

## Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Σεπτέμβρης 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Τα 13 υπο-ερωτήματα των 6 θεμάτων είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Ο τελικός βαθμός σας υπολογίζεται ως  $\min(B/10, 10)$  όπου  $B$  το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε ( $0 \leq B \leq 130$ ). Καλή επιτυχία!

**Θέμα 1:** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ .

**Λύση:** Έχουμε

$$\nabla \times \nabla f = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

αφού η  $f$  είναι κλάσης  $\mathcal{C}^2$ .

## Θέμα 2:

- (i) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = \frac{x^4-y^2}{2x^4+3y^2}$  και  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ . Υπολογίστε κάθε ένα από τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$$

η δείξτε ότι δεν υπάρχει.

- (ii) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ ,  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  αν  $(x,y) \neq (0,0)$  και  $f(x,y) = 0$  αν  $(x,y) = (0,0)$ . Εξετάστε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $(0,0)$ .

**Λύση:** (i) Παίρνοντας το όριο κατά μήκος της παραβολής  $y = \lambda x^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \lambda^2 x^4}{2x^4 + 3\lambda^2 x^4} = \frac{1 - \lambda^2}{2 + 3\lambda^2}$$

Εφόσον το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x^2)$  δεν είναι ανεξάρτητο του  $\lambda$ , το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  δεν υπάρχει.

Από την ανισότητα  $|\sin u| \leq |u|$ :

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

καθώς  $\|(x,y)\| \rightarrow 0$ . Άρα  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ .

- (ii) Εξετάζουμε την υπάρξη μερικών παραγώγων στο  $(0,0)$ :

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

Στην συνέχεια εξετάζουμε συνέχεια στο  $(0,0)$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Το όριο κατά την διεύθυνση  $y = \lambda x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

δεν είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής  $\lambda$  και άρα το όριο δεν υπάρχει. Εφόσον η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο  $(0,0)$  δεν είναι και παραγωγίσιμη στο  $(0,0)$ .

### Θέμα 3:

(α) Ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  λέγεται θετικά ορισμένος (και συμβολίζεται ως  $A \succ 0$ ) αν και μόνο αν  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

(i) Δείξτε ότι  $A \succ 0$  αν και μόνο αν  $a > 0$  και  $ac - b^2 > 0$ .

(ii) Δείξτε ότι  $A \succ 0$  αν και μόνο αν  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 > 0$  όπου  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .  
[Υπόδειξη: Τρόπος 1: Χρησιμοποιήστε το (αί). Τρόπος 2: Δείξτε ότι:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$$

όπου  $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$  τα δύο ζεύγη ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του πίνακα  $A$  όπου  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2$ , και όπου (χωρίς βλάβη γενικότητας) μπορείτε να υποθέσετε ότι  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , και ότι  $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 = 0$ .

(β) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ .

**Λύση:** (αί): Έστω  $a \neq 0$ . Έχουμε:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = a \left( x_1 + \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) x_2^2$$

Έστω ότι  $A \succ 0$ . Θέτοντας  $x_2 = 0$  και  $x_1 = 1$  έχουμε  $a > 0$ . Θέτοντας  $x_1 = -(b/a)x_2$  παίρνουμε  $c - b^2/a > 0$  ή  $ac - b^2 > 0$ . Αντίστροφα, αν  $a > 0$  και  $c - b^2/a > 0$  τότε  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$  και  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$  αν και μόνο αν  $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  και άρα  $A \succ 0$ .

(αί): Τρόπος 1: Οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\phi(s) := \det \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

και άρα:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Εφόσον  $a > 0$  και  $(a+c)^2 > (a-c)^2 + 4b^2 \Leftrightarrow ac > b^2$  και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές (και αντίστροφα).

Τρόπος 2: Έχουμε

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$$

Κάθε  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός:  $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$  για κάποια  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  και άρα

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (c_1 \mathbf{u}_1^T + c_2 \mathbf{u}_2^T)(\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T)(c_1 \mathbf{u}_1^T + c_2 \mathbf{u}_2^T) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2$$

Αν  $A \succ 0$  τότε θέτοντας  $c_1 = 1$  και  $c_2 = 0$  έχουμε  $\lambda_1 > 0$  και θέτοντας  $c_1 = 0$  και  $c_2 = 1$  έχουμε  $\lambda_2 > 0$ . Αντίστροφα, αν  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 > 0$  έχουμε  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  για κάθε  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  και άρα  $A \succ 0$ .

(β) Έχουμε:  $f_x(x, y) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$  ή  $x = 2$ .  $f_y(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$ . Άρα κρίσιμα σημεία  $P_1(0, 0)$  και  $P_2(2, 0)$ . Επίσης:  $f_{xx} = 6x - 6$ ,  $f_{yy} = 2$  και  $f_{xy} = 0$ . Άρα

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Στο  $P_1$ :

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D^2 f(0, 0) = -12 < 0 \Rightarrow P_1(0, 0) \text{ σαγματικό σημείο}$$

Στο  $P_2$ :

$$D^2 f(2, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\det D^2 f(2, 0) = 12 > 0 \text{ και } D^2 f(2, 0)_{11} = 6 > 0] \Rightarrow P_2(2, 0) \text{ τοπικό ελάχιστο}$$

**Θέμα 4:** (i) Να σχεδιάσετε την περιοχή της ολοκλήρωσης και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx$$

(ii) Να βεθδεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τα επίπεδα:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  και  $z = 2 - \frac{2}{3}x - 2y$ .

