Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Εισαγωγή στα Σύνολα - Πράξεις Συνόλων

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$
3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$
4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$
5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$

Προφανώς τα σύνολα δεν είναι ίσα γιατί το σύνολο A περιέχει πραγματικούς αριθμούς.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει κι αυτή ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα δεν είναι ίσα. Στον παραπάνω ορισμό του συνόλου D δεν προσδιορίζεται το σύνολο στο οποίο ανήκει ο αριθμός k. Αν υποθέσουμε ότι ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορούμε να επιλέξουμε ότι $k = 1/5$, συνεπώς $n = 1$ που **δεν** είναι πολλαπλάσιο του 5. Έτσι βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Προφανώς, τα σύνολα δεν είναι ίσα εφόσον το σύνολο E δεν περιέχει λ.χ. τον ακέραιο αριθμό 15 που ανήκει στα πολλαπλάσια του 5.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;
2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία περιέχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;

Έχει δύο στοιχεία: $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$. Δηλαδή το κενό σύνολο και ένα σύνολο που έχει ως μοναδικό στοιχείο το κενό σύνολο.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$
2. $\{2\} \in S$
3. $\{2\} \subset S$
4. $\{\{2\}\} \subset S$
5. $3 \in S$
6. $\{3\} \in S$
7. $\{3\} \subset S$
8. $\{\{3\}\} \subset S$
9. $4 \in S$
10. $\{4\} \in S$
11. $\{4\} \subset S$
12. $\{\{4\}\} \subset S$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$ Σ
2. $\{2\} \in S$ Σ
3. $\{2\} \subset S$ Σ
4. $\{\{2\}\} \subset S$ Σ
5. $3 \in S$ Σ
6. $\{3\} \in S$ Λ
7. $\{3\} \subset S$ Σ
8. $\{\{3\}\} \subset S$ Λ
9. $4 \in S$ Λ
10. $\{4\} \in S$ Σ
11. $\{4\} \subset S$ Λ
12. $\{\{4\}\} \subset S$ Σ

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$
2. $\{1\} \subseteq A$
3. $\{\{1\}\} \in A$
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$
5. $2 \in A$
6. $2 \subseteq A$
7. $\{2\} \in A$
8. $\{2\} \subseteq A$

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$ Σ
2. $\{1\} \subseteq A$ Σ
3. $\{\{1\}\} \in A$ Λ
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$ Σ
5. $2 \in A$ Σ
6. $2 \subseteq A$ Λ
7. $\{2\} \in A$ Λ
8. $\{2\} \subseteq A$ Σ

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \ldots, 12\}$
2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$
3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \dots, 12\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ και } 1 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{N}\}$

$\{n + 1 : n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ και } 0 \leq k \leq 15, k \in \mathbb{N}\}$
$\{2n + 1 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αριθμών μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$2 + 3 * 0, 2 + 3 * 1, 2 + 3 * 2, \ldots, 2 + 3 * 10$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2$ και $0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}\}$

$\{3n + 2 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$
2. $B = \{\emptyset\}$
3. $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$
4. $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$
5. $E = \{0, \{\{1, \{3, 5\}, \{4, 5, 7\}, 8\}\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$ 0
2. $B = \{\emptyset\}$ 1
3. $C = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$ 2
4. $D = \{0,1,2,\{0,1\},\{1,2\},\{0,1,2\},A\}$ 7
5. $E = \{0,\{\{1,\{3,5\},\{4,5,7\},8\}\}\}$ 2

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$
2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$
3. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{6, 2, 2, 4, 6\}, \{2, 4, 2, 6\}\}$
4. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{2, 4, 6\}, \{4, 6\}\}$
5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1 \text{ και } x^2 = x\}$
6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$

Το δεύτερο σύνολο περιέχει στοιχεία που επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές. Το δεύτερο σύνολο θα μπορούσε να αναπαρασταθεί και ως $\{0, 1, 2\}$ και συνεπώς είναι ίσο με το πρώτο, εφόσον περιέχουν τα ίδια στοιχεία.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Λ.χ. το στοιχείο 3 περιέχεται μόνο στο πρώτο σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

3. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{5,1,3\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}\}$

Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν διπλότυπα. Στο πρώτο σύνολο το στοιχείο $\{1,3,5\}$ είναι ίδιο με το στοιχείο $\{5,1,3\}$ εφόσον η σειρά των στοιχείων δεν παίζει ρόλο. Συνεπώς το πρώτο σύνολο περιέχει δύο στοιχεία. Αντιστοίχως, στο δεύτερο σύνολο τα στοιχεία $\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο $\{2,4,6\}$. Συνεπώς και το δεύτερο σύνολο περιέχει 2 στοιχεία, τα $\{1,3,5\}$ και $\{2,4,6\}$. Επομένως, τα σύνολα είναι ίσα.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

4. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{2,4,6\},\{4,6\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα καθώς το δεύτερο περιέχει το στοιχείο $\{4,6\}$ που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1 \text{ και } x^2 = x\}$

Για να βρούμε τα στοιχεία που περιέχονται στο δεύτερο σύνολο θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = x$. Η εξίσωση αυτή έχει τις προφανείς λύσεις $x = 0$ ή $x = 1$. Ωστόσο, εφόσον $x > 1$, η εξίσωση που προσδιορίζει τα στοιχεία του συνόλου δεν έχει καμία λύση και συνεπώς το σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Άρα, είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Το 2ο έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο, που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 8

Έστω τα σύνολα:

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

Είναι οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των συνόλων σωστές και γιατί;

1. $C \subseteq A$
2. $A \neq B$
3. $B \neq C$
4. $A \neq C$
5. $C \subset A$

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

1. $C \subseteq A$ Σωστό

Έστω τυχαίο στοιχείο m του συνόλου C. Τότε από την περιγραφή του συνόλου προκύπτει ότι $m = 6k - 4$ για κάποιο $k \geq 1 \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να γράψουμε $m = 3(2k) - 6 + 2 = 3(2k - 2) + 2$. Έστω $\lambda = 2k - 2 = 2(k - 1)$. Εφόσον, $k \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 6k - 4 = 3\lambda + 2$. Άρα οποιοδήποτε στοιχείο m του C ανήκει και στο σύνολο A και το σύνολο C είναι υποσύνολο του A.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$

2. $A \neq B$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο A όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 0$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

3. $B \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο C όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 1$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2$ και $k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4$ και $k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

4. $A \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι το σύνολο A περιέχει το στοιχείο 5 για $k = 1$. Το μικρότερο στοιχείο του C για $k = 1$ είναι το 2. Για τα υπόλοιπα στοιχεία ισχύει $n \geq 8$ και συνεπώς το στοιχείο 5 δεν περιέχεται στο στοιχείο C. Άρα τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

5. $C \subset A$ Σωστό

Στο ερώτημα 1 δείξαμε ότι $C \subseteq A$. Στο ερώτημα 4 δείξαμε ότι $C \neq A$. Συνεπώς, το σύνολο C είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου A.

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A \cup C$
4. $A \cap C$
5. $A - B$
6. $|A \cup B|$
7. $|A \cap C|$

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω:

1. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$
2. $A \cap B = \{3, 5, 7\}$
3. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
4. $A \cap C = \emptyset$
5. $A - B = \{1, 9, 11\}$
6. $|A \cup B| = 8$
7. $|A \cap C| = 0$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$
2. $2 \in A \cup B$
3. $2 \in A - B$
4. $\{2\} \in A \cap B$
5. $\{2\} \in A \cup B$
6. $\{2\} \in A - B$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$ Ψ
2. $2 \in A \cup B$ Α
3. $2 \in A - B$ Α
4. $\{2\} \in A \cap B$ Ψ
5. $\{2\} \in A \cup B$ Α
6. $\{2\} \in A - B$ Ψ

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C$
2. $B \cap C$
3. $B - C$
4. $A - B$
5. $A - C$

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
2. $B \cap C = \{2, 3, 8\}$
3. $B - C = \{6\}$
4. $A - B = \{1, 4, 5, 7, 9, 10\}$
5. $A - C = \{1, 6, 7, 9, 10\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$
2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι σωστή:
   $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$
3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{0, 2\}$

$\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$(B \cup C) - A = \{4, 6, 9\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι αληθής:
   $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $E = \{0\}, F = \{1\}$.

Τότε $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}\}$ και $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Συνεπώς $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$

Όμως $E \cup F = \{0, 1\}$ και επομένως $\mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, \}, \{0, 1\}\}$. Ψευδές.

Παρατηρούμε ότι για τα εν λόγω σύνολα $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$. Θα το αποδείξουμε σε επόμενο φροντιστήριο.

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ περιέχει στοιχεία όπως το $\{0\}$ που δεν περιλαμβάνονται στο καθολικό σύνολο. Συνεπώς δεν έχει νόημα η έννοια του συμπληρώματος σε αυτή την περίπτωση.

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$
3. $\{1, 2\} \in A$
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$
5. $\emptyset \in A$
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$ Α
3. $\{1, 2\} \in A$ Α
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$ Ψ
5. $\emptyset \in A$ Ψ
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ Α
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$ Ψ
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Γνωρίζουμε από τον ορισμό της αφαίρεσης ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Συνεπώς $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Αντίστοιχα, $B = (B - A) \cup (B \cap A) = (B - A) \cup (A \cap B) = \{2, 3, 6, 9, 10\}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου προκύπτει ότι $\cup\mathcal{P}(A) = A$.

Αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, τότε $\cup\mathcal{P}(A) = \cup\mathcal{P}(B)$.

Συνεπώς, $A = B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ εάν και μόνο εάν $A \subseteq B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ **εάν και μόνο εάν** $A \subseteq B$.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, τότε $A \subseteq B$.

