Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Επιχειρήματα και Κανόνες συμπερασμού

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.
2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.
3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 1$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$" και q για την πρόταση "$n^2 > 1$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \land q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$" και q για την πρόταση "$n^2 > 9$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus tollens.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 2$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$" και q για την πρόταση "$n^2 > 4$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & \neg q \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.
2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "x είναι θετικός πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \land q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος". Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "$x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "$x \neq 0$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge p) \to q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus ponens. Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.
2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.
3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.
4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής της τάξης" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x καταλαβαίνει λογική". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $P(\alpha)$, όπου α είναι ο Πέτρος. Από εδώ προκύπτει άμεσα ότι το επιχείρημα είναι σωστό καθώς πρόκειται για τον κανόνα "καθολικό modus ponens"

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ & P(\alpha) \\ \hline \therefore & Q(\alpha) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής πληροφορικής" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών". Συνεπώς, η πρόταση "Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $Q(\alpha)$, όπου α είναι η Νατάσα. Θα εφαρμοσούμε αρχικά καθολική εξατομίκευση, από την οποία προκύπτει ότι:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \to Q(\alpha)) \wedge Q(\alpha)) \to P(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

Αν x είναι ένα πουλί τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x είναι παπαγάλος" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x αγαπά τα φρούτα". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg P(\alpha)$, όπου α είναι το κατοικίδιο πουλί μου. Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική εξατομίκευση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \wedge \neg P(\alpha)) \rightarrow \neg Q(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Από εδώ προκύπτει ότι το επιχείρημα είναι λάθος καθώς πρόκειται για την πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι υγιές". Συνεπώς, η πρόταση "Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Η πρόταση "Η Λίντα δεν είναι υγιής" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg Q(\alpha)$, όπου α είναι η Λίντα. Αντίστοιχα, η πρόταση "η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" αναπαρίσταται ως $\neg P(\alpha)$ Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική εξατομίκευση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \to Q(\alpha)) \wedge \neg Q(\alpha)) \to \neg P(\alpha)$ είναι ο κανόνας modus tollens.

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \\ & \neg Q(\alpha) \\ \hline \therefore & \neg P(\alpha) \end{array}$$

Άσκηση 4

Βάσει των ακόλουθων υποθέσεων:

a. Η λογική είναι δύσκολη ή η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές
b. Αν τα μαθηματικά είναι εύκολα, τότε η λογική δεν είναι δύσκολη

να προσδιοριστεί ποια από τα παρακάτω είναι έγκυρα συμπεράσματα:

1. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα αν σε πολλούς φοιτητές αρέσει η λογική.
2. Η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, αν μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
3. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα ή η λογική είναι δύσκολη.
4. Η λογική δεν είναι δύσκολη ή τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
5. Αν η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, τότε είτε τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα, είτε η λογική δεν είναι δύσκολη.

Αν p η πρόταση "η λογική είναι δύσκολη", q η πρόταση "η λογική αρέσει σε πολλούς φοιτητές", r η πρόταση "τα μαθηματικά είναι εύκολα", οι υποθέσεις a και b μπορούν να παρασταθούν μέσω λογικών τελεστών ως εξής:

a. $p \vee \neg q$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $q \rightarrow p$
b. $r \rightarrow \neg p$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφη $p \rightarrow \neg r$

Από τις υποθέσεις προκύπτουν τα εξής:

1. $q \rightarrow \neg r$. 'Εγκυρο συμπέρασμα βάσει του υποθετικού συλλογισμού.
2. $\neg r \rightarrow \neg q$ ή ισοδύναμα $q \rightarrow r$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Το συμπέρασμα είναι ψευδές αν q είναι αληθές και r ψευδές. Αν θεωρήσουμε ότι το p είναι αληθές, τότε προκύπτει ότι και οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς πρόκειται για μη έγκυρο συμπέρασμα.
3. $p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $r \rightarrow p$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Αν λάβουμε r αληθές, p ψευδές και q ψευδές, οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
4. $\neg p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $p \rightarrow \neg r$. Που είναι η δεύτερη υπόθεση συνεπώς είναι έγκυρο μέσω απλοποίησης.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:

5. $\neg q \to (\neg p \vee \neg r)$. Η μόνη περίπτωση να είναι αυτό ψευδές είναι να είναι η q ψευδής, η p αληθής και η r αληθής. Τότε όμως παραβιάζεται η υπόθεση $r \to \neg p$. Συνεπώς, σε όλες τις περίπτώσεις που ισχύουν οι υποθέσεις, ισχύει και το συμπέρασμα, που είναι τουτέστιν έγκυρο.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν τα κατηγορήματα $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθή, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν οι υποθέσεις (ή προκείμενες) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Εφαρμόζοντας καθολική εξατομίκευση στη δεύτερη υπόθεση ισχύει ότι $Q(\alpha) \rightarrow R(\alpha)$. Συνεπώς βάσει του κανόνα modus tollens ισχύει $\neg Q(\alpha)$. Αντιστοίχως, με καθολική εξατομίκευση στην πρώτη υπόθεση ισχύει ότι $P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)$. Δεδομένου ότι ισχύει $\neg Q(\alpha)$ βάσει του κανόνα modus tollens προκύπτει ότι το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Αποδείξεις: Μέθοδοι αποδείξεων και στρατηγική

