω $\underline{f}: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ καί $\underline{g}: B\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ με A, B ανοικτά. Έστω επίσης ότι $\underline{f}(A)\subseteq B$ (ώστε η $g\circ f$ να ορίζεται στό A). Αν η $\underline{f}$ είναι συνεχής στό $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$ καί η $\underline{g}$ είναι συνεχής στό $\underline{y}_0 := \underline{f}(\underline{x}_0)$, τότε η $g\circ f$ είναι συνεχής στό $\underline{x}_0$.



<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Πρέπει νά δείξουμε ότι $\exists\,\delta>0$ τ.ω: $(\underline{x}\in A$ καί $\|\underline{x}-\underline{x}_0\|<\delta \Rightarrow \|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)\|<\varepsilon$

Εφόσον η $\underline{g}$ είναι συνεχής στό $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)\in\underline{f}(A)\subseteq B$, τότε

$\exists \gamma > 0$ τ.ω

$$\underline{y} \in B \text{ και } \|\underline{y} - \underline{y}_0\| < \gamma \Rightarrow \|\underline{g}(\underline{y}) - \underline{g}(\underline{y}_0)\| < \varepsilon \quad (*)$$

Αφού η f είναι συνεχής στό $\underline{x}_0 \in A$, τότε γιά το συγκεκριμένο γ, $\exists \delta > 0$ τ.ω

$$\underline{x} \in A \text{ καί } \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0)\| < \gamma$$

Επομένως:

$$\underline{x} \in A \text{ καί } \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \underline{f}(\underline{x}) \in f(A) \subseteq B \text{ καί} \\ \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0)\| < \gamma \end{cases}$$

Επιλέγοντας $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ καί $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ στήν $(*)$ έχουμε:

$$\underline{x} \in A \text{ καί } \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) - \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\underline{g} \circ \underline{f}$ είναι συνεχής στί $\underline{x}_0$. $\square$.

Το επόμενο Θεώρημα συνδέει όρια ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ μέ όρια συναρτήσεων. ("αρχή μεταφοράς").

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, και $\underline{x}_0 \in \overline{A} = A \cup \partial A$. Τότε

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{b} \qquad (*)$$

αν και μόνο αν:

$$\left(\forall (\underline{x}_n), \underline{x}_n \in A \setminus \{\underline{x}_0\}, \underline{x}_n \to \underline{x}_0\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underline{f}(\underline{x}_n) = \underline{b} \qquad (**).$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι η $(*)$ ισχύει καί έστω $(\underline{x}_n)$ ακολουθία στό $A \setminus \{\underline{x}_0\}$. Έστω $\varepsilon > 0$ (αυθαίρετο). Τότε

$$\exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } (\underline{x} \in A \text{ και } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}\| < \varepsilon$$

Έστω ακολουθία $(\underline{x}_n)$, $\underline{x}_n \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$, μέ $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$

Τότε (γιά τό συγκεκριμένο δ) $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω:

$$0 < \|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \delta \qquad \forall n > N$$

Άρα $\|\underline{f}(\underline{x}_n) - \underline{b}\| < \varepsilon \quad \forall n > N \Rightarrow \underline{f}(\underline{x}_n) \to \underline{b}$

καθώς $n \to \infty$.

- Αντίστροφα, έστω ότι $\forall (\underline{x}_n)$, $\underline{x}_n \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$, $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}(\underline{x}_n) = \underline{b}$ αλλά η σχέση (*) δεν ισχύει.

Τότε:

$$\sim\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ τ.ω } (\underline{x} \in A \wedge 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta) \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}\| < \varepsilon\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ τ.ω } \forall \delta > 0,\ (\underline{x} \in A \wedge 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta) \not\Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - b\| < \varepsilon$$

δηλαδή:

$\exists\ \varepsilon > 0$ τ.ω $\forall \delta > 0 \quad \exists\ \underline{x} = \underline{x}(\delta) \in A$ μέ $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$

αλλά $\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{b}\| \geq \varepsilon$.

Γιά τό συγκεκριμένο ε στην τελευταία περίπτωση, θέτοντας διαδοχικά:

$\delta = \delta_1 = 1 \Rightarrow \exists\ \underline{x}_1 \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$ μέ $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\| < 1$ αλλά $\|\underline{f}(\underline{x}_1) - \underline{b}\| \geq \varepsilon$

$\delta = \delta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\ \underline{x}_2 \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$ μέ $\|\underline{x}_2 - \underline{x}_0\| < \frac{1}{2}$ " $\|\underline{f}(\underline{x}_2) - \underline{b}\| \geq \varepsilon$

⋮

Και γενικά:

$\delta = \delta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists\ \underline{x}_n \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$ μέ $\|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \frac{1}{n}$ αλλά

$$\|\underline{f}(\underline{x}_n) - b\| \geq \varepsilon$$

Έστω $(\underline{x}_n) = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n, \ldots)$ η αντίστοιχη ακολουθία. Τότε κάθε όρος $\underline{x}_n \in A\setminus\{\underline{x}_0\}$, $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$, αλλά $\underline{f}(\underline{x}_n) \not\to \underline{b}$

άτοπο από την υπόθεση. □

Παράδειγμα

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(x^2y, \dfrac{y+x^3}{1+x^2}\right)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Λύση: Από τις ιδιότητες ορίων (I_5) αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνιστώσα της f είναι συνεχής. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής (στην προκειμένη περίπτωση: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2y = x_0^2y_0$) επομένως η $f_1(x,y)$ είναι συνεχής. Εφόσον $1+x^2$ είναι συνεχής και μή μηδενική η $1/(1+x^2)$ είναι συνεχής (Ιδιότητα ορίων (I_4)). Επομένως και $f_2(x,y) = (y+x^3)/(1+x^2)$ είναι συνεχής ως ~~όριο~~ γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Δείξτε (από τον ορισμό) ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Λύση: Έχουμε (για $(x,y)\neq(0,0)$):

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

Γιά δεδομένο $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $\delta=\varepsilon$, και:

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$$

και επομένως το όριο της f είναι το 0.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

Γιά $(x,y)\neq(0,0)$: $0 \leq \left|\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2}$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)(|x|+|y|)}{x^2+y^2} = |x|+|y| \quad \text{και}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = \lim_{(x,y)\to 0} |x| + \lim_{(x,y)\to 0} |y| = 0+0=0$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0.$

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε (από τον ορισμό) ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Γιά $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε:

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{2x^2y}{x^2}\right| = 2|y|$$

Γιά δεδομένο $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, οπότε

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow 2|y| < \varepsilon$ και άρα

$$0 \leqslant \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leqslant 2|y| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και άρα $0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0.$

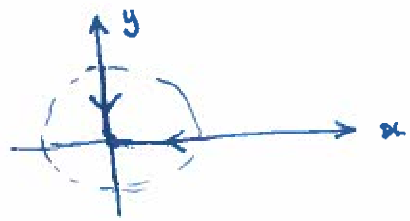
που συνεπάγεται το ζητούμενο όριο.

<u>Παράδειγμα</u>: Υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

Αν το όριο υπήρχε θα ήταν το ίδιο κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής $(x,y)\to(0,0)$. Αν $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=0$ η οριακή τιμή θα ήταν 1. Αν $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $x=0$ η οριακή τιμή θα ήταν

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = 0 \neq 1$$

Άρα το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ <u>δεν</u> υπάρχει.



Παραγώγιση

Ορισμός (μερικές παράγωγοι). Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια πραγματική συνάρτηση. Οι μερικές παράγωγοι:

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \; \dots, \; f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ως πρός την πρώτη, δεύτερη, ..., n-οστή μεταβλητή, είναι οι πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h\underline{e_j}) - f(\underline{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + h, \dots x_n) - f(x_1, \dots x_n)}{h}$$

(αν τα όρια υπάρχουν), όπου $1 \leq j \leq n$ καί $\underline{e_j} = (0, \dots 0, 1, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ με 1 στή θέση j (δηλ. η j γραμμή του πίνακα I_n). Το πεδίο ορισμού της $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ είναι το σύνολο των $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ γιά τα οποία υπάρχει το όριο.

Παρατήρηση: Η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x_0})$ είναι ο "ρυθμός μεταβολής" της τιμής της f ως προς την μεταβλητή x_j στό σημείο $\underline{x_0}$ όταν οι τιμές των μεταβλητών ~~$x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{j-1}, x_0^{j+1}$~~ $x_1, x_2, \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_n$ μένουν σταθερές στις τιμές $x_1^0, x_2^0, \dots x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots x_n^0$.

Παρατήρηση: Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον συμβολισμό $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ αντί γιά $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$.
Αν ~~$f: \mathbb{R}^n \to$~~ $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μπορούμε νά γράψουμε $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots f_m(\underline{x}))$ καί να ορίσουμε $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$

Παράδειγμα: Αν $f(x,y)=x^2y+y^3$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$$

Παράδειγμα: Αν $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, τότε (κανόνας πηλίκου):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\,\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-1/2}\,\cancel{2}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-x^2y\,(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{y(\cancel{x^2}+y^2)-\cancel{x^2y}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$(x,y)\neq(0,0)$.

Ορισμός (κατά κατεύθυνση παράγωγος). Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό καί $f:U\to\mathbb{R}$. Έστω $\underline{x}\in U$ καί $\underline{u}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{u}\neq 0$. Τότε, η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στό σημείο $\underline{x}$ κατά την κατεύθυνση $\underline{u}$ ορίζεται ως:

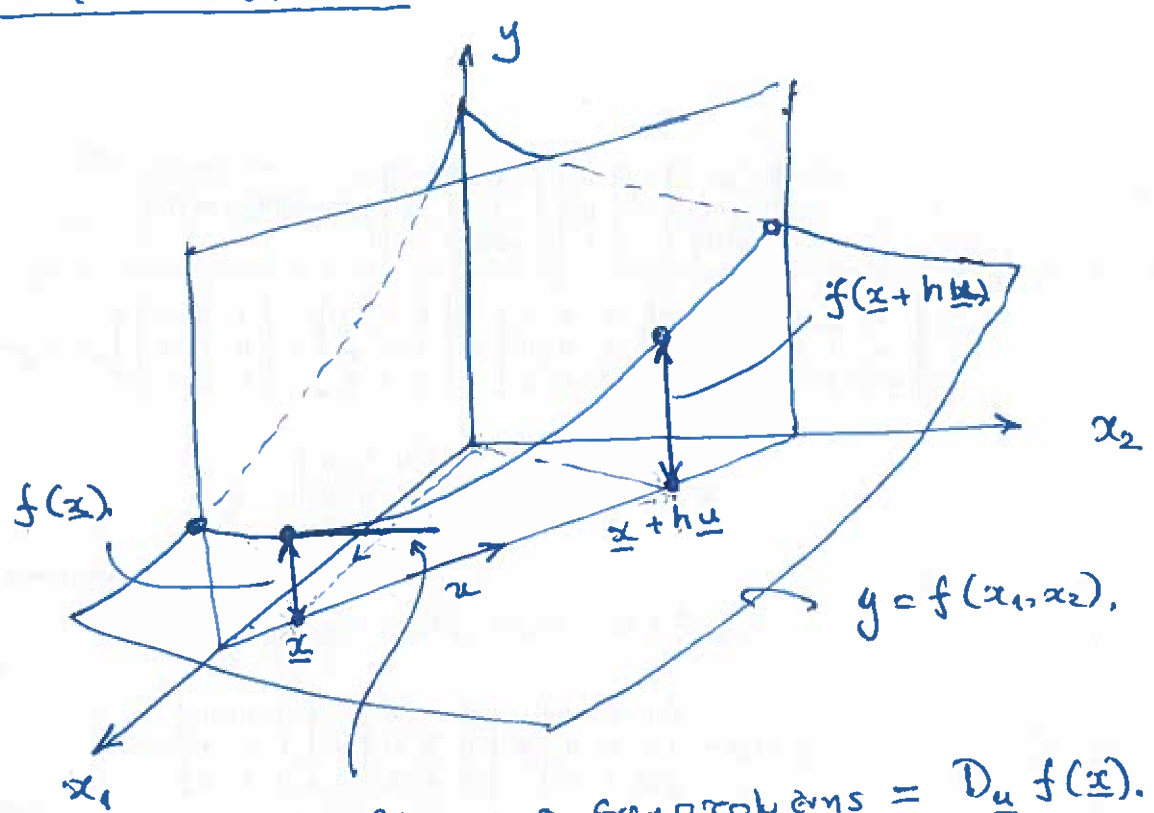
$$D_{\underline{u}}f(\underline{x})=\frac{d}{dh}f(\underline{x}+h\underline{u})\Big|_{h=0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\underline{x}+h\underline{u})-f(\underline{x})}{h}$$

(αν υπάρχει).

Παρατήρηση: Συνήθως επιλέγουμε διάνυσμα $\underline{u}$ μοναδιαίου μέτρου, δηλ. $\|\underline{u}\|=1$.