Έστω $a \in A$. Τότε $\{a\} \subseteq A$ οπότε $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ και από υπόθεση $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$. Δηλαδή $\{a\} \subseteq B$ και ως εκ τούτου $a \in B$.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Έστω ότι $A \subseteq B$. Τότε λόγω μεταβατικής ιδιότητας για κάθε υποσύνολο C του A ισχύει ότι $C \subseteq B$. Άρα ισχύει πως $\forall C \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(B)$ αποδεικνύοντας πως $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Άσκηση 19

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$.
- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A \times B = B \times A$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$

Ψευδής. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, c\}, C = \emptyset, D = \{a\}$.

Τότε, $(A - B) = \{b\}, (C - D) = \emptyset$, $(A - C) = \{a, b, c\}, (B - D) = \{c\}$.

Συνεπώς $(A - B) - (C - D) = \{b\}$ και $(A - C) - (B - D) = \{a, b\}$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Αληθής. $A \subseteq B$ ανν $\forall x(x \in A \to x \in B)$

Η αντιθετοαντίστροφη ισοδύναμη πρόταση είναι $\forall x(\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)) \equiv$

$\forall x(x \notin B \to x \notin A)$. Συνεπώς $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

-$A \times B = B \times A$

Ψευδής. Τα στοιχεία των καρτεσιανών γινομένων είναι διατεταγμένα ζεύγη. Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ και $\alpha \neq \beta$ τότε $(\alpha, \beta) \in A \times B$ αλλά $(\alpha, \beta) \notin B \times A$

Άσκηση 21

Η ομοιότητα Jaccard $J(A, B)$ των πεπερασμένων συνόλων A και B είναι $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B|$, όπου $J(\emptyset, \emptyset) = 1$. Να βρείτε την ομοιότητα Jaccard για τα παρακάτω ζεύγη συνόλων.

- i. $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$
- ii. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$
- iii. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- iv. $A = \{1\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Να αποδείξετε ότι οι ιδιότητες a έως d ισχύουν, όταν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα.

- a. $J(A, A) = 1$
- b. $J(A, B) = J(B, A)$
- c. $J(A, B) = 1$ ανν $A = B$
- d. $0 \leq J(A, B) \leq 1$

Άσκηση 21

i) 0, ii) 1/3, iii) 1, iv) 1/6

a. $J(A, A) = |A \cap A|/|A \cup A| = |A|/|A| = 1$
b. $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B| = |B \cap A|/|B \cup A| = J(B, A)$ (αντιμεταθετικός νόμος)
c. Αν $J(A, B) = 1$ τότε $|A \cap B|/|A \cup B| = 1$ και επομένως $|A \cap B| = |A \cup B|$. Όταν $x \in A$ και $x \notin B$ τότε $x \in (A \cup B)$ και $x \notin (A \cap B)$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση καθώς η τομή των δύο συνόλων θα περιέχει σε αυτή την περίπτωση λιγότερα στοιχεία από την ένωση (εφόσον η ένωση περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία της τομής). Αντίστοιχα όταν $x \notin A$ και $x \in B$. Συνεπώς, $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ και $A = B$. Αν $A = B$ τότε $J(A, B) = 1$ (βλ. a.)
d. Ισχύει ότι $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$. Συνεπώς, $|A \cap B| \leq |A \cup B|$. Διαιρώντας με την ένωση $J(A, B) \leq 1$. Η πληθικότητα ενός συνόλου είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0 και συνεπώς $J(A, B) \geq 0$. Στην περίπτωση που $A = B = \emptyset, J(A, B) = 1$

Άσκηση 22

Να βρείτε τα $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ για κάθε θετικό ακέραιο i:

1. $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$
2. $A_i = \{0, i\}$
3. $A_i = (0, i)$
4. $A_i = (i, \infty)$

Άσκηση 22

1. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ είναι $A_i \subseteq A_1$ και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \mathbb{Z}^+$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \cap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{n, n+1, n+2, ...\} = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

2. **Ένωση**: $\cup_{i=1}^{n} A_i = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup ... \cup \{0, n\} = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \{0, 1\} \cap \{0, 2\} \cap ... \cap \{0, n\} = \{0\}$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

3. **Ένωση**: Προφανώς $A_i \subset A_n$ εφόσον $A_i = (0, i)$. Συνεπώς, $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_n = A_n$. Επίσης, $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Τομή: Προφανώς $A_1 \subset A_i$ και επομένως $\cap_{i=1}^{n} A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Βάσει του νόμου αυτοδυναμίας $A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Από τον ορισμό της τομής $\cap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_1$. Προκύπτει $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (0, 1)$

Άσκηση 22

4. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ προκύπτει $A_i \subseteq A_1$ (καθώς $(i, \infty) \subseteq (1, \infty)$) και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (1, \infty)$

Τομή: Προφανώς $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Εφόσον $A_n = (n, \infty)$ $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$