ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΕΚΠΑ

Ανάλυση 2: Εργασία, Δεκέμβρης 2024

Να απαντήσετε στα παρακάτω θέματα

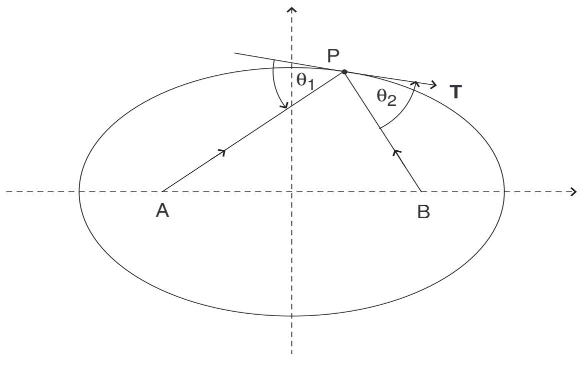
Θ1: Έστω ότι $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, είναι διανύσματα θέσης των σημείων P_i, αντίστοιχα (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες). Δείξτε ότι η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα τρία σημεία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

[5 βαθμοί]

Θ2: (α) Έστω $d(x, y, z)$ η απόσταση από το σταθερό σημείο A με Καρτεσιανές συντεταγμένες (a, b, c) στο σημείο P με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Δείξτε ότι $\boldsymbol{\nabla} d(x, y, z)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{AP}}$. **[5 βαθμοί]**

(β) Έστω P σημείο έλλειψης με εστίες τα σημεία A και B όπως δείχνει το διάγραμμα. Δείξτε ότι $\theta_1 = \theta_2$, όπου θ_1 η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ με το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και θ_2 η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{BP}}$ με το διάνυσμα $-\mathbf{T}$, όπως δείχνει το σχήμα. *Υπόδειξη:* Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής: $\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{BP}}\| = c$, όπου c θετική σταθερά. **[10 βαθμοί]**



Θ3: Έστω $T(x, y) = e^{xy} + x \cos y$ πεδίο θερμοκρασίας στο επίπεδο (x, y), όπου οι μεταβλητές x και y μετρώνται σε m και η μεταβλητή T σε deg. Την χρονική στιγμή $t = 0$ σωματίδιο βρίσκεται στην θέση $(x, y) = (0, 0)$ και κινείται με ταχύτητα 2 m/s. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της γωνίας μεταξύ του διανύσματος ταχύτητας και του διανύσματος $\mathbf{i}$ ώστε $0 \leq \frac{dT}{dt}(0) \leq 1$ deg/s. **[10 βαθμοί]**

Θ4: Δείξτε ότι για δύο παραγωγίσιμα διανυσματικά πεδία $\mathbf{a}(x, y, z)$ και $\mathbf{b}(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ ισχύει η ταυτότητα: $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{b}$. **[10 βαθμοί]**

Θ5: Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$ και να τα ταξινομήσετε ως τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα, η σαγματικά σημεία. Για κάθε κρίσιμο σημείο (x^*, y^*) να δικαιολογήσετε το συμπέρασμα της ταξινόμησης σας εξετάζοντας το πρόσημο του όρου $f(x^* + \delta x, y^* + \delta y) - f(x^*, y^*)$ γιά αρκούντως μικρά $|\delta x|$ και $|\delta y|$. *Υπόδειξη*: Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x^* + \delta x, y^* + \delta y)$ γύρω από το σημείο (x^*, y^*) που περιέχει έως και τετραγωνικούς όρους.
[10 βαθμοί]

Θ6: Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $r = 1 + \sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, όπου (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες. **[5 βαθμοί]**

Θ7: Με χρήση του Θεωρήματος Gauss να βρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ διαμέσω της επιφάνειας $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z = R^2, 0 \le z \le R^2\}$. **[10 βαθμοί]**

Θ8: Έστω διανυσματικό πεδίο δύναμης: $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

(i) Υπολογίστε το έργο που ασκεί το πεδίο για να κινήσει σωματίδιο κατά μήκος της παραβολής $z = y^2$, $x = 0$, από το σημείο A με συντεταγμένες $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ έως το σημείο B με συντεταγμένες $(x, y, z) = (0, 2, 4)$. **[5 βαθμοί]**

(ii) Υπολογίστε την απόκλιση και τον στροβιλισμό του πεδίου $\mathbf{F}$. Είναι το πεδίο $\mathbf{F}$ συντηρητικό; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **[5 βαθμοί]**

(iii) Σωματίδιο βρίσκεται στην θέση $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Με χρήση κατάλληλου επικαμπύλιου ολοκληρώματος υπολογίστε το έργο που ασκεί το πεδίο για να κινήσει το σωματίδιο σε αριστερόστροφη κυκλική τροχιά η οποία περιέχεται στο επίπεδο (x, y), έχει κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και μοναδιαία ακτίνα, και να το επαναφέρει στην αρχική του θέση (με μία περιστροφή). Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας με χρήση του Θεωρήματος Green. **[10 βαθμοί]**

Θ9: Έστω $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση επιφάνειας S που ορίζεται από τις:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

(α) Έστω

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) := \mathbf{T}_u \ \text{ και } \ \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) := \mathbf{T}_v$$

και έστω

$$E = \left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|^2,\ \ F = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v},\ \ G = \left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\|^2$$

Δείξτε ότι: $\sqrt{EG - F^2} = \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\|$ και ότι το εμβαδόν επιφάνειας της S είναι: $A(S) = \int\int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$. Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, πως μπορούμε να εκφράσουμε το $\int\int_S f dS$ για μία γενική συνάρτηση f; **[5 βαθμοί]**

(β) Ποια μορφή παίρνει ο τύπος για το $A(S)$ αν τα διανύσματα $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ είναι ορθογώνια;

[5 βαθμοί]

(γ) Χρησιμοποιώντας τα ερωτήματα (α) και (β) υπολογίστε το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας. **[5 βαθμοί]**