Παρατήρηση: Ο ορισμός των μερικών παραγώγων είναι ειδική περίπτωση του ορισμού της κατά-κατεύθυνση παραγώγου μέ $\underline{u}:=\underline{e}_j$, $j=1,2,\dots,n$.

Γεωμετρική Ερμηνεία ($n=2$, $m=1$).



Η κλίση της εφαπτομένης $= D_{\underline{u}} f(\underline{x})$.

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Να βρεθεί η "κλίση" της επιφάνειας $y = f(x_1, x_2)$ (δηλ. του γραφήματος της f) στο σημείο $(1,2)$ κατά την κατεύθυνση $\underline{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

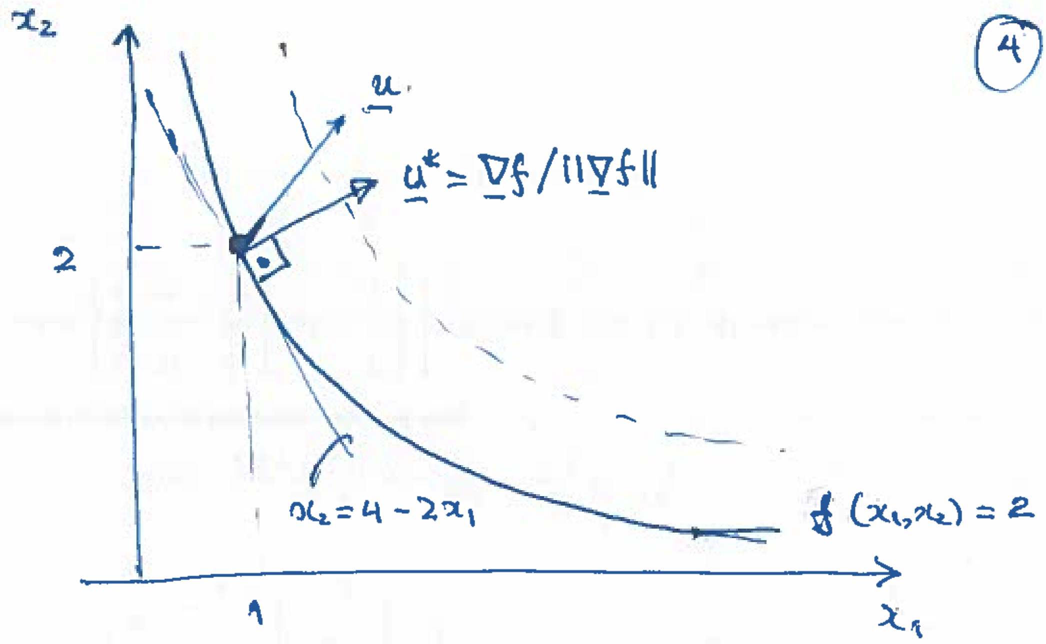
Λύση: Έχουμε

$$D_{\underline{u}} f(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h\underline{u}) - f(\underline{x})}{h}, \quad \underline{x} = (1,2), \quad \underline{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{3h}{5}\right)\left(2 + \frac{4h}{5}\right) - 1 \cdot 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + \frac{10h}{5} + \frac{12h^2}{25} - \cancel{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2 + \frac{12h}{25}\right)$$

$$= 2$$



Παράδειγμα (συνέχεια)

Ποιά είναι η ~~διεύθυνση~~ κατεύθυνση $\underline{u}^*$ μέ $\|\underline{u}^*\| = 1$ κατά την οποία η $D_{\underline{u}^*} f(\underline{x})$ μεγιστοποιείται; Έστω $\underline{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ με $(u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 = 1$. Τότε:

$$D_{\underline{u}^*} f(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + u_1^* h)(2 + u_2^* h) - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2u_1^* h + u_2^* h + h^2 u_1^* u_2^*}{h} = 2u_1^* + u_2^*.$$

Άρα πρέπει νά μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $g(u_1, u_2) = 2u_1 + u_2$ υπό τον περιορισμό $u_1^2 + u_2^2 = 1$

Αλγεβρικά, μεγιστοποιούμε

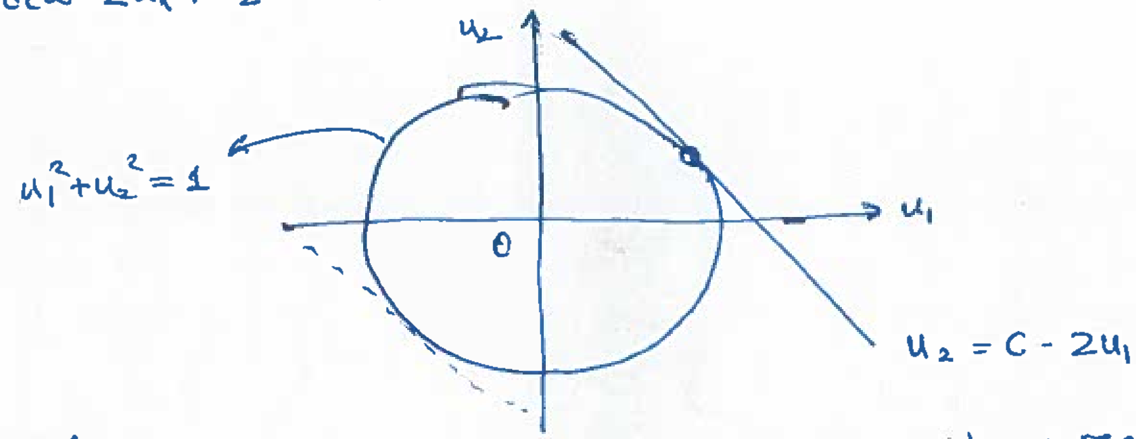
$$\hat{g}(u_1) = \max\left(\overbrace{2u_1 + \sqrt{1 - u_1^2}}^{f_1},\ \overbrace{2u_1 - \sqrt{1 - u_1^2}}^{f_2}\right)$$

στό διάστημα $-1 \le u_1 \le 1$. Η "βέλτιστη" λύση μπορεί νά προκύψει μέ παραγώγιση ως:

$$(u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{καί} \quad D_{u^*} f(x) = \sqrt{5}$$

Γεωμετρική λύση:

Έστω $2u_1+u_2=c$, $u_1^2+u_2^2=1$.



Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στην εφαπτόμενη της ευθείας $u_2=c-2u_1$ στον μοναδιαίο κύκλο $u_1^2+u_2^2=1$.

Με αντικατάσταση,

$$u_1^2+(c-2u_1)^2=1 \Rightarrow 5u_1^2-4cu_1+c^2-1=0$$

Η διακρίνουσα μηδενίζεται όταν:

$$\Delta = 16c^2-20(c^2-1)=0 \Rightarrow 4c^2=20 \Rightarrow c=\sqrt{5}.$$

(η αρνητική λύση $c=-\sqrt{5}$ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή). Επομένως, για $c=\sqrt{5}$,

$$5u_1^2-4\sqrt{5}u_1+4=0 \Rightarrow (\sqrt{5}u_1-2)^2=0 \Rightarrow u_1^*=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

και $u_2^*=\frac{1}{\sqrt{5}}$ και $(u_1^*,u_2^*)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Παρατηρούμε ότι η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη στάθμης $x_1x_2=2$ στο σημείο $(1,2)$ είναι

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_1=1} = -2x_1^{-2}\Big|_{x_1=1}=-2$$

και άρα το διάνυσμα $(1,-2)$ είναι παράλληλο με την εφαπτόμενη. Επίσης $\left\langle (1,-2),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle=0$

$\Rightarrow$ το διάνυσμα (u_1^*,u_2^*) είναι $\perp$ στην επιφάνεια στάθμης στο σημείο $(1,2)$. $\left((u_1^*,u_2^*)=\nabla f(1,2)/\|\nabla f(1,2)\|\right)$

Παραγωγισιμότητα συναρτήσεων n-μεταβλητών.

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Όπως γνωρίζουμε η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αν

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0+\delta x) - f(x_0)}{\delta x} := f'(x_0)$$

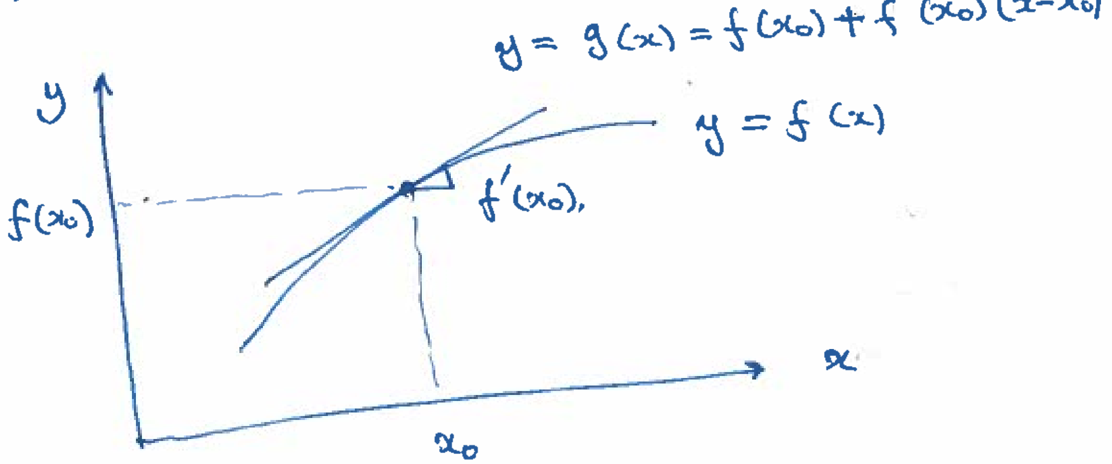
δηλ. το όριο είναι καλά ορισμένο και ορίζει την παράγωγο στο x_0.

Ισοδύναμα, θέτοντας $x = x_0 + \delta x$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Γεωμετρικά, θέτοντας $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, η ευθεία που είναι το γράφημα της g είναι "κοντά" στο γράφημα της f στο σημείο $x = x_0$, υπό την έννοια ότι $f(x_0) = g(x_0)$ και ότι η διαφορά $f(x) - g(x) \to 0$ καθώς $x \to x_0$ ακόμα και όταν διαιρείται με την ποσότητα $x - x_0$ (πού επίσης τείνει στο 0 καθώς $x \to x_0$).



Ισοδύναμα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ αν υπάρχει αφινική (γραμμική + σταθερή) συνάρτηση $g(x)$ με $g(x_0) = f(x_0)$ τ.ω. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$

Ο ορισμός επεκτείνεται γιά συναρτήσεις $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου U ανοικτό σύνολο:

<u>(Προσωρινός) Ορισμός παραγωγισιμότητας</u>: Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό. Η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στό $\underline{x_0} \in U$ αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0})$, $i=1,2,\dots n$ υπάρχουν (είναι καλά ορισμένες) καί

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \frac{\| \underline{f}(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) - T(\underline{x} - \underline{x_0}) \|}{\| \underline{x} - \underline{x_0} \|} = 0$$

όπου $T := Df(\underline{x_0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x_0})$, $i=1,2,\dots m$, $j=1,2,\dots,n$

όπου:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{x_0} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο ορισμός μπορεί νά απλοποιηθεί (όπως θά δείξουμε παρακάτω) υπό την έννοια ότι η ύπαρξη του ορίου γιά κάποιον γραμμικό τελεστή (ισοδύναμα πίνακα) T εγγυάται τόσο την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, όσο καί την μορφή του πίνακα T.

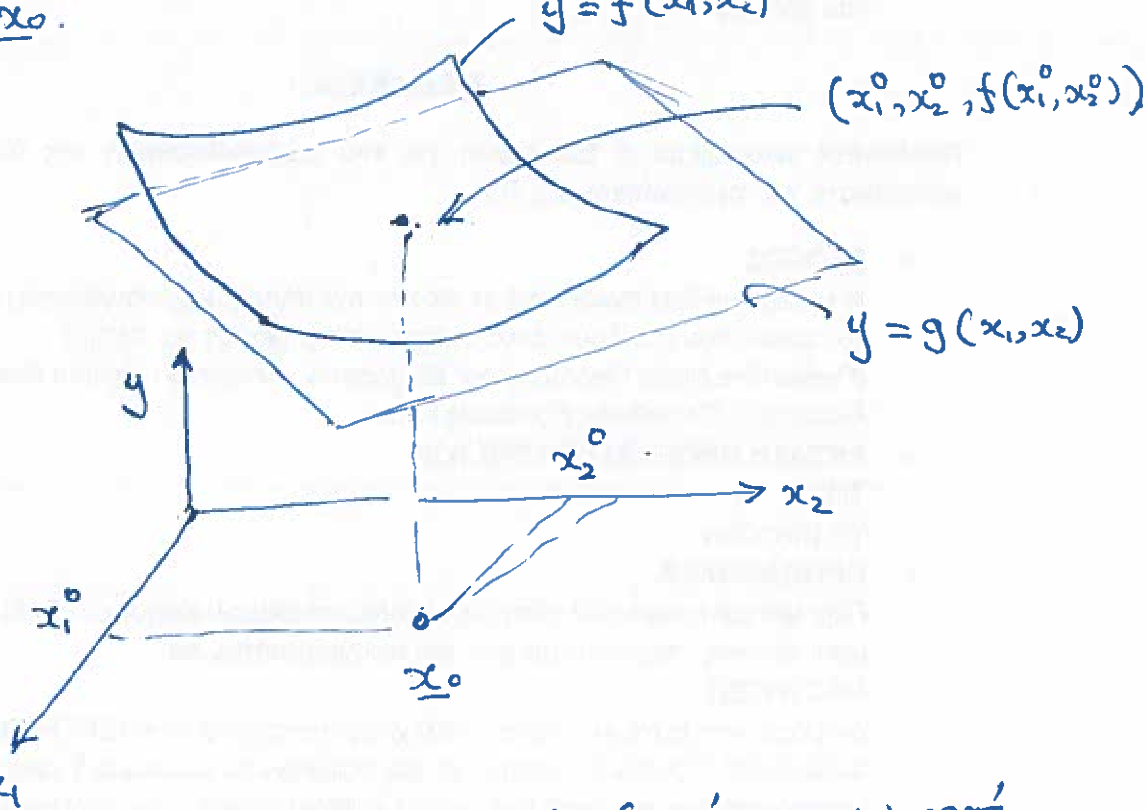
<u>Παρατήρηση</u>: Αν $m=1$, ο πίνακας T είναι διάνυσμα γραμμής:

$$T = Df(\underline{x_0}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \right].$$

καί ~~έχει την~~ συμβολίζεται και ως $\underline{\nabla} f(\underline{x_0})$ (κλίση της $\underline{f}$ στό σημείο $\underline{x_0}$).