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, αν και μόνο αν ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, **αν και μόνο αν** ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο 7n+4 είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n είναι άρτιος. Τότε n =2k για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+2), που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι άρτιος αριθμός.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο 7n+4 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n δεν είναι άρτιος, δηλαδή έστω n περιττός. Τότε n =2k+1 για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+5)+ 1, που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι περιττός αριθμός, κάτι που αντιβαίνει την υπόθεση μας.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Μπορούμε γρήγορα να περιορίσουμε την απόδειξη στον έλεγχο ορισμένων απλών περιπτώσεων, αφού αν $|y| \geq 2$ τότε $2x^2 + 5y^2 \geq 20 > 14$. Άρα αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις όπου το y είναι ίσο με -1,0 ή 1.

- Αν y=0 τότε έχουμε $x^2 = 7$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.
- Αν $|y| = 1$ τότε έχουμε $2x^2 = 9$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

'Αρα, δεν είναι δυνατόν η εξίσωση $2x^2 + 5y^2 = 14$ να έχει ακέραιες λύσεις.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.
- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.
- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.

Λάθος. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.
Αν εξετάσουμε τον αριθμό 7 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Κανένα τετράγωνο: ο αριθμός 7 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ένα τετράγωνο:
$1^2 + 6 = 7$ Το 6 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 3 = 7$ Το 3 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Δύο τετράγωνα:
$1^2 + 1^2 + 5 = 7$ Το 5 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 1^2 + 2 = 7$ Το 2 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.

Σωστό. $5^2 + 5^2 = 50$ και $1^2 + 7^2 = 50$

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος αριθμος με απαγωγή σε άτοπο (με αντίφαση).

Έστω ότι το άθροισμα s ενός ρητού αριθμού r και ενός άρρητου αριθμού i είναι ρητός αριθμός. Τότε και το άθροισμα των ρητών αριθμών s και -r θα είναι ρητό. Όμως $s + (-r) = i$ και καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο μέσος όρος των αριθμών r και i είναι $\frac{(r+i)}{2}$, που βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος είναι άρρητος.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με απαγωγή σε άτοπο (απόδειξη με αντίφαση). Έστω μία αίθουσα με 49 άτομα στην οποία δεν υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα. Άρα για κάθε έναν από τους 12 μήνες, το πολύ 4 άτομα στην αίθουσα έχουν γενέθλια αυτόν τον μήνα. Συνεπώς η αίθουσα έχει το πολύ 48 άτομα, καταλήγοντας σε αντίφαση στην υπόθεση ότι η αίθουσα έχει 49 άτομα.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλαμβάνετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλάβετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Έστω ότι καταλήγουμε σε 9 μηδενικά. Αυτό σημαίνει ότι στο προηγούμενο βήμα είχαμε 9 ίσα bits (είτε 0 είτε 1).

-Για να έχουμε 9 μηδενικά θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να είχαμε ίσα bits.

- Εφόσον ξεκινάμε με κάτι διαφορετικό από 9 μηδενικά και καταλήγουμε σε 9 μηδενικά θα πρέπει σε κάποιο βήμα να είχαμε 9 μονάδες.

-Για να έχουμε 9 μονάδες θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να εναλλάσονται τα bits (0101...). Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ξεκινάμε με περιττό πλήθος bits εφόσον αναγκαία δύο μονάδες θα ήταν συνεχόμενες στον κύκλο (101010101).

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Αν κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι μηδέν τότε προκύπτει το ζητούμενο.

Αν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, προφανώς το γινόμενο δύο από αυτούς είναι θετικό.

Αν δεν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, επειδή τα πρόσημα είναι δύο, δύο από τους αριθμούς θα έχουν διαφορετικά πρόσημα και ο τρίτος θα έχει αναγκαία το ίδιο πρόσημο με έναν από τους δύο πρώτους. Το γινόμενο των δύο αριθμών που έχουν το ίδιο πρόσημο είναι θετικό.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν ο r είναι άρρητος, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος n τέτοιος ώστε η απόσταση ανάμεσα στον r και τον n να είναι μικρότερη από $1/2$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν ο r είναι άρρητος, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος n τέτοιος ώστε η απόσταση ανάμεσα στον r και τον n να είναι μικρότερη από $1/2$.

Έστω a το κάτω ακέραιο μέρος του r, δηλαδή ο μεγαλύτερος δυνατός ακέραιος που είναι μικρότερος από r, και b το άνω ακέραιο μέρος του r, δηλαδή ο μικρότερος δυνατός ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από r.

Προφανώς, όλοι οι ακέραιοι που είναι μικρότεροι από a και μεγαλύτεροι από b έχουν απόσταση από το r μεγαλύτερη από 1 οπότε αποκλειόνται.

Επίσης, ο r δεν μπορεί να είναι ακριβώς η μέση τιμή των a και b, οπότε και η απόστασή του από αυτούς θα ηταν $1/2$, γιατί τότε θα ήταν ρητός.

Επομένως είτε θα απέχει λιγότερο από $1/2$ από τον a είτε θα απέχει λιγότερο από $1/2$ από τον b και δεν μπορεί να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα.