

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Ιούνιος 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω ότι $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, διανύσματα θέσης των σημείων P_i , $i = 1, 2, 3$, αντίστοιχα (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες). Δείξτε ότι η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα τρία σημεία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

[1 βαθμός]

Θέμα 2: Έστω συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } xy \neq 0 \\ 0, & \text{αν } xy = 0 \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

[1 βαθμός]

Θέμα 3: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. (β) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$. (γ) Εξετάστε αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Δικαιολογήστε επαρκώς τις απαντήσεις σας. [1+1+0,5 βαθμοί]

Θέμα 4: Έστω $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = \|\mathbf{r}\|$ (Ευκλείδεια νόρμα). Δείξτε ότι $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

[1 βαθμός]

Θέμα 5: Έστω $(x(t), y(t))$ μία διαδρομή στο επίπεδο, $0 \leq t \leq 1$, και έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη). Υποθέστε ότι $\frac{dx}{dt}f_x + \frac{dy}{dt}f_y \leq 0$. Δείξτε ότι $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$. [1 βαθμός]

Θέμα 6: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο και ότι αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο της f .

[1 βαθμός]

Θέμα 7: Υπολογίστε τα παρακάτω δύο ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy \quad \text{και} \quad I_2 = \int \int \int_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz dx dy dz$$

όπου D είναι το ογδοημόριο της μοναδιαίας σφαίρας: $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Υπόδειξη: (α) Στο I_1 αλλάξτε την σειρά της ολοκλήρωσης. (β) Στο I_2 χρησιμοποιήστε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες. Οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορεί να σας είναι χρήσιμες: $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$, $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)$. [1+1 βαθμοί]

Θέμα 8: Έστω τα σημεία O , A και B στο επίπεδο $z = 1$ με Καρτεσιανές συντεταγμένες $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$, αντίστοιχα. Έστω C η κλειστή διαδρομή $OABO$ που αποτελείται από: (i) Το ευθύγραμμο τμήμα OA , (ii) το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ μεταξύ των σημείων A και B που κείται στο επίπεδο $z = 1$ και έχει κέντρο το σημείο O , και (iii) το ευθύγραμμο τμήμα BO . Έστω διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. (α) Υπολογίστε τον στροβιλισμό $\nabla \wedge \mathbf{F}$. (β) Υπολογίστε (με άμεσο τρόπο) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ όπου η διαδρομή C έχει θετικό προσανατολισμό. (Υπόδειξη: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$). (γ) Κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού δείξτε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό. [0,5+1+1 βαθμοί]