Γεωμετρική Ερμηνεία $(n=2,\ m=1)$

Ο ορισμός λέει ότι η f είναι "λεία" στό $\underline{x}_0$ ώστε να ορίζεται εφαπτόμενο επίπεδο στό γράφημα της f στό σημείο $\underline{x}_0$.



Στόν $\mathbb{R}^3$ ένα μή κατακόρυφο επίπεδο έχει ~~την μορφή~~ εξίσωση της μορφής:

$$y = a x_1 + b x_2 + c.$$

Γιά νά εφάπτεται τό επίπεδο στό γράφημα της f πρέπει οι κλίσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x_1 και x_2 στό σημείο $\underline{x}_0$ νά ~~ταυτίζονται δηλ.~~ είναι ίσες με:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \quad \text{καί} \quad b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0).$$

Επίσης στό σημείο που οι δύο επιφάνειες εφάπτονται:

$$f(\underline{x}_0) = y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0)\, x_1^0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0)\, x_2^0 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = f(\underline{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0)\, x_1^0 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0)\, x_2^0$$

Επομένως η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου (9)

γράφεται:

$$y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0})x_2 + f(\underline{x_0}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})x_1^0 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0})x_2^0$$

$$= \cancel{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})} \; f(\underline{x_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0})(x_2 - x_2^0)$$

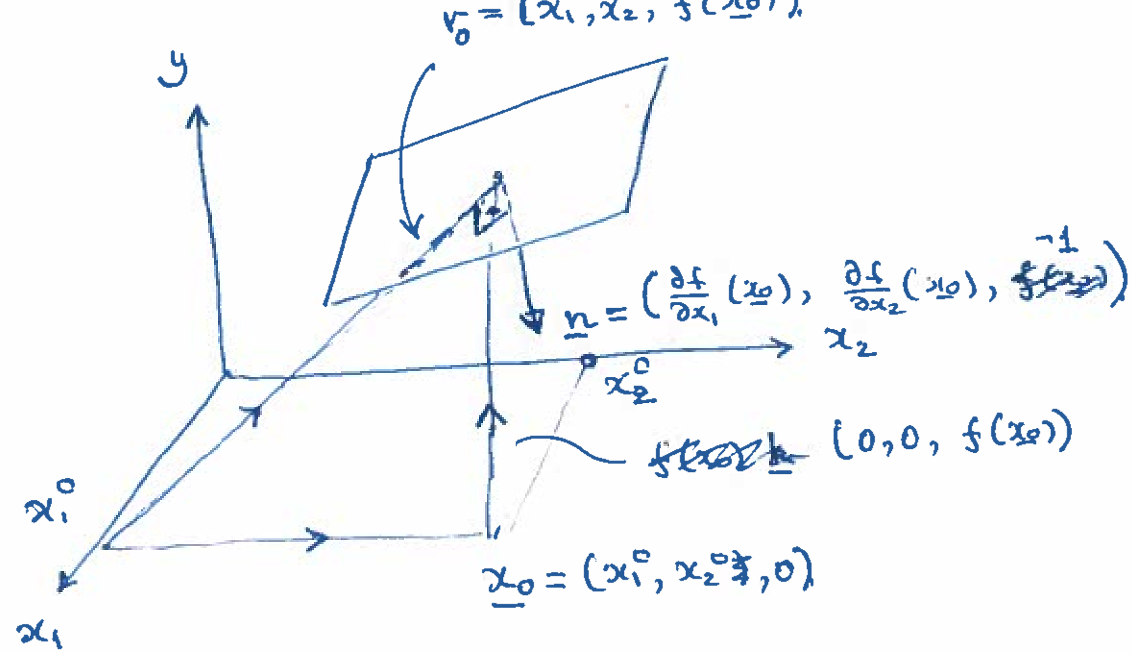
$$\Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}) \;\vdots\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \;\vdots\; -1 \right] \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ y - f(\underline{x_0}) \end{bmatrix} = 0$$

Ισοδύναμα, σε μορφή εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:

$$\langle \underline{n}, \underline{r} - \underline{r_0} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \underline{r}, \underline{n} \rangle = \langle \underline{r_0}, \underline{n} \rangle$$

όπου $\underline{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \;\vdots\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \;\vdots\; -1 \right]$, $\underline{r} = [x_1, x_2 \; y]$

και $\underline{r_0} = [x_1^0 \;\; x_2^0 \;\; f(\underline{x_0})]$



<u>Παρατήρηση</u>: Θέτοντας $g(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + Df(x_0)(\underline{x} - \underline{x_0})$

στον ορισμό παραγωγισιμότητας έχουμε:

(i) Η $\underline{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι αφινική συνάρτηση με $\underline{g}(\underline{x_0}) = \underline{f}(\underline{x_0})$

(ii) $$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \frac{\| \underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x}) \|}{\| \underline{x} - \underline{x_0} \|} = 0 \qquad (*)$$

Από προηγούμενη παρατήρηση (απλοποίηση ορισμού) η $\underline{f}$ είναι διαφορίσιμη στό $\underline{x}_0 \in U$ αν και μόνο αν υπάρχει αφινική συνάρτηση $\underline{g}$ μέ $\underline{g}(\underline{x}_0) = \underline{f}(\underline{x}_0)$ που ικανοποιεί την σχέση (κ).

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογίσετε τον πίνακα μερικών παραγώγων $Df(x,y)$ των συναρτήσεων

$$\text{(i) } \underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + y \\ y^2 x \end{bmatrix}, \text{(ii) } \underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + \cos y \\ y e^x \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

$$\text{(i) } D\underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \text{(ii) } D\underline{f} = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ y e^x & e^x \end{bmatrix}$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα δείχνουν ότι στον ορισμό παραγωγισιμότητας η ύπαρξη μερικών παραγώγων καί η συγκεκριμένη μορφή του πίνακα $T = D\underline{f}(\underline{x})$ προκύπτουν άμεσα από την ύπαρξη του ορίου (και άρα μπορούμε να τα παραλείψουμε).

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in U$. Τότε, αν η $\underline{f}$ είναι διαφορίσιμη στό $\underline{x}_0$, όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι $D_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x}_0)$ ($\|\underline{u}\| = 1$) υπάρχουν (άρα καί οι μερικές παράγωγοι) και επιπλέον $D_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x}_0) = D\underline{f}(\underline{x}_0)\underline{u}$

<u>Απόδειξη</u>: Από τον ορισμό (χωρίς την υπόθεση ύπαρξης

μερικών παραγώγων και την μορφή του πίνακα $T = Df(\underline{x}_0)$ (11)

αν η $\underline{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0$,

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{\| \underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - T(\underline{x} - \underline{x}_0) \|}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|} = 0$$

Παίρνοντας το όριο $\underline{x} \to \underline{x}_0$ κατά μήκος της ευθείας $\underline{x} = \underline{x}_0 + h\underline{u}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| \underline{f}(\underline{x}_0 + h\underline{u}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - T h \underline{u} \|}{\| h \underline{u} \|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \left\| \frac{\underline{f}(\underline{x}_0 + h\underline{u}) - \underline{f}(\underline{x}_0)}{h} - T\underline{u} \right\| = 0$$

και επομένως $D_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x}_0) = T\underline{u}$ $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Αν η υπόθεση του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει, τότε

$$T = D\underline{f}(x_0) = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & T_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

όπου $T_{ij} = \dfrac{\partial f_i(\underline{x}_0)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\underline{u} = \underline{e}_j = [0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0]^T$ με το 1 στην θέση j. Τότε:

$$D_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x}_0) = T\underline{e}_j = \begin{bmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \\ \vdots \\ T_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

και επομένως $T_{ij} = \left[D\underline{f}(\underline{x}_0) \right]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$. $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό και $\underline{x_0} \in U$. Αν η $\underline{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underline{x_0}$, τότε η $\underline{f}$ είναι συνεχής στο $\underline{x_0}$.

<u>Απόδειξη</u>: Από τον ορισμό της διαφορισιμότητας (παραγωγισιμότητας) υπάρχει αφινική συνάρτηση $\underline{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $\underline{g}(\underline{x_0}) = \underline{f}(\underline{x_0})$ τ.ω.

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\|}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\| = \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \left(\frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\|}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} \cdot \|\underline{x} - \underline{x_0}\| \right)$$

$$= \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \left(\frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\|}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} \right) \cdot \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \|\underline{x} - \underline{x_0}\|$$

$$= 0 \cdot 0 = 0 \qquad (*)$$

Εφόσον η $\underline{g}$ είναι αφινική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\underline{x_0}$ (άσκηση!) και επομένως:

$$\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x_0})\| = \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x_0})\| = \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x_0})\|$$

$$\leq \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\| + \|\underline{g}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x_0})\|$$

$$\to 0 + 0 = 0 \quad \text{καθώς } \underline{x} \to \underline{x_0}$$

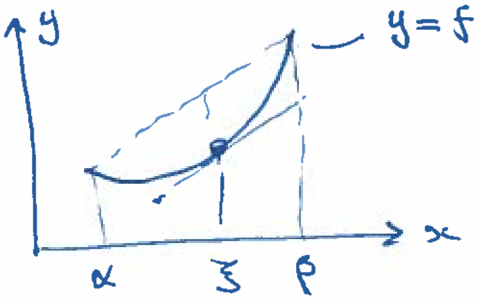
(το πρώτο όριο λόγω της σχέσης (*) και το δεύτερο λόγω συνέχειας της $\underline{g}(\underline{x})$ στο $\underline{x_0}$). $\square$

Θεώρημα: Έστω $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ ανοικτό. Αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f_i / \partial x_j$ της f υπάρχουν όλες και είναι συνεχείς ~~σε μια γειτονιά ενός σημείου~~ στο σημείο $\underline{x}_0 \in \mathcal{U}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$.

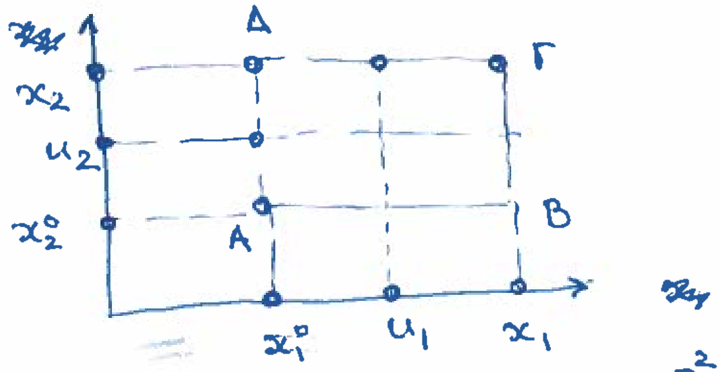
Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρειαστούμε το Θεώρημα μέσης τιμής στο $\mathbb{R}$:

Λήμμα: Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ και διαφορίσιμη στο (α, β). Τότε $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$



Απόδειξη (Θεωρήματος). Για απλότητα η απόδειξη παρουσιάζεται για την περίπτωση $n=2$, $m=1$ μόνο. Στην γενική περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια αλλά χρειαζόμαστε πολύπλοκο συμβολισμό.



