

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Ιούνιος 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω ότι $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, διανύσματα θέσης των σημείων P_i , $i = 1, 2, 3$, αντίστοιχα (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες). Δείξτε ότι η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα τρία σημεία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

[1 βαθμός]

Λύση: Έστω Π το επίπεδο που ορίζουν τα τρία σημεία. Τότε

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \in \Pi \text{ και } \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \in \Pi$$

και επομένως

$$\mathbf{n} := \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \perp \Pi$$

Έστω $\mathbf{r} = (x, y, z)$ αυθαίρετο σημείο στο Π . Τότε το διάνυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \in \Pi$ και επομένως $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \perp \mathbf{n}$. Άρα:

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \perp \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Θέμα 2: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } xy \neq 0 \\ 0, & \text{αν } xy = 0 \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

[1 βαθμός]

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε: $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Τότε αν $xy \neq 0$,

$$\|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \|(x, y)\| < \sqrt{2} \delta = \sqrt{2} \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = \epsilon$$

εφόσον

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2|x| \cdot |y| \leq 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

ενώ αν $xy = 0$, $|f(x, y)| = 0 < \epsilon$. Σε κάθε περίπτωση $|f(x, y)| < \epsilon$ και άρα η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Θέμα 3: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. (β) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$. (γ) Εξετάστε αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Δικαιολογήστε επαρκώς τις απαντήσεις σας. [1+1+0,5 βαθμοί]

Λύση: (α) Έχουμε για $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$|f(x, y)| \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0$$

καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$ και ως πηλίκο πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι συνεχής και σε κάθε άλλο σημείο του $\mathbb{R}^2$ (στα οποία ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται). Άρα η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

Η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής και επομένως είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Στο σημείο $(0, 0)$ έχουμε:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \quad \text{και} \quad f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

και άρα οι μερικές παράγωγοι είναι καλά ορισμένες στο $(0, 0)$. Η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Όμως αυτό δεν ισχύει. Πράγματι αν $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, τότε

$$\lim_{(x, \lambda x) \rightarrow (0, 0)} \frac{\lambda^2 x^3}{|x|^3(1 + \lambda^2)^{3/2}} = 0$$

Εφόσον

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2 x^3}{|x|^3(1 + \lambda^2)^{3/2}} = \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lambda^2 x^3}{|x|^3(1 + \lambda^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}}$$

και άρα το όριο δεν υπάρχει. Επομένως η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ και άρα δεν είναι διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

(γ) Αν η f είχε συνεχείς μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$ θα ήταν διαφορίσιμη σε αυτό το σημείο, όμως αυτό όπως δείξαμε στο (β) δεν ισχύει.

Θέμα 4: Έστω $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = \|\mathbf{r}\|$ (Ευκλείδεια νόρμα). Δείξτε ότι $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. [1 βαθμός]

Λύση: Έχουμε

$$r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{1}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -xr^{-3}$$

Παρόμοια:

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial y} = -yr^{-3}, \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial z} = -zr^{-3}$$

Επομένως

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Θέμα 5: Έστω $(x(t), y(t))$ μία διαδρομή στο επίπεδο, $0 \leq t \leq 1$, και έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη). Υποθέστε ότι $\frac{dx}{dt}f_x + \frac{dy}{dt}f_y \leq 0$. Δείξτε ότι $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$. [1 βαθμός]

Λύση: Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{df(t)}{dt} := \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \frac{dx}{dt}f_x + \frac{dy}{dt}f_y \leq 0$$

Άρα η f είναι φθίνουσα συνάρτηση κατά μήκος της διαδρομής και επομένως: $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$.

Θέμα 6: Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο και ότι αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο της f . [1 βαθμός]

Λύση: Έχουμε

$$f_x = 5ye^x - 5e^{5x} = 0 \Rightarrow 5e^x(y - e^{4x}) = 0 \Rightarrow y = e^{4x} \text{ και } f_y = 5e^x - 5y^4 = 0 \Rightarrow e^x = y^4$$

Άρα

$$e^{16x} - e^x = 0 \Rightarrow e^x(e^{15x} - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ μοναδικό κρίσιμο σημείο.}$$

Επίσης:

$$f_{xx} = 5ye^x - 25e^{5x} \Rightarrow f_{xx}(0, 1) = 5 - 25 = -20, \quad f_{yy} = -20y^3 \Rightarrow f_{yy}(0, 1) = -20, \quad f_{xy} = 5e^x \Rightarrow f_{xy}(0, 1) = 5$$

Επομένως πίνακας Hessian:

$$H(0, 1) = \begin{bmatrix} -20 & 5 \\ 5 & -20 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 400 - 25 = 375 > 0 \text{ και } H_{11}(0, 1) = -20 < 0$$

είναι αρνητικά ορισμένος και το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό μέγιστο.

