

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Σεπτέμβρης 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Τα 13 υπο-ερωτήματα των 6 θεμάτων είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Ο τελικός βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B/10, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε ($0 \leq B \leq 130$). Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι $\nabla \times \nabla f = 0$.

Θέμα 2: (i) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^4-y^2}{2x^4+3y^2}$ και $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$. Υπολογίστε κάθε ένα από τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$$

η δείξτε ότι δεν υπάρχει.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(x,y) = 0$ αν $(x,y) = (0,0)$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

Θέμα 3: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ λέγεται θετικά ορισμένος (και συμβολίζεται ως $A \succ 0$) αν και μόνο αν $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(i) Δείξτε ότι $A \succ 0$ αν και μόνο αν $a > 0$ και $ac - b^2 > 0$.

(ii) Δείξτε ότι $A \succ 0$ αν και μόνο αν $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$ όπου λ_1 και λ_2 οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A . [Υπόδειξη: Τρόπος 1: Χρησιμοποιήστε το (i). Τρόπος 2: Δείξτε ότι:

$$A = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$$

όπου $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$ τα δύο ζεύγη ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του πίνακα A όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, και όπου (χωρίς βλάβη γενικότητας) μπορείτε να υποθέσετε ότι $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1$, $i = 1, 2$, και ότι $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 = 0$.

(iii) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

Θέμα 4: (i) Να σχεδιάσετε την περιοχή της ολοκλήρωσης και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx$$

(ii) Να βεθθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τα επίπεδα: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $z = 2 - \frac{2}{3}x - 2y$.

Θέμα 5: (i) Υπολογίστε με χρήση διπλού ολοκληρώματος $\Phi = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ την ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j}$ διαμέσω της επιφάνειας κυλίνδρου S που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ και όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι ορθογώνιο στο στοιχείο επιφάνειας dS και έχει διεύθυνση προς την εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου.

(ii) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας στο (i) με χρήση τριπλού ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Gauss.

Θέμα 6: (i) Υπολογίστε (απευθείας από τον ορισμό) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\int_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ όπου $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$, και όπου η (κλειστή) καμπύλη $OABO = OA \cup AB \cup BO$ αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA μεταξύ των σημείων $O(0,0)$ και $A(1,0)$, το τόξο AB μεταξύ των σημείων $A(1,0)$ και $B(0,1)$ που ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες (r,θ) ως $AB = \{(1,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ και το ευθύγραμμο τμήμα BO μεταξύ των σημείων B και O . Η καμπύλη είναι θετικά προσανατολισμένη (αριστερόστροφη). [Υπόδειξη: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$].

(ii) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}(x,y)$ στο (i) είναι συντηρητικό κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού.

(iii) Υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο $\nabla \wedge \mathbf{F}$ όπου το πεδίο $\mathbf{F}$ ορίζεται στο (i) και σχολιάσετε το αποτέλεσμα.