Έστω $\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Γράφουμε:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) =$$

$$= \left(f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) \right) + \left(f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) \right).$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής στο $\mathbb{R}$:

$$f(x_1,x_2) - f(x_1^0, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2)\,(x_1 - x_1^0)$$

όπου u_1 σημείο μεταξύ των x_1^0 και x_1. Παρόμοια:

$$f(x_1^0,x_2) - f(x_1^0,x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,u_2)\,(x_2 - x_2^0)$$

Επομένως:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1,x_2)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,u)(x_2 - x_2^0)$$

Επίσης:

$$|u_1 - x_1^0| < |x_1 - x_1^0| \leq \|\underline{x} - \underline{x_0}\| \Rightarrow u_1 \to x_1^0 \text{ καθώς } \underline{x} \to \underline{x_0}$$

Επομένως:

$(u_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ καθώς $\underline{x} \to \underline{x_0}$ και

$(x_1^0, u_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ καθώς $\underline{x} \to x_0$

Εφόσον οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο $\underline{x_0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1,x_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \text{ και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,u_2) \to \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0})$$

καθώς $\underline{x} \to \underline{x_0}$. Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι:

$$\frac{|f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) - T(\underline{x} - \underline{x_0})|}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} \to 0 \quad \text{καθώς } \underline{x} \to \underline{x_0}$$

όπου $T = \nabla \underline{f}(\underline{x_0}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}) \,\vdots\, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0}) \right]$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\left| f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0)(x_1 - x_1^0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0)(x_2 - x_2^0) \right|$$

$$\overset{(*)}{=} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right) \cdot (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right) \cdot (x_2 - x_2^0) \right|$$

$$\leq E \left[(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \right]^{1/2} = E \| \underline{x} - \underline{x}_0 \|$$

όπου

$$E = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Επομένως,

$$\frac{| f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f (\underline{x} - \underline{x}_0) |}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|} \leq E \to 0$$

καθώς $\underline{x} \to \underline{x}_0$ και επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$. □

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η συνάρτηση $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots m$ και $j = 1, 2, \ldots n$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι "κλάσης C^1"

Ιδιότητες παραγώγων

Θεώρημα (Αθροίσματα, γινόμενα, πηλίκα)

(i) Έστω $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$ και έστω $c \in \mathbb{R}$.
Η $\underline{h}(\underline{x}) = c\underline{f}(\underline{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$ και

$$D\underline{h}(\underline{x}_0) = c \cdot D\underline{f}(\underline{x}_0) \qquad (D\underline{h}, D\underline{f} \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

(ii) Έστω ότι $\underline{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{g}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμες στο $\underline{x}_0$. Η $\underline{h}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$ και

$$D\underline{h}(\underline{x}_0) = D\underline{f}(\underline{x}_0) + D\underline{g}(\underline{x}_0), \ (Df, Dg \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

(iii) Έστω ότι $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\underline{x}_0$ και έστω $h(\underline{x}) = g(x) f(x)$. Τότε η $h: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$ και

$$D h(\underline{x}_0) = g(\underline{x}_0) Df(\underline{x}_0) + f(\underline{x}_0) Dg(x_0)$$

$(Df, Dg, Dh \in \mathbb{R}^{1 \times n})$.

(iv) Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στο (iii), έστω $h(\underline{x}) = f(\underline{x})/g(\underline{x})$ και έστω ότι $g(\underline{x}) \neq 0 \ \forall \underline{x} \in U$. Τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x}_0$ και

$$Dh(\underline{x}_0) = \frac{g(\underline{x}_0)Df(\underline{x}_0) - f(\underline{x}_0)Dg(\underline{x}_0)}{[g(\underline{x}_0)]^2}$$

$(Df, Dg, Dh \in \mathbb{R}^{1 \times n})$.

Απόδειξη ((ii) μόνο).

$$\| h(\underline{x}) - h(\underline{x}_0) - [Df(\underline{x}_0) + Dg(\underline{x}_0)](\underline{x} - x_0) \| =$$

$$= \| f(\underline{x}) - \cancel{Df(x_0)}\, f(\underline{x}_0) - Df(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ g(\underline{x}) - g(\underline{x}_0) - Dg(\underline{x}_0)(\underline{x} - x_0) \|$$

$$\leq \|f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) - Df(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})\| +$$

$$+ \|g(\underline{x}) - g(\underline{x_0}) - Dg(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})\|$$

Άρα:
$$\frac{\|h(\underline{x}) - h(\underline{x_0}) + [Df(\underline{x_0}) + Dg(\underline{x_0})](\underline{x}-\underline{x_0})\|}{\|\underline{x}-\underline{x_0}\|} \leq$$

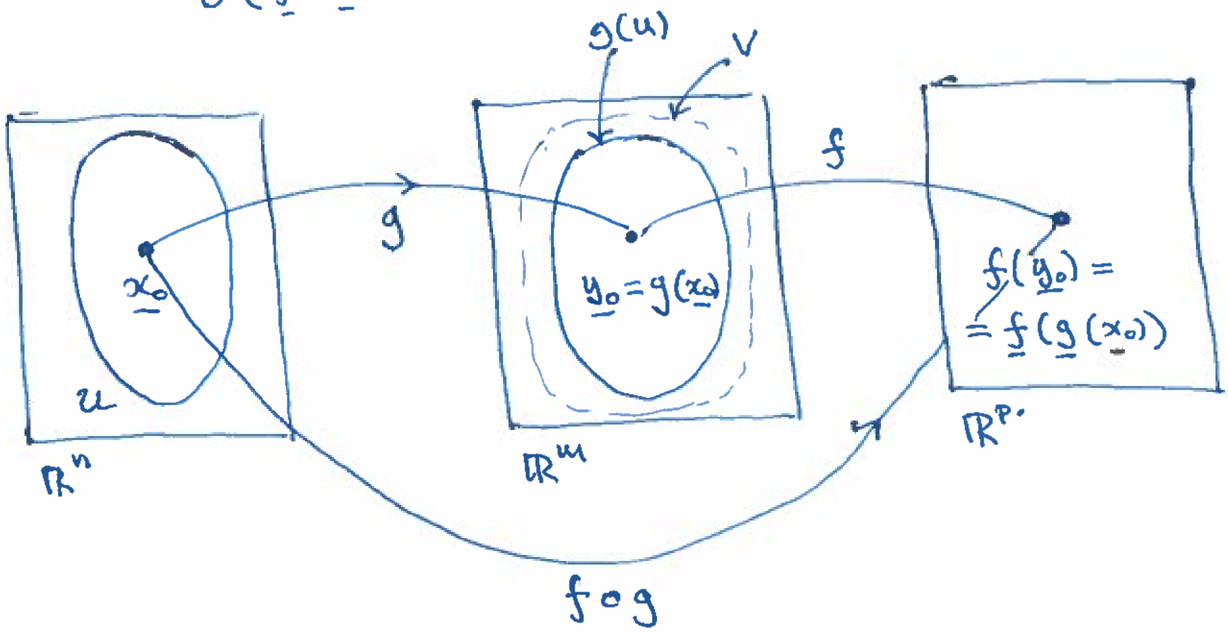
$$\leq \frac{\|f(\underline{x}) + f(\underline{x_0}) - Df(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})\|}{\|\underline{x}-\underline{x_0}\|} + \frac{\|g(\underline{x}) + g(\underline{x_0}) - Dg(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})\|}{\|\underline{x}-\underline{x_0}\|}$$

$\to 0 + 0 = 0$ καθώς $\underline{x} \to \underline{x_0}$

Κανόνας Αλυσίδας

Θεώρημα: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω δεδομένες ~~$g: U \to \mathbb{R}$~~ $\underline{g}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καί $\underline{f}: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ συναρτήσεις με $\underline{g}(U) \subseteq V$. Αν η $\underline{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x_0}$ καί η $\underline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{y_0} = \underline{g}(\underline{x_0})$, τότε η $\underline{f} \circ \underline{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x_0}$ καί

$$D(\underline{f}\circ\underline{g})(\underline{x_0}) = D\underline{f}(\underline{y_0}) \cdot D\underline{g}(\underline{x_0})$$



<u>Απόδειξη</u>: Έστω $A = Dg(\underline{x}_0)$, $B = Df(\underline{y}_0)$ και

$$\underline{u}(\underline{h}) = g(\underline{x}_0+\underline{h}) - g(\underline{x}_0) - A\underline{h}$$

$$\underline{v}(\underline{k}) = f(\underline{y}_0+\underline{k}) - f(\underline{y}_0) - B\underline{k}$$

γιά κάθε $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{k} \in \mathbb{R}^m$ γιά τα οποία οι συναρτήσεις $g(\underline{x}_0+\underline{h})$ και $f(\underline{y}_0+\underline{k})$ ορίζονται. Τότε:

$\| \underline{u}(\underline{h}) \| = \varepsilon(\underline{h}) \|\underline{h}\|$ όπου $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ καθώς $\underline{h} \to \underline{0}$, και

$\| \underline{v}(\underline{k}) \| = \eta(\underline{k}) \|\underline{k}\|$ " $\eta(\underline{k}) \to 0$ καθώς $\underline{k} \to \underline{0}$

Δοσμένου $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$, επιλέγουμε $\underline{k} = g(\underline{x}_0+\underline{h}) - g(\underline{x}_0)$.

Τότε:

$$\|\underline{k}\| = \|g(\underline{x}_0+\underline{h}) - g(\underline{x}_0)\| = \|A\underline{h} + \underline{u}(\underline{h})\|$$

$$\leq \|A\underline{h}\| + \|\underline{u}(\underline{h})\| \leq \|A\|\cdot\|\underline{h}\| + \|\underline{u}(\underline{h})\|$$

$$\leq \|A\|\cdot\|\underline{h}\| + \varepsilon(\underline{h})\cdot\|\underline{h}\| = (\|A\| + \varepsilon(\underline{h}))\|\underline{h}\| \quad (*)$$

Επίσης, αν $\underline{F} := \underline{f} \circ \underline{g}$,

$$\underline{F}(\underline{x}_0+\underline{h}) - \underline{F}(\underline{x}_0) - BA\underline{h} = \underline{f}(\underbrace{\underline{g}(\underline{x}_0+\underline{h})}_{\underline{k}+\underline{g}(\underline{x}_0)}) - \underline{f}(\underbrace{\underline{g}(\underline{x}_0)}_{\underline{y}_0}) - BA\underline{h}$$

$$= \underline{f}(\underline{k} + \underbrace{\underline{g}(\underline{x}_0)}_{\underline{y}_0}) - \underline{f}(\underline{y}_0) - BA\underline{h}$$

$$= \underline{f}(\underline{y}_0+\underline{k}) - \underline{f}(\underline{y}_0) - BA\underline{h} = B\underline{k} + \underline{v}(\underline{k}) - BA\underline{h}$$

$$= B(\underline{k} - A\underline{h}) + \underline{v}(\underline{k}) = B[g(\underline{x}_0+\underline{h}) - g(\underline{x}_0) - A\underline{h}] + \underline{v}(\underline{k})$$

$$= B\underline{u}(\underline{h}) + \underline{v}(\underline{k}).$$

Επομένως:

$$\frac{\| \underline{F}(\underline{x}_0+\underline{h}) - \underline{F}(\underline{x}_0) - BA\,\underline{h} \|}{\|\underline{h}\|} = \frac{\| B\,\underline{u}(\underline{h}) + \underline{v}(\underline{k}) \|}{\|\underline{h}\|}$$

$$\leq \|B\| \cdot \underbrace{\frac{\|\underline{u}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}}_{\varepsilon(\underline{h})} + \frac{\|\underline{v}(\underline{k})\|}{\|\underline{h}\|} = \|B\|\,\varepsilon(\underline{h}) + \underbrace{\frac{\|\underline{v}(\underline{k})\|}{\|\underline{k}\|}}_{\eta(\underline{k})} \cdot \frac{\|\underline{k}\|}{\|\underline{h}\|}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \varepsilon(\underline{h})\,\|B\| + \eta(\underline{k})\,(\|A\| + \varepsilon(\underline{h})) \qquad \cancel{\underline{k}}$$

Στό όριο $\underline{h} \to \underline{0}$, $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ καί $\eta(\underline{k}) \to 0$.

Επομένως:

$$\frac{\| F(\underline{x}_0+\underline{h}) - F(\underline{x}_0) - BA\,\underline{h} \|}{\|\underline{h}\|} \to 0 \quad \text{καθώς } \underline{h} \to \underline{0}$$

καί επομένως η $\underline{f} \circ \underline{g}$ είναι διαφορίσιμη στό $\underline{x}_0$ καί

$$D(\underline{f} \circ \underline{g})(\underline{x}_0) = BA = D\underline{f}(\underline{y}_0)\, D\underline{g}(\underline{x}_0) \qquad \square$$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι διαστάσεις των πινάκων είναι:

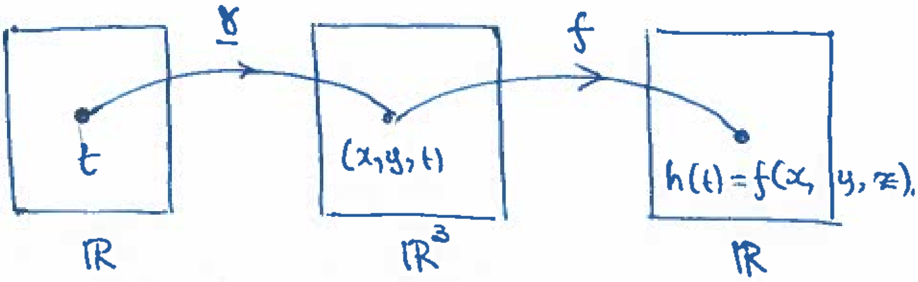
$D\underline{f}(\underline{y}_0) \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $D\underline{g}(\underline{x}_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ καί

$D(\underline{f}\circ\underline{g})(\underline{x}_0) \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Όλα τά διανύσματα $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{k} \in \mathbb{R}^m$ είναι διανύσματα στήλης.