Θέμα 7: (α) Υπολογίστε τα παρακάτω δύο ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy \text{ και } I_2 = \int \int \int_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz dx dy dz$$

όπου D είναι το ογδομήριο της μοναδιαίας σφαίρας: $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Υπόδειξη: (α) Στο I_1 αλλάξτε την σειρά της ολοκλήρωσης. (β) Στο I_2 χρησιμοποιείστε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες. Οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορεί να σας είναι χρήσιμες: $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$, $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)$. [1+1 βαθμοί]

Λύση: Με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης:

$$I_1 = \int_{x=0}^2 e^{x^2} \int_{y=0}^{2x} dy dx = \int_0^2 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_{x=0}^2 = e^4 - 1$$

Επίσης

$$I_2 = \int \int \int_{D^*} r^2(r \sin \phi \cos \theta)(r \sin \phi \sin \theta)(r \cos \phi)r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$$

όπου

$$D^* = \left\{ (r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Επομένως:

$$I_2 = \int_{r=0}^1 r^7 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sin^3 \phi \cos \phi d\phi$$

και άρα:

$$\int_{r=0}^1 r^7 dr = \left[\frac{r^8}{8} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{8}, \quad \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{4} [\cos 2\theta]_{\theta=\pi/2}^0 = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2}$$

Επίσης

$$\sin^3 \phi = \frac{3}{4} \sin \phi - \frac{1}{4} \sin 3\phi \Rightarrow \sin^3 \phi \cos \phi = \frac{3}{4} \sin \phi \cos \phi - \frac{1}{4} \sin 3\phi \cos \phi$$

και άρα

$$\sin^3 \phi \cos \phi = \frac{3}{8} \sin 2\phi - \frac{1}{8} \sin 4\phi - \frac{1}{8} \sin 2\phi = \frac{1}{4} \sin 2\phi - \frac{1}{8} \sin 4\phi$$

Επομένως:

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \sin^3 \phi \cos \phi d\phi = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} \sin 2\phi - \frac{1}{8} \sin 4\phi \right) d\phi = \frac{1}{8} [\cos 2\phi]_{\pi/2}^0 + \frac{1}{32} [\cos 4\phi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

και τελικά

$$I_2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Θέμα 8: Έστω τα σημεία O , A και B στο επίπεδο $z = 1$ με Καρτεσιανές συντεταγμένες $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$, αντίστοιχα. Έστω C η κλειστή διαδρομή $OABO$ που αποτελείται από: (i) Το ευθύγραμμο τμήμα OA , (ii) το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ μεταξύ των σημείων A και B που κείται στο επίπεδο $z = 1$ και έχει κέντρο το σημείο O , και (iii) το ευθύγραμμο τμήμα BO . Έστω διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. (α) Υπολογίστε τον στροβιλισμό $\nabla \wedge \mathbf{F}$. (β) Υπολογίστε (με άμεσο τρόπο) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ όπου η διαδρομή C έχει θετικό προσανατολισμό. (Υπόδειξη: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$). (γ) Κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού δείξτε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό. [0,5+1+1 βαθμοί]

Λύση: (α) Ο στροβιλισμός του $\mathbf{F}$:

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + y & x & x \end{bmatrix} = 0\mathbf{i} - (1 - 1)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

(β) Έχουμε

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Στο OA : $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}$ και άρα $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = dx$. Επομένως:

$$\int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^1 dx = 1$$

Στο AB : $\mathbf{F} = (1 + \sin \theta)\mathbf{i} + \cos \theta\mathbf{j} + \cos \theta\mathbf{k}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Επίσης

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta, \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$$

όπου $\mathbf{u}_r$ και $\mathbf{u}_\theta$ τα μοναδιαία διανύσματα στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση, αντίστοιχα. Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, x) &= (1 + \sin \theta)(\cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta) + \cos \theta(\sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta) + \cos \theta \mathbf{k} \\ &= (\cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{u}_r + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta) \mathbf{u}_\theta + \cos \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

και

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta) d\theta = (\cos 2\theta - \sin \theta) d\theta$$

Συνεπώς:

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos 2\theta - \sin \theta) d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = -1$$

Στό BO : $\mathbf{F} = (1 + y)\mathbf{i}$, $d\mathbf{s} = -dy\mathbf{j}$. Άρα $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ και $\int_{BO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Επομένως:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 1 - 1 + 0 = 0$$

(γ) $\varphi(x, y, z) = xy + xz \Rightarrow \nabla \varphi = (y + z, x, x) = \mathbf{F}(x, y, x)$. Άρα $\mathbf{F}$ συντηρητικό και φ το αντίστοιχο δυναμικό πεδίο.