**Λύση:** (i) Περιοχή ολοκλήρωσης:  $0 \leq x \leq 8$ ,  $x^{1/3} \leq 2$ . Ισοδύναμα:  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq x \leq y^3$ .

$$I = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} dx dy = \int_0^2 \frac{dy}{y^4 + 1} \int_{x=0}^{y^3} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{4y^3}{y^4 + 1} dy = \frac{1}{4} \ln(y^4 + 1) \Big|_{y=0}^2 = \frac{\ln(17)}{4}$$

(ii) Όγκος στερεού:

$$V = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{1-\frac{x}{3}} \int_{z=0}^{2-\frac{2x}{3}-2y} dz dy dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{1-\frac{x}{3}} (2 - \frac{2x}{3} - 2y) dy dx$$

Επομένως

$$V = \int_{x=0}^3 \left[ 2y - \frac{2xy}{3} - y^2 \right]_{y=0}^{1-\frac{x}{3}} dx = \int_{x=0}^3 2 \left( 1 - \frac{x}{3} \right) - \frac{2x}{3} \left( 1 - \frac{x}{3} \right) - \left( 1 - \frac{x}{3} \right)^2 dx$$

και

$$V = \int_{x=0}^3 \left( 1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9} \right) dx = \left[ x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} \right]_{x=0}^3 = 1$$

**Θέμα 5:** (i) Υπολογίστε με χρήση διπλού ολοκληρώματος  $\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  την ροή του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j}$  διαμέσω της επιφάνειας κυλίνδρου  $S$  που ορίζεται από τις εξισώσεις:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  και όπου το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  είναι ορθογώνιο στο στοιχείο επιφάνειας  $dS$  και έχει διεύθυνση προς την εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου.

(ii) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας στο (i) με χρήση τριπλού ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Gauss.

**Λύση:** (i) Στην επιφάνεια του κυλίνδρου  $x = \cos \theta$  και  $y = \sin \theta$ . Άρα η ακτινική συνισταμένη του πεδίου είναι

$$F_r = \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{1}{2} \sin^3 \theta$$

και

$$d\Phi = F_r d\theta dz$$

Άρα

$$\Phi = \int_{z=0}^1 dz \int_{\theta=-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta \sin \theta - \frac{1}{2} \sin^3 \theta) d\theta = 0$$

αφού η συνάρτηση στο εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι περιττή.

(ii) Έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = y - y = 0$$

και από το Θεώρημα Gauss:

$$\Phi = \int \int \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = 0$$

**Θέμα 6:** (i) Υπολογίστε (απευθείας από τον ορισμό) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:  $\int_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  όπου  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$ , και όπου η (κλειστή) καμπύλη  $OABC = OA \cup AB \cup BO$  αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OA$  μεταξύ των σημείων  $O(0, 0)$  και  $A(1, 0)$ , το τόξο  $AB$  μεταξύ των σημείων  $A(1, 0)$  και  $B(0, 1)$  που ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  ως  $AB = \{(1, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$  και το ευθύγραμμο τμήμα  $BO$  μεταξύ των σημείων  $B$  και  $O$ . Η καμπύλη είναι θετικά προσανατολισμένη (αριστερόστροφη). [Υπόδειξη:  $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ ,  $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ ].

(ii) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο:  $\mathbf{F}(x, y)$  στο (i) είναι συντηρητικό κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού.

(iii) Υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο  $\nabla \wedge \mathbf{F}$  όπου το πεδίο  $\mathbf{F}$  ορίζεται στο (i) και σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

**Λύση:** (i) Στο διάστημα  $OA$ :  $y = 0$ ,  $\mathbf{F} = (x^2 + x)\mathbf{j}$ ,  $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} \perp \mathbf{F}$  και άρα  $\int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Στο διάστημα  $AB$ :  $d\mathbf{s} = d\theta \mathbf{u}_\theta$  και

$$\mathbf{F} = (2 \cos \theta \sin \theta + \sin \theta)\mathbf{i} + (\cos^2 \theta + \cos \theta)\mathbf{j}$$

Όμως

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta, \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$$

Επομένως:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\theta d\theta = (-\sin^2 \theta \cos \theta - \sin^2 \theta + \cos^3 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \left( \frac{3}{4} \cos(3\theta) + \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \cos \theta \right) d\theta$$

και

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left[ \frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{1}{4} \sin(\theta) \right]_\theta^{\pi/2} = 0$$

Στο διάστημα  $BO$ :  $x = 0$ ,  $\mathbf{F} = (x^2 + x)\mathbf{j}$ ,  $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} \perp \mathbf{F}$  και άρα  $\int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Στο  $BO$ :  $\mathbf{F} = y$ ,  $d\mathbf{s} = -dy \mathbf{j}$  και άρα  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -y dy$  και  $\int_{BO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Άρα  $\int_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ .

(ii) Αν το πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό, τότε υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση  $\phi$ , τέτοια ώστε  $F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  και  $F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ . Επομένως:

$$F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + y \Rightarrow \phi = x^2 y + xy + h(y) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + x + h'(y) = x^2 + x \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$$

Θέτοντας  $c = 0$  έχουμε  $\phi(x, y) = x^2 y + xy$ .

(iii) Έχουμε

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + y & x^2 + x & 0 \end{bmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (2x + 1 - 2x - 1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Συντηρητικά πεδία είναι πάντα αστρόβιλα, όπως μπορούμε να δούμε π.χ. από τον ορισμό του curl χωρίς συντεταγμένες.