<u>Ειδική περίπτωση 1</u>: Έστω $\underline{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ παραγωγίσιμη διαδρομή καί $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

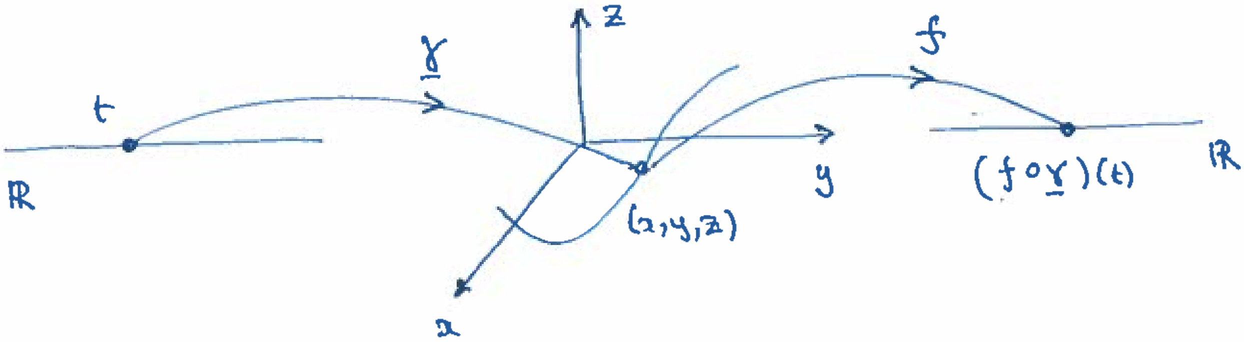
$$\underline{\gamma}: t \mapsto (x(t), y(t), z(t)), \quad h(t) = f\circ\underline{\gamma} = f(\underline{\gamma}(t))$$



$$h'(t) = \frac{dh}{dt} = Df(\underline{\gamma}(t))\,\underline{\gamma}'(t) = \nabla f(\underline{\gamma}(t))\,\underline{\gamma}'(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$



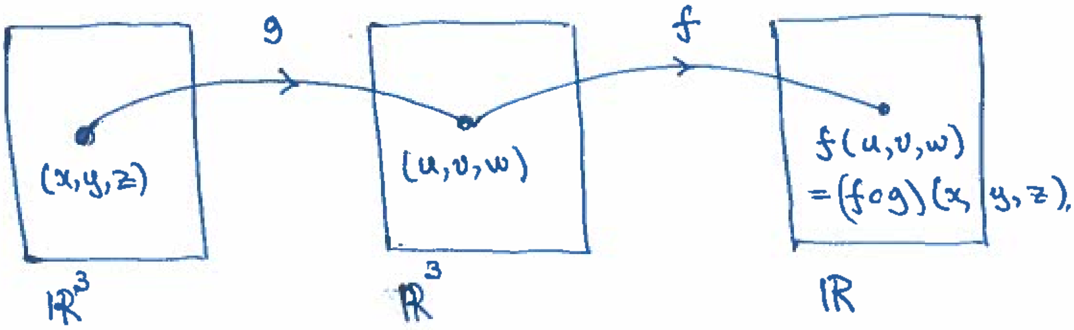
Ειδική περίπτωση 2

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

και ορίζουμε την $h = f \circ \underline{g} = f(u,v,w)$

$$= f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$



$$Dh(x,y,z) = Df(u,v,w)\, D\underline{g}(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας αν:

$$f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w, \quad u(x,y,z) = x^2 y, \quad v(x,y,z) = y^2, \quad w(x,y,z) = e^{-xz}$$

$$g(x,y,z) = (u,v,w).$$

<u>Λύση</u>: Έχουμε:

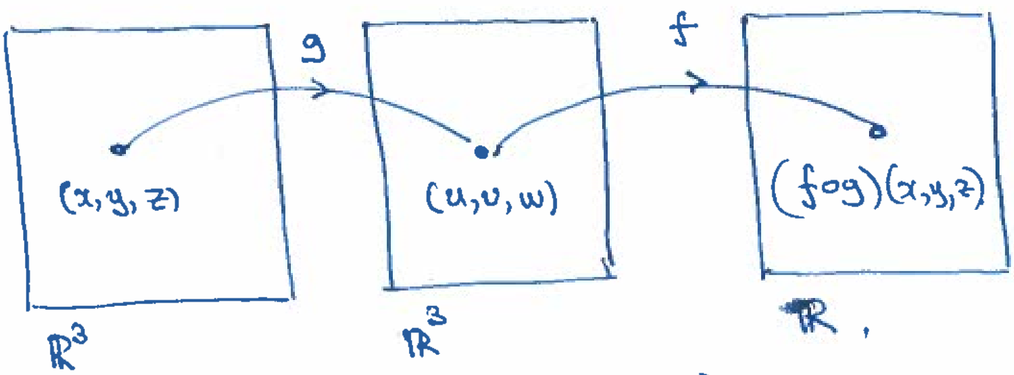
$$h(x,y,z) = (f\circ g)(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)).$$

$$= (x^2 y)^2 + (y^2)^2 - e^{-xz} = x^4 y^2 + y^4 - e^{-xz}$$

Παραγωγίζοντας απευθείας:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3 y^2 + z e^{-xz}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2x^4 y + 4y^3, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = x e^{-xz}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:



$$Dh(x,y,z) = Df(u,v,w)\, D\underline{g}(x,y,z)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = (2u)(2xy) + (2v)\cdot 0 + (-1)(-z e^{-xz})$$

$$= (2x^2y)(2xy) + z e^{-xz} = 4x^3y^2 + z e^{-xz}$$

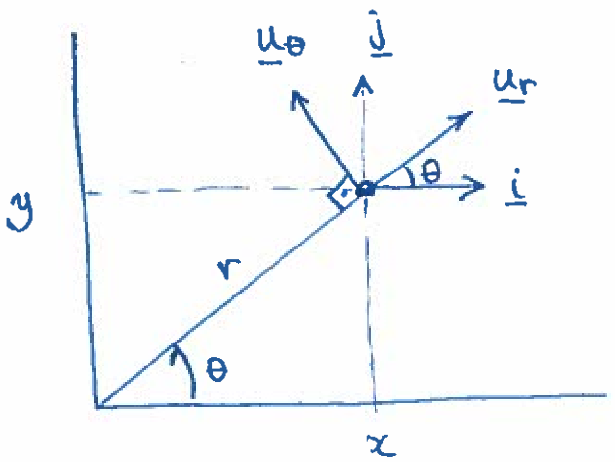
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = (2u)(x^2) + (2v)(2y) + (-1)\cdot 0$$

$$= (2x^2y)(x^2) + (2y^2)(2y) = 2x^4y + 4y^3$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = (2u)\cdot 0 + (2v)\cdot 0 + (-1)(-x e^{-xz})$$

$$= x e^{-xz}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Μερικές παράγωγοι συνάρτησης ως προς πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$



Έστω συνάρτηση $f(x,y)$ και έστω ότι γνωρίζουμε $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ (ρυθμός μεταβολής της f στην οριζόντια και κάθετη κατεύθυνση).

Ορίζουμε πολικές συντεταγμένες (r,θ): $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

Έστω $z = f(u(r,\theta), v(r,\theta)) = f(x,y)$

$$\underset{\mathbb{R}^2}{(r,\theta)} \xrightarrow{g=(u,v)} \underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \xrightarrow{f} f(x,y) = z$$

Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $z = f(u(r,\theta), v(r,\theta))$ στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση u_r και u_θ, αντίστοιχα;

Έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Δεδομένων των $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, υπολογίστε την παράγωγο της $f \circ g$ στο σημείο $(x,y) = (1,1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

$$\underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \xrightarrow{g} \underset{\mathbb{R}^2}{(u,v)} \xrightarrow{f} \underset{\mathbb{R}^3}{(\overset{f_1}{u+v}, \overset{f_2}{u}, \overset{f_3}{v^2})}$$

$$D(\overbrace{f \circ g}^{h})(x,y) = Df(u,v) \cdot Dg(x,y)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u,v)=(2,1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}_{(u,v)=(2,1)} \cdot \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Κλίση (Gradient)

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η κατά-κατεύθυνση παράγωγος κατά την κατεύθυνση $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ είναι

$$D_{\underline{u}} f(\underline{x}) = Df(\underline{x}) \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} f \cdot \underline{u} = \langle \underline{\nabla} f(\underline{x}), \underline{u} \rangle =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{x}) u_3$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας:

Αν $\underline{\gamma}(h) = \underline{x} + h\underline{u}$, $h \in \mathbb{R}$, οπότε $f(\underline{x} + h\underline{u}) = f(\underline{\gamma}(h))$,

έχουμε

$$D_u f(\underline{x}) = \frac{d}{dh} f(\underline{x} + h\underline{u}) \Big|_{h=0} \cancel{= \frac{d}{dh} f(\underline{x} + h\underline{u}) \Big|_{h=0}}$$

$$= \frac{d}{dh} f(\underline{\gamma}(h)) \Big|_{h=0} = \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(h)) \cdot \underline{\gamma}'(h) \Big|_{h=0}$$

$$= \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(0)) \cdot \underline{\gamma}'(0) = \underline{\nabla} f(x) \cdot \underline{u}$$

(διανυσματικά $D_u f(\underline{x}) = \langle \underline{\nabla} f(\underline{x}), \underline{u} \rangle$).

Θεώρημα: Αν $\underline{\nabla} f(\underline{x}) \neq \underline{0}$, η κατεύθυνση του $\underline{\nabla} f(\underline{x})$ είναι η κατεύθυνση $\underline{n}$ κατά την οποία η f αυξάνεται ταχύτερα. Επιπλέον αν $\|\underline{n}\| = 1$ ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι $\|\underline{\nabla} f(\underline{x})\|$.

Απόδειξη: Ο ρυθμός μεταβολής της f κατά την διεύθυνση $\underline{n}$, $\|\underline{n}\| = 1$, είναι:

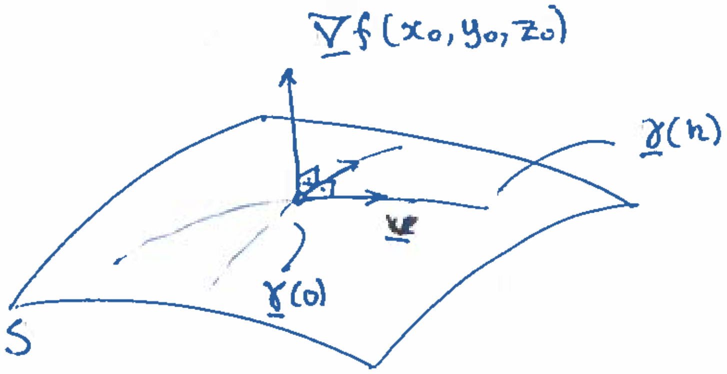
$$D_{\underline{n}} f(\underline{x}) = \langle \underline{\nabla} f(\underline{x}), \underline{n} \rangle = \| \underline{\nabla} f(x) \| \cdot \| \underline{n} \| \cdot \cos\theta$$

$$= \| \underline{\nabla} f(\underline{x}) \| \cdot \cos\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\underline{\nabla} f$ και $\underline{n}$.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μέγιστος όταν $\theta = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\underline{n}$ και $\underline{\nabla} f(\underline{x})$ είναι παράλληλα. □

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ απεικόνιση κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη) και έστω ότι το σημείο (x_0, y_0, z_0) ανήκει στην επιφάνεια στάθμης $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = k\}$ όπου k σταθερά. Τότε, το $\underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S υπό την έννοια ότι αν $\underline{v}$ εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια διαφορίσιμη διαδρομή $\underline{\gamma}(h)$ της S στο σημείο $h = 0$, με $\underline{\gamma}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, τότε $\langle \underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0), \underline{v} \rangle = 0$.



