

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Σεπτέμβρης 2024

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B/10, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ και $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$. Υπολογίστε κάθε ένα από τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$$

η δείξτε ότι δεν υπάρχει.

[5+5=10 βαθμοί]

Θέμα 2: Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη). Ο αλγόριθμος μέγιστης κλίσης χρησιμοποιείται για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f . Αρχίζοντας από αυθαίρετο αρχικό σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, ο αλγόριθμος παράγει ακολουθία $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ μέσω της επαναληπτικής σχέσης: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, όπου ∇f η κλίση της f και όπου α_k ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $g_k(\alpha) = f(\mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k))$ ως προς την μεταβλητή $\alpha \geq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$: $\nabla f(\mathbf{x}_k) \neq 0$ και ότι $g(\alpha_k) = \min\{g_k(\alpha) : \alpha \geq 0\}$ για μοναδικό $\alpha_k > 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$: $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$. [10 βαθμοί]

(β) Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$: $(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) = 0$. [10 βαθμοί]

(γ) Έστω $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$, όπου $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = Q^T \succ 0$ (θετικά ορισμένος) και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\alpha_k = \frac{\nabla^T f(\mathbf{x}_k) \nabla f(\mathbf{x}_k)}{\nabla^T f(\mathbf{x}_k) Q \nabla f(\mathbf{x}_k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $\nabla f(\mathbf{x}_k) = Q \mathbf{x}_k - \mathbf{b}$.

[10 βαθμοί]

Θέμα 3:

(α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 + 3y - y^3 - 3x$, και να τα ταξινομήσετε ως τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. [10 βαθμοί]

(β) Για κάθε κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) που βρήκατε στο (α), υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ γύρω από το σημείο (x_0, y_0) που περιλαμβάνει έως και τετραγωνικούς όρους. Εξετάζοντας το πρόσημο του όρου $f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)$ για όλα τα δx και δy με αρκούντως μικρή απόλυτη τιμή, επιβεβαιώστε το συμπέρασμα σας στο (α). [10 βαθμοί]

Θέμα 4: (α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy \text{ και } I_2 = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1 - x^2} dx dy$$

Για το I_2 σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης. Υπόδειξη: Μετασχηματίστε το I_1 σε πολικές συντεταγμένες. Αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης στο I_2 . (β) Η πυκνότητα σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και μοναδιαία ακτίνα είναι

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

όπου (x, y, z) σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Να βρείτε την μάζα της σφαίρας.

[10+10 βαθμοί]

Θέμα 5: Έστω συναρτήσεις $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμο βαθμωτό και διανυσματικό πεδίο, αντίστοιχα). Δείξτε ότι:

(i) $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$. [10 βαθμοί]

(ii) $\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla \psi) \times \mathbf{A}$. [10 βαθμοί]

Θέμα 6: (α) Εξηγήστε τι είναι ένα συντηρητικό διανυσματικό πεδίο. Ποιά είναι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου γύρω από μία απλή κλειστή καμπύλη;

(β) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ είναι συντηρητικό κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού.

(γ) Υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο $\nabla \times \mathbf{F}$ όπου το πεδίο $\mathbf{F}$ ορίζεται στο (β) και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα σας.

(δ) Υπολογίστε (με άμεσο τρόπο) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\int_{OABC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ όπου $\mathbf{F}$ ορίζεται στο (β) και η καμπύλη ολοκλήρωσης $OABC$ ορίζεται από τις τρεις πλευρές του μοναδιαίου κύβου OA , AB και BC που ενώνουν τις κορυφές του $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ και $C(1, 1, 1)$ του κύβου. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δυναμικού που ορίσατε στο μέρος (β). [4 × 5 = 20 βαθμοί]

Θέμα 7: Έστω W η περιοχή του $\mathbb{R}^3$ που περιγράφεται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) από το σύνολο

$$W = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq e^{x^2+y^2}\}$$

και όπου ∂W η επιφάνεια της περιοχής W .

(i) Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής W .

[10 βαθμοί]

(ii) Με χρήση του Θεωρήματος Gauss (η με άλλο τρόπο) υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα: $\int_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στο στοιχείο επιφανείας dS με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της επιφάνειας ∂W και $\mathbf{F} = (2x - xy)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. [10 βαθμοί]