<u>Παρατήρηση</u>: Εφόσον $\underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \perp \underline{\gamma}'(0)$ για κάθε διαφορίσιμη διαδρομή $\underline{\gamma}(h) \in S$, τότε $\underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \perp$ στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\underline{\gamma}(h) \in S \Rightarrow f(\underline{\gamma}(h)) = k$. Έστω $\underline{v} = \underline{\gamma}'(0)$ όπως στην υπόθεση. Τότε

$$0 = D_{\underline{v}} f(\underline{x}) = \langle \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(0)), \underline{\gamma}'(0) \rangle = \langle \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(0)), \underbrace{\cancel{\underline{\gamma}'(0)}}_{\underline{v}} \rangle$$

και επομένως $\underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \perp \underline{v}$. □

Παράδειγμα: Υπολογίστε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $3xy + z^2 = 4$ στό σημείο $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Λύση: Έστω $f(x,y,z) = 3xy + z^2 \Rightarrow \underline{\nabla} f = (3y, 3x, 2z)$
$\Rightarrow \underline{\nabla} f(1,1,1) = (3,3,2)$ $(= 3\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k})$. Εφόσον η επιφάνεια $S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 4\}$ είναι επιφάνεια στάθμης της f, τό εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\langle \underline{\nabla} f(1,1,1), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

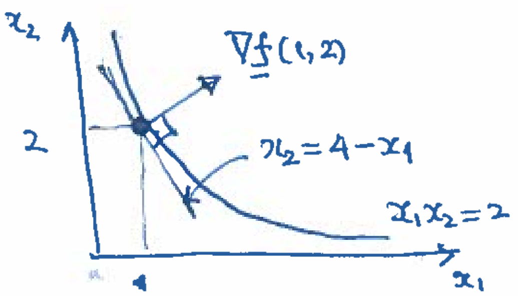
$$\Leftrightarrow \langle (3,3,2), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2z = 8.$$

Παρατήρηση: Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και θεωρήσουμε καμπύλη στάθμης $C = \{(x,y) : f(x,y) = k\}$, τότε $\underline{\nabla} f(x,y) \perp C$ σέ κάθε σημείο $(x,y) \in C$. Αν $\underline{\nabla} f(x,y) \neq \underline{0}$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία της C στό (x_0, y_0) είναι η $\langle \underline{\nabla} f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle = 0$.

Παράδειγμα (συνέχεια προηγούμενου) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$ και C η καμπύλη στάθμης της f, $C = \{(x,y) : f(x,y) = 2\}$. Να βρεθεί η κατεύθυνση $\underline{u}^*$, $\|\underline{u}^*\| = 1$, κατά την οποία η $D_{\underline{u}^*} f(x,y)$ μεγιστοποιείται στό σημείο $(1,2) \in C$.

Λύση:



Από προηγούμενη ανάλυση $\underline{u}^* = \dfrac{\underline{\nabla f}(1,2)}{\|\underline{\nabla f}(1,2)\|}$
$= \dfrac{(x_2, x_1)}{\|\underline{\nabla f}(1,2)\|}\Big|_{(1,2)} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$,
όπως προηγουμένως. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι $\|\underline{\nabla} f(1,2)\| = \sqrt{5}$. Η ευθεία που εφάπτεται στην C στό σημείο $(1,2)$, $x_2 = -2x_1 + 4$ είναι $\perp$ στο $\underline{\nabla} f(1,2)$ από προηγούμενη

Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 (συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη). Αν οι συναρτήσεις αυτές έχουν με την σειρά τους συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε λέμε ότι η f είναι κλάσης C^2 (δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη). Αντίστοιχα, ορίζουμε συναρτήσεις κλάσης $C^3, C^4, \ldots$ κλπ. Συμβολικά

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx} \,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

κλπ.

<u>Παράδειγμα</u>: Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$

<u>Λύση</u>: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2y) = 2x + 5y$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2(x+2y)\cdot 2 = 5x + 8y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+5y) = 2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(5x+8y) = 8$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x+5y) = 5 \\ f_{yx} &= (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}(5x+8y) = 5 \end{aligned}\right\} \text{Παρατηρούμε ότι } f_{xy} = f_{yx}$$

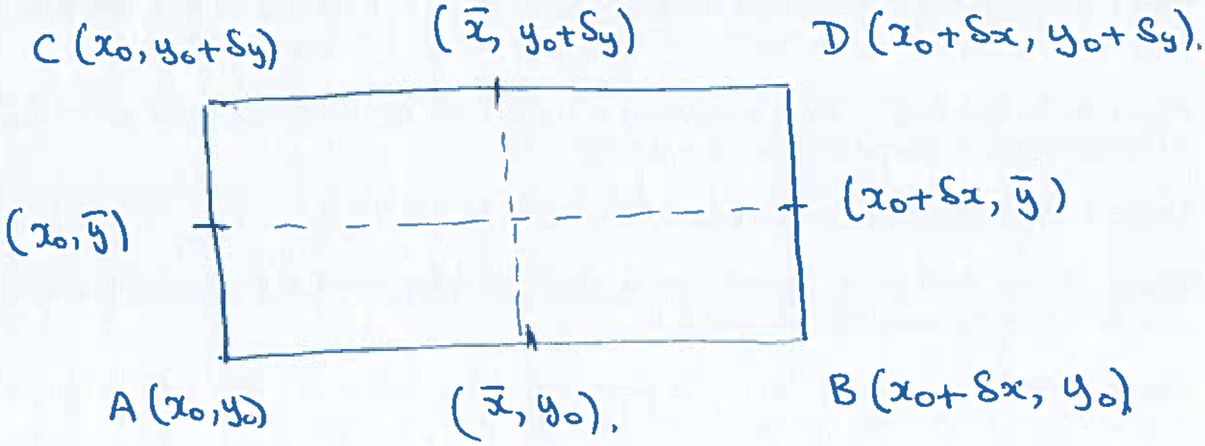
Θεώρημα: Αν $f(x,y)$ είναι κλάσης C^2, τότε $f_{xy} = f_{yx}$

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$S(\delta x, \delta y) = f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - f(x_0+\delta x, y_0) -$$

$$- f(x_0, y_0+\delta y) + f(x_0, y_0)$$

$$(= f_A - f_B - f_C + f_D)$$



Κρατώντας σταθερά τα y_0 και δy, ορίζουμε

$$g(x) = f(x, y_0+\delta y) - f(x, y_0).$$

οπότε

$$g(x_0+\delta x) - g(x_0) = f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - f(x_0+\delta x, y_0)$$

$$- \big(f(x_0, y_0+\delta y) - f(x_0, y_0) \big)$$

$$= f_A - f_B - f_C + f_D$$

$$= S(\delta x, \delta y).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) $\exists\, \bar{x}$ μεταξύ x_0 και $x_0+\delta x$, τ.ω

$$g(x_0+\delta x) - g(x_0) = g'(\bar{x})\, \delta x \quad , \quad \bar{x} \in (x_0, x_0+\delta x)$$

δηλαδή,

$$S(\delta x, \delta y) = g(x_0+\delta x) - g(x_0) = \left(f'(\bar{x}, y_0+\delta y) - f'(\bar{x}, y_0) \right) \delta x$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0) \right) \delta x .$$

Πάλι από το ΘΜΤ, $\exists\, \bar{y} \in (y_0, y_0+\delta y)$, τ.ω

$$S(\delta x, \delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\, \delta y\, \delta x$$

Εφόσον $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ είναι συνεχής,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$= \lim_{(\delta x, \delta y) \to (0,0)} \frac{S(\delta x, \delta y)}{\delta x\, \delta y} \qquad (*)$$

Παρόμοια, έστω $h(y) = f(x_0+\delta x, y) - f(x_0, y)$ (με $x_0, \delta x$ σταθεροποιημένα), οπότε

$$h(y_0+\delta y) - h(y_0) = \left(f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - f(x_0, y_0+\delta y) \right)$$
$$- \left(f(x_0+\delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \right)$$
$$= f_D - f_C - f_B + f_A = S(\delta x, \delta y)$$

Από το ΘΜΤ $\exists\, \bar{y} \in (y_0, y_0+\delta y)$, τ.ω.

$$h(y_0+\delta y, y_0) - h(y_0) = h'(\bar{y})\, \delta y$$

δηλαδή,

$$S(\delta x, \delta y) = h'(\bar{y})\,\delta y = \left(f'(x_0+\delta x, \bar{y}) - f'(x_0, \bar{y}) \right) \delta y$$

Πάλι από το ΘΜΤ, $\exists\, \bar{x} \in (x_0, x_0+\delta x)$, τ.ω.

$$S(\delta x, \delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\, \delta x\, \delta y$$

Εφόσον $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(\delta x, \delta y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$= \lim_{(\delta x, \delta y)\to(0,0)} \frac{S(\delta x, \delta y)}{\delta x \cdot \delta y} \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

και επομένως $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ εφόσον το σημείο (x_0, y_0) ήταν αυθαίρετο. $\square$

<u>Θεώρημα Taylor</u> (για συναρτήσεις μιας μεταβλητής).

Έστω ομαλή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("ομαλή": παραγωγίσιμη όσες φορές μας χρειάζεται!) Τότε:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h)$$

όπου: $\quad R_k =: R_k(x_0,h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(\tau)\, d\tau$

(υπόλοιπο αναπτύγματος) και όπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(x_0,h)}{h^k} = 0$$

(δηλ. $R_k(x_0,h)$ "μικρό" σε σύγκριση με την ήδη μικρή ποσότητα h^k).

<u>Απόδειξη</u>: Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)\, d\tau$$

$$= f(x_0) - \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{f'(\tau)}_{u}\, \underbrace{d(x_0+h-\tau)}_{dv}$$

(Ολοκλήρωση κατά μέρη: $\int_\alpha^\beta u\, dv = uv\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v\, du$)

Άρα:

$$f(x_0+h) = f(x_0) - \left[f'(\tau)(x_0+h-\tau)\Big|_{\tau=x_0}^{x_0+h} - \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-\tau) f''(\tau)\, d\tau \right]$$

$$= f(x_0) - \left[f'(\tau)\cdot 0 - f'(x_0)\cdot h - \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-\tau) f''(\tau)\, d\tau \right]$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) h - \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{f''(\tau)}_{u}\, \underbrace{d\left(\frac{(x_0+h-\tau)^2}{2}\right)}_{dv}.$$

Επομένως,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) h - \left[f''(\tau)\frac{(x_0+h-\tau)^2}{2}\Big|_{\tau=x_0}^{x_0+h} - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2} f'''(\tau)\, d\tau \right]$$

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h - \Big[f''(x_0+h)\cdot 0 - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2!} f^{(3)}(\tau)\,d\tau \Big]$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + R_2(x_0,h)$$

όπου $R_2(x_0,h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^2}{2!} f^{(3)}(\tau)\,d\tau.$

Επαγωγικά,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_k(x_0,h)$$

όπου

$$R_k(x_0,h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(\tau)\,d\tau.$$

Εφόσον $f^{(k+1)}(t)$ είναι συνεχής, είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_0, x_0+h]$, έστω ότι $|f^{k+1}(\tau)| \le M$, ~~∀~~ $\tau \in [x_0, x_0+h]$. Τότε

$$|R_k(x_0,h)| \le \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{M}{k!} \max_{\tau\in[x_0,x_0+h]} |(x_0+h-\tau)^k|\,d\tau \right|$$

$$= \frac{M}{k!}|h|^{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|R_k(x_0,h)|}{|h|^k} \le \frac{M}{k!}|h| \to 0 \quad \text{καθώς } h \to 0. \qquad \square$$

Θεώρημα Taylor (συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, ανάπτυγμα $1^{ης}$ τάξης):

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό, $\underline{x_0} \in U$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x_0}$, τότε

$$f(\underline{x_0}+\underline{h}) = f(\underline{x_0}) + Df(\underline{x_0})\,\underline{h} + R_1(\underline{x_0},\underline{h})$$

όπου $$\frac{|R_1(\underline{x_0},\underline{h})|}{\|\underline{h}\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \underline{h} \to 0.$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό παραγωγισιμότητας.

Θεώρημα Taylor: (ανάπτυγμα $2^{ης}$ τάξης).

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης, τότε

$$f(\underline{x_0}+\underline{h}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0})\,\underline{h} + \frac{1}{2}\underline{h}^T H(\underline{x_0})\,\underline{h} + R_2(\underline{x_0},\underline{h})$$

όπου $$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \right]$$

και $$H(\underline{x_0}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad [H(\underline{x_0})]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0})$$

(Εσσιανός πίνακας) και όπου

$$\frac{|R_2(\underline{x_0},\underline{h})|}{\|\underline{h}\|^2} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \underline{h} \to \underline{0}$$

Παρατήρηση:

- Το ανάπτυγμα γράφεται και ως:

$$f(\underline{x_0}+\underline{h}) = f(\underline{x_0}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0})\,h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0})\,h_i h_j + R_2(\underline{x_0},\underline{h})$$

• Ο Πίνακας $H(\underline{x}_0)$ είναι συμμετρικός ($H = H^T$):

$$H_{ij} = H_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}_0)$$

<u>Απόδειξη</u>: (Για απλοποίηση της απόδειξης υποθέτουμε ότι $f \in C^3$ (συνεχείς μερικές παράγωγοι 3ης τάξης).

Έστω $g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{h})$ με $\underline{x}_0 \in U$ και $\|\underline{h}\|$ αρκετά μικρό ώστε $\underline{x}_0 + t\underline{h} \in U$ $\forall t \in [0,1]$. (Εφικτό εφόσον U ανοικτό). Τότε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^3.

Από το Θεώρημα Taylor μιάς μεταβλητής ($k=2$, $x_0 = 0$, $h = 1$):

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2$$

$$R_2 = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} g^{(3)}(0)\, dt$$

Η $g(t)$ είναι σύνθεση συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \underline{x}_0 + t\underline{h} \to f(\underline{x}_0 + t\underline{h}) = g(t).$$

Από τον κανόνα αλυσίδας:

$$g'(t) = Df(\underline{x}_0 + t\underline{h})\,\underline{h} = \nabla f(\underline{x}_0 + t\underline{h})\,\underline{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0 + t\underline{h})\, h_i$$

Δηλαδή,

$$g'(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0)\, h_1}_{g_1'(t)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0)\, h_2}_{g_2'(t)} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\, h_n}_{g_n'(t)}$$

Παρόμοια,

$$g_1''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}+t\underline{h})\right] h_1 h_i$$

$$g_2''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0}+t\underline{h})\right] h_2 h_i$$

$$\vdots$$

$$g_n''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}+t\underline{h})\right] h_n h_i$$

$$\Rightarrow \quad g''(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x_0}+t\underline{h})\, h_j h_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0}+t\underline{h})\, h_i h_j$$

Παρόμοια:

$$g'''(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\underline{x_0}+t\underline{h})\, h_i h_j h_k$$

Επομένως:

$$g(1) = f(\underline{x_0}+\underline{h}) = \cancel{f(\underline{x_0})}\ \underbrace{g(0)}_{f(\underline{x_0})} + \underbrace{g'(0)} + \frac{g''(0)}{2!} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!} g'''(t)\,dt}_{R_2}$$

$$= f(\underline{x_0}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0})\, h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0})\, h_i h_j$$

$$\underbrace{+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{(t-1)^2}{2!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\underline{x_0}+t\underline{h}) \cdot h_i h_j h_k}_{R_2(\underline{x_0},\underline{h})}$$

Εφόσον $|h_i| \leq \|\underline{h}\|$ έχουμε για κάποια σταθερά c

$$|R_2(\underline{x}_0,\underline{h})| \leq c\|\underline{h}\|^3 \Rightarrow \frac{|R_2(\underline{x}_0,\underline{h})|}{\|\underline{h}\|^2} \leq c\|\underline{h}\| \to 0$$

καθώς $\underline{h} \to \underline{0}$. $\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y) = e^x \cos y$ γύρω από το σημείο $(x,y)=(0,0)$.

<u>Λύση</u>: Έχουμε

$$f(0,0) = e^0 \cos 0 = 1$$

$$f_x(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 1$$

$$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$$

$$f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0.$$

Άρα,

$$f(\underline{0}+\underline{h}) = f(h_1,h_2) = 1 + h_1 + 0\cdot h_2 + \frac{1}{2}\left[h_1^2 + 2\cdot 0\, h_1 h_2 - h_2^2\right] + R_2$$

$$= 1 + h_1 + \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + R_2$$

$$\left(= 1 + [1 : 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[h_1\ h_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + R_2 \right)$$

όπου $\dfrac{R_2(0,\underline{h})}{\|\underline{h}\|^2} \to 0$ καθώς $\underline{h} \to \underline{0}$

Ακρότατα Συναρτήσεων

- Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό. Το σημείο $\underline{x_0} \in U$ λέγεται τοπικό ελάχιστο (μέγιστο) της f αν υπάρχει γειτονιά του $\underline{x_0}$, $B_r(\underline{x_0})$, $r>0$, τέτοια ώστε $\forall \underline{x} \in B_r(\underline{x_0})$ να ισχύει ότι $f(\underline{x_0}) \leq f(\underline{x})$ $(f(\underline{x_0}) \geq f(x))$.

- Αν $\underline{x_0}$ τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο, τότε λέγεται τοπικό ακρότατο

- Το $\underline{x_0}$ λέγεται κρίσιμο αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\underline{x_0}$ ή αν $\underline{\nabla} f(\underline{x_0}) = \underline{0}$

- Αν το $\underline{x_0}$ είναι κρίσιμο σημείο και δεν είναι τοπικό ακρότατο τότε λέγεται σαγματικό σημείο

Θεώρημα (κριτήριο 1ης παραγώγου): Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, η $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~εί~~ είναι παραγωγίσιμη και $\underline{x_0} \in U$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε $\underline{\nabla} f(\underline{x_0}) = \underline{0}$ (δηλ. το $\underline{x_0}$ είναι κρίσιμο σημείο).

Απόδειξη: Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\underline{x_0}$. Τότε $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $g(t) := f(\underline{x_0} + t\underline{h})$ έχει τοπικό μέγιστο στο $t=0$. Επομένως $^{(*)}$ από την θεωρία συναρτήσεων μίας μεταβλητής $g'(0)=0$. Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = \underline{\nabla} f(\underline{x_0} + t\underline{h}) \cdot \underline{h} \Rightarrow g'(0) = \underline{\nabla} f(\underline{x_0}) \cdot \underline{h} = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Επιλέγοντας $\underline{h} = \underline{\nabla} f(\underline{x_0})$ έχουμε $g'(0) = \|\underline{\nabla} f(\underline{x_0})\|^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} f(\underline{x_0}) = \underline{0} \qquad \square$$

(*) Απόδειξη ότι $g'(0)=0$:

Εφόσον $g(0)$ τοπικό μέγιστο, $g(t) \leq g(0)$ γιά αρκούντως μικρό $t>0 \Rightarrow g(t)-g(0) \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t} \leq 0$$

Παρόμοια, αν $t<0$ και γιά $|t|$ αρκούντως μικρό,

$$\frac{g(t)-g(0)}{t} \geq 0 \Rightarrow g'(0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{g(t)-g(0)}{t} \geq 0$$

Εφόσον η g είναι διαφορίσιμη στο $t=0$ τά δύο πλευρικά όρια είναι ίσα και επομένως $g'(0)=0$ □

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρείτε τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$

<u>Λύση</u>: Κρίσιμα σημεία:

$$\underline{\nabla} f(x,y) = (f_x, f_y) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y)=(0,0)$ μοναδικό κρίσιμο σημείο

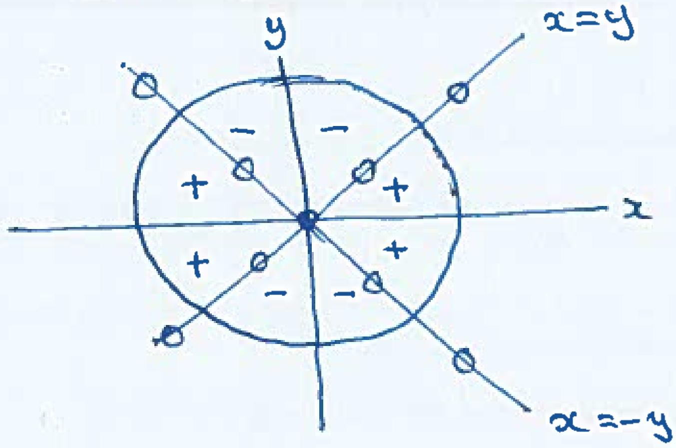
Εφόσον $0=f(0,0) < f(x,y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ το σημείο $(0,0)$ είναι ελάχιστο (και μάλιστα ολικό). Αφού το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο σημείο.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$. Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν όλα τα κρίσιμα σημεία.

<u>Λύση:</u> Κρίσιμα σημεία:

$$\nabla f(x,y) = (2x,-2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Εξετάζουμε τα πρόσημα της f σε αυθαίρετη γειτονιά του $(0,0)$:



Εφόσον σε κάθε γειτονιά $B_r(\underline{0})$ υπάρχουν σημεία (x,y) με $f(x,y)>0$ <u>και</u> $f(x,y)<0$ το σημείο $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο (σαγματικό σημείο).

<u>Παράδειγμα:</u> Βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y + y^2x$.

<u>Λύση:</u> Κρίσιμα σημεία:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2xy + y^2 = 0 \\ f_y = x^2 + 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y(2x+y) = 0 \\ x(x+2y) = 0 \end{array}\right\}.$$

Το σύστημα έχει λύσεις:

$$x=0 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=-2y \Rightarrow y(y-4y)=0 \Rightarrow -3y^2=0 \Rightarrow y=0$$

Άρα $(x,y)=(0,0)$ το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Στην ευθεία $x=y$ έχουμε $f(x,x)=2x^3 \Rightarrow$ γιά $\varepsilon>0$ αυθαίρετα μικρό : $f(\varepsilon,\varepsilon)=2\varepsilon^3>0$, $f(-\varepsilon,-\varepsilon)=-2\varepsilon^3<0$

Άρα τό $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο (σαγματικό σημείο).

Θετικά ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος $(A>0)$ αν (καί μόνο αν) $\underline{x}^T A\underline{x}>0 \quad \forall \underline{x}\in\mathbb{R}^n, \underline{x}\neq\underline{0}$. Ο A είναι αρνητικά ορισμένος $(A<0)$ αν $-A>0$.

Παρατήρηση: Αν $A>0$ χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε ότι $A=A^T$ (συμμετρικός). Έχουμε:

$$\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T \underbrace{\left(\frac{A+A^T}{2}\right)}_{A_s}\underline{x} + \underline{x}^T \underbrace{\left(\frac{A-A^T}{2}\right)}_{A_u}\underline{x}$$

όπου $A_s=A_s^T$ καί $A_u=-A_u^T$. Ισχύει ότι:

$$\underline{x}^T A_u\underline{x} = (\underline{x}^T A_u\underline{x})^T = \underline{x}^T A_u^T\underline{x} = -\underline{x}^T A_u\underline{x}$$

$$\Rightarrow 2\underline{x}^T A_u\underline{x}=0 \Rightarrow \underline{x}^T A_u\underline{x}=0$$

και επομένως:

$$\left(\underline{x}^T A\underline{x}>0 \quad \forall \underline{x}\neq 0\right) \Leftrightarrow \underline{x}^T \underbrace{\left(\frac{A+A^T}{2}\right)}_{A_s}\underline{x}>0 \quad \forall \underline{x}\neq\underline{0}$$

οπότε στή συνέχεια θα ορίζουμε θετικά ορισμένους πίνακες ως υποσύνολο των συμμετρικών πινάκων.

Λήμμα: Έστω $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (i) Ο A έχει πραγματικά ιδιοτιμές
(ii) Δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές
είναι ορθογώνια.

Απόδειξη: (i) Έστω $(\lambda, \underline{x})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του
A. Τότε $\underline{x} \neq \underline{0}$ και

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \lambda \underline{x}^* \underline{x} \quad (*) \qquad \left(\underline{x}^* =: (\overline{\underline{x}})^T \right)$$

$$\Rightarrow (\underline{x}^* A \underline{x})^* = (\lambda \underline{x}^* \underline{x})^* = \overline{\lambda}\, \underline{x}^* \underline{x}$$

$$\Rightarrow \underline{x}^* A^* \underline{x} = \overline{\lambda}\, \underline{x}^* \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \overline{\lambda}\, \underline{x}^* \underline{x} \; (**) \quad \left(A^* = (\overline{A})^T \right)$$

Άρα από $(*)$ και $(**)$: $(\lambda - \overline{\lambda}) \|\underline{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) Έστω λ_i, λ_j δύο διακριτές ιδιοτιμές του A $(\lambda_i \neq \lambda_j)$
και $\underline{x}_i, \underline{x}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. $(\underline{x}_i, \underline{x}_j \in \mathbb{R}^n$,
$\underline{x}_i \neq \underline{0}$, $\underline{x}_j \neq 0)$. Τότε

$$A \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \Rightarrow \underline{x}_j^T A \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_j^T \underline{x}_i \qquad (*)$$

$$A \underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_j \Rightarrow \underline{x}_i^T A \underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_i^T \underline{x}_j$$

$$\Rightarrow \underline{x}_j^T A^T \underline{x}_i = \lambda_j \underline{x}_j^T \underline{x}_i$$

$$\Rightarrow \underline{x}_j^T A \underline{x}_i = \lambda_j \underline{x}_j^T \underline{x}_i \qquad (**)$$

Από τα $(*)$ και $(**)$ έχουμε:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \underline{x}_j^T \underline{x}_i = 0 \Rightarrow \underline{x}_j^T \underline{x}_i = 0 \; (\Rightarrow \underline{x}_j \perp \underline{x}_i). \quad \square$$

Παρατήρηση: Αν υπάρχει ιδιοτιμή με πολλαπλότητα $r > 1$,
ο αντίστοιχος ιδιοχώρος έχει διάσταση r και μπορούμε να επιλέξουμε
ορθογώνια βάση από r ιδιοδιανύσματα. Επομένως αν $A = A^T$ υπάρχουν

n ιδιοδιανύσματα κατά ζεύγη ορθογώνια. Αν επιλέξουμε την νόρμα κάθε ιδιοδιανύσματος ίση με την μονάδα, έχουμε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και επομένως ο πίνακας των n ιδιοδιανυσμάτων $[\underline{x}_1\ \underline{x}_2 \cdots \underline{x}_n]$ είναι ορθογώνιος.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε $A>0$ αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $A = A^T > 0$ και $(\lambda, \underline{x})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος, δηλ. $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$. Τότε:

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \lambda \underline{x}^T \underline{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\underline{x}^T A \underline{x}}{\|\underline{x}\|^2} > 0$$

Αντίστροφα αν οι ιδιοτιμές του A ~~είναι~~ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ είναι θετικές και $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_n\}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$A \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n]}_{U} = \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n]}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

όπου $UU^T = U^T U = I_n$ και

$$AU = U\Lambda \Rightarrow A = U\Lambda U^T \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = x^T U \Lambda U^T x$$

$$\Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = \underbrace{(U^T \underline{x})^T}_{\underline{y}^T} \Lambda \underbrace{(U^T x)}_{\underline{y}} = \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$$

$$\forall \underline{y} \neq \underline{0} \Rightarrow (\underline{x}^T A \underline{x} > 0\ \ \forall \underline{x} \neq \underline{0}) \Rightarrow A = A^T > 0. \qquad \square.$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A = A^T > 0$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_n\}$. Τότε

$$\max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_1 \quad \text{και} \quad \min_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_n\ (>0).$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $U = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n]$, $UU^T = U^T U = I_n$ και $AU = U\Lambda$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Τότε

$$A = U\Lambda U^T \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T U \Lambda U^T \underline{x} = (U^T \underline{x})^T \Lambda (U^T \underline{x})$$
$$:= \underline{y}^T \Lambda \underline{y}$$

όπου $\underline{y} = U^T \underline{x}$. Παρατηρούμε ότι $\|\underline{x}\| = 1 \Leftrightarrow \|\underline{y}\| = 1$ ($\underline{y}^T\underline{y} = \underline{x}^T U U^T \underline{x} = \underline{x}^T \underline{x}$) και επιπλέον $\{U^T \underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$

Άρα:

$$\min_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \min_{\|\underline{y}\|=1} \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = \min_{\|\underline{y}\|=1} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

$$= \min \{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 : y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1\}$$
$$= \lambda_n \quad (\text{όταν } y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0 \text{ και } y_n = \pm 1).$$

$\square$

Παρόμοια $\max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_1$

<u>Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα.</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2, U ανοικτό, $\underline{x}_0 \in U$ κρίσιμο σημείο και έστω ότι ο Εσσιανός πίνακας

$$H(\underline{x}_0) = H^T(\underline{x}_0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0)\right]_{ij}$$ ~~είναι~~

είναι θετικά ορισμένος. Τότε το $\underline{x}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f (Αντίστοιχα, αν $H(\underline{x}_0) = H^T(\underline{x}_0) < 0$, το $\underline{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο της f).

Απόδειξη: (~~Για απλότητα πάλι υποθέτουμε ότι η f είναι κλάσης~~ $\cancel{C^3}$)

Από το Θεώρημα Taylor (δεύτερης τάξης), για $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\underline{h}\|$ αρκούντως μικρή, έχουμε:

$$f(\underline{x_0}+\underline{h}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0})\,\underline{h} + \frac{1}{2}\underline{h}^T H(\underline{x_0})\,\underline{h} + R_2(\underline{x_0},\underline{h})$$

όπου $|R_2(x_0,h)|/\|h\|^2 \to 0$ καθώς $\underline{h} \to \underline{0}$

- Εφόσον $H(\underline{x_0}) = H^T(\underline{x_0}) > 0 \Rightarrow \underline{h}^T H(\underline{x_0})\,\underline{h} \geq \lambda_{min}(H)\cdot\|\underline{h}\|^2 > 0$
- Εφόσον $\underline{x_0}$ κρίσιμο σημείο $\Rightarrow \nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$. Άρα

$$f(\underline{x_0}+\underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \frac{1}{2}\underline{h}^T H(\underline{x_0})\,\underline{h} + R_2(\underline{x_0},h)$$

$$\geq \underbrace{\frac{\lambda_{min}(H)}{2}}_{:=M>0}\|\underline{h}\|^2 + R_2(\underline{x_0},\underline{h}).$$

- Εφόσον $\dfrac{|R_2(\underline{x_0},\underline{h})|}{\|\underline{h}\|^2} \to 0$ καθώς $\underline{h}\to 0$, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.

$$0<\|\underline{h}\|<\delta \Rightarrow |R_2(\underline{x_0},\underline{h})| < M\|\underline{h}\|^2 \Rightarrow -M\|\underline{h}\|^2 < R_2 < M\|\underline{h}\|^2$$

Επομένως:

$$0<\|\underline{h}\|<\delta \Rightarrow f(\underline{x_0}+\underline{h}) - f(\underline{x_0}) \geq M\|\underline{h}\|^2 + R_2 > M\|\underline{h}\|^2 - M\|\underline{h}\|^2 =$$

$$\Rightarrow f(\underline{x_0}+\underline{h}) - f(\underline{x_0}) > 0 \Rightarrow f(\underline{x_0}+\underline{h}) > f(\underline{x_0})$$

και επομένως το $\underline{x_0}$ είναι τοπικό ελάχιστο (και μάλιστα αυστηρό τοπικό ελάχιστο). Παρόμοια απόδειξη για τοπικό μέγιστο (άσκηση!). $\square$

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\underline{\nabla} f(x,y) = \underline{0} \iff (2x, 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$ τό μοναδικό κρίσιμο σημείο. Από το ανάπτυγμα Taylor:

$$f(h_1,h_2) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\underline{\nabla} f(0,0)}_{\underline{0}} \underline{h} + \frac{1}{2} [h_1 \ h_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{H(0,0)} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{R_2}_{0.}$$

(Παρατηρούμε: Εφόσον στη f είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού το ανάπτυγμα Taylor είναι ταυτότητα και $R_2 \equiv 0$). Άρα

$$f(h_1,h_2) = h_1^2 + h_2^2 \Rightarrow f(h_1,h_2) - \underbrace{f(0,0)}_{0} = h_1^2 + h_2^2 > 0$$

γιά κάθε $\underline{h} \neq \underline{0} \Rightarrow (0,0)$ τοπικό ελάχιστο (και μάλιστα ολικό).

Λήμμα: Έστω $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} (= B^T)$, $\underline{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

Τότε $B = B^T > 0 \iff (a > 0$ καί $\det(B) = ac - b^2 > 0)$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Παρατήρηση: Το Λήμμα γενικεύεται: Αν $B = B^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $B > 0$ αν και μόνο αν $\det[B(1{:}i, 1{:}i)] > 0$ γιά κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $B(1{:}i, 1{:}i)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον B διατηρώντας τις πρώτες i γραμμές και τις πρώτες i στήλες.

<u>Θεώρημα</u>: (Κριτήριο $2^{ης}$ παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών). Έστω $f(x,y)$ κλάσης C^2 με πεδίο ορισμού ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Ένα σημείο $(x_0,y_0) \in U$ είναι τοπικό (αυστηρό) ελάχιστο αν ισχύουν οι τρεις παρακάτω συνθήκες:

(i) $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ $\quad$ ((x_0,y_0) κρίσιμο).

$$\left.\begin{aligned} &\text{(ii)}\quad f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \\ &\text{(iii)}\quad D := f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow H = H^T > 0$$

- Αν ισχύουν οι (i) και (iii) αλλά το πρόσημο στην ανισότητα (ii) αντιστρέφεται ($f_{xx}(x_0,y_0) < 0$), τότε το (x_0,y_0) είναι (αυστηρό) τοπικό μέγιστο.

- Αν ισχύει η (i) αλλά $D < 0$ στο (iii), τότε το κρίσιμο σημείο (x_0,y_0) είναι σαγματικό σημείο.

<u>Απόδειξη</u>: Προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα. $\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Ανάλυσε την συμπεριφορά της $f(x,y) = x^5 y + x y^5 + xy$ στα κρίσιμα σημεία της.

<u>Λύση</u>: Έχουμε: $f_x = 5x^4 y + y^5 + y = y(\overbrace{5x^4 + y^4 + 1}^{\geq 1})$ και $f_y = x^5 + 5xy^4 + x = x(\underbrace{x^4 + 5y^4 + 1}_{\geq 1})$. Άρα

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$ που είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Οι δεύτερες παράγωγοι:

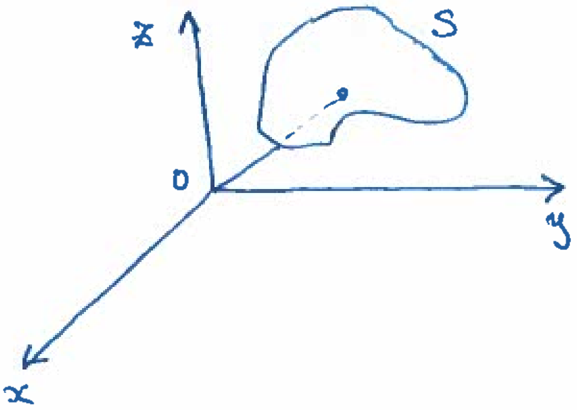
$$f_{xx}(x,y) = 20x^3y \;,\; f_{yy}(x,y) = 20xy^3 \;,\; f_{xy}(x,y) = 5x^4+5y^4+1$$

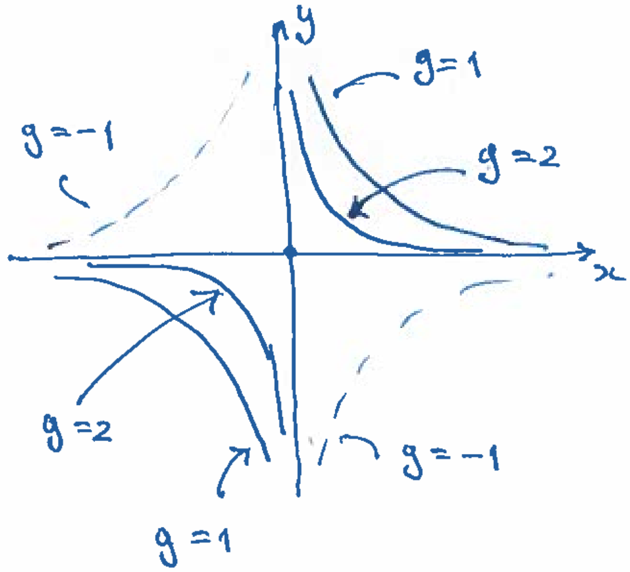
$$\Rightarrow f_{xx}(0,0)=0 \;,\; f_{yy}(0,0)=0 \;,\; f_{xy}(0,0)=1 \quad \text{και}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; \det(H(0,0)) = -1 < 0$$

Και επομένως το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα: Έστω S το γράφημα της $g(x,y) = \frac{1}{xy}$. Βρείτε τα σημεία της S που βρίσκονται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.





Τα σημεία της S είναι της μορφής $(x, y, x^{-1}y^{-1})$ $(x\neq 0, y\neq 0)$. Άρα η απόσταση ενός σημείου της S από το $(0,0,0)$ είναι

$$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+x^{-2}y^{-2}} \Rightarrow f(x,y) := d^2 = x^2+y^2+x^{-2}y^{-2}$$

Άρα πρέπει να βρούμε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $d(x,y)$ (ισοδύναμα η $f(x,y) := d^2(x,y)$) έχει (ολικά) ελάχιστα. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι:

$$f_x = 2x - 2x^{-3}y^{-2} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{x^3y^2} = 0 \Longrightarrow x^4y^2 = 1 \qquad (*)$$

$$f_y = 2y - 2x^{-2}y^{-3} = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{x^2y^3} = 0 \Longrightarrow y^4x^2 = 1 \qquad (**)$$

Από την (*) έχουμε:

$$y^2 = \frac{1}{x^4} \overset{(**)}{\Rightarrow} \frac{1}{x^8}x^2 = 1 \Rightarrow x^6 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Και επομένως: $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Άρα έχουμε 4 κρίσιμα σημεία $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Σε κάθε ένα από αυτά έχουμε $f(\pm1,\pm1) = 3$ και επομένως η (ελάχιστη) απόσταση είναι $d_{min} = \sqrt{3}$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα τέσσερα σημεία είναι τοπικά ελάχιστα υπολογίζοντας τον Εσσιανό πίνακα. Έχουμε

$$f_{xx} = 2 + 6x^{-4}y^{-2} \Rightarrow f_{xx}(\pm1,\pm1) = 8$$

$$f_{yy} = 2 + 6x^{-2}y^{-4} \Rightarrow f_{yy}(\pm1,\pm1) = 8.$$

$$f_{xy} = 4x^{-3}y^{-3} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = f_{xy}(-1,-1) = 4 \quad \text{και}$$

$$f_{xy}(1,-1) = f_{xy}(-1,1) = -4$$

Επομένως

$$H(\pm1,\pm1) = \begin{bmatrix} 8 & \pm4 \\ \pm4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} D = 64 - 16 = 48 > 0 \\ H_{11} = 8 > 0 \end{array}$$

Και επομένως τα τέσσερα σημεία είναι τοπικά ελάχιστα (και μάλιστα ολικά).