

Διακριτά Μαθηματικά

[Rosen, κεφ. 3]

Ιωάννης Εμίρης
Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
ΕΚΠΑ

Φθινόπωρο 2025

Αλγόριθμοι

Ρυθμός αύξησης συναρτήσεων **[Rosen 3.2]**

Αριθμητικές συναρτήσεις

Τάξη αριθμητικών συναρτήσεων

Ορισμός $\Theta(\cdot)$ και $\Omega(\cdot)$

Σχέση O , Ω , Θ

Ορισμοί

Ορισμός 1.

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού τους φυσικούς, λέγονται **αριθμητικές** (διακριτές).

Κάθε αριθμητική συνάρτηση ορίζει μια ακολουθία και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 1.

$a : \{0, 1, \dots\} \rightarrow \{a_0, a_1, \dots\}$, δηλ. $a_k = a(k)$.

Χάριν απλότητας θα περιοριστούμε στη μελέτη αριθμητικών συναρτήσεων που παίρνουν μόνο θετικές τιμές, δηλ. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Παραδείγματα αριθμητικών συναρτήσεων

Παράδειγμα 2.

$$f(n) = n^2,$$

$$g(n) = 200 \log_2(n), \text{ γράφεται } 200 \lg n,$$

$$h(n) = 2.3^n,$$

Όπου $n \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο: Ασυμπτωτικά η τιμή της $h(n)$ θα είναι η μεγαλύτερη, ενώ η τιμή της $f(n)$ θα υπερβαίνει αυτή της $g(n)$. Μάλιστα,

$$h(n) \geq f(n), \quad \forall n > 1,$$

$$f(n) \geq g(n), \quad \forall n > 8.$$

Μελετάμε την **ασυμπτωτική συμπεριφορά** της $T(n)$ καθώς $n \rightarrow \infty$

Παραδείγματα αριθμητικών συναρτήσεων

Ο χρόνος εκτέλεσης ενός προγράμματος με είσοδο μεγέθους n εκφράζεται από μια αριθμητική συνάρτηση $T(n)$ (όπου n ακέραιος).

Ασυμπτωτική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης:

Μας ενδιαφέρει μια αριθμητική συνάρτηση που είναι **άνω φράγμα** στην τιμή της $T(n)$ για κάθε είσοδο μεγέθους n και για n “αρκετά” μεγάλο.

Παράδειγμα 3 (*min*).

Αν μας δίνεται μια ακολουθία n αριθμών για να βρούμε τον ελάχιστο θα πρέπει να σαρώσουμε όλη την ακολουθία και άρα θα κάνουμε n συγκρίσεις στη χειρότερη περίπτωση.

Άρα θα είναι $T(n) = n$.

Παράδειγμα 4.

Έστω η ταξινομημένη ακολουθία

$A_1 = [-1, -0.5, 1.3, 4, 7, 11, 17, 23]$ και θέλουμε να βρούμε αν ανήκει στην ακολουθία ο $x = 23$ και σε ποια θέση βρίσκεται.

1η στρατηγική: Σειριακή αναζήτηση.

Θα σαρώσουμε όλη την ακολουθία και θα κάνουμε 8 συγκρίσεις.

Για ακολουθία n αριθμών στην χειρότερη περίπτωση θα κάνουμε $T_1(n) = n$ συγκρίσεις.

$$A_1 = [-1, -0.5, 1.3, 4, 7, 11, 17, 23]$$

2η στρατηγική: Δυαδική αναζήτηση (4 συγκρίσεις)

- ▶ **A1:** Θα ξεκινήσουμε από το μέσο της ακολουθίας A_1 , το $m = 4$. Είναι $m < x$ οπότε θα συνεχίσουμε την αναζήτηση στην υποακολουθία $A_2 = \{7, 11, 17, 23\}$.
- ▶ **A2:** $m = 11 < x$ οπότε συνεχίζουμε στην $A_3 = \{17, 23\}$.
- ▶ **A3:** $m = 17 < x$ οπότε συνεχίζουμε στην $A_4 = \{23\}$.
- ▶ **A4:** $m = 23 = x$, σταματάμε.

Για n αριθμούς στην χειρότερη περίπτωση κάνουμε $T_2(n) = \lfloor \lg n + 1 \rfloor$ συγκρίσεις.

Προτιμότερη στρατηγική είναι αυτή που ασυμπτωτικά (όσο $n \rightarrow \infty$) έχει μικρότερο άνω φράγμα. Άρα η δεύτερη: $\lfloor \lg n + 1 \rfloor \leq n$, $\forall n > 3$

Ασυμπτωτική μελέτη

Η ασυμπτωτική μελέτη είναι ένας βολικός τρόπος για να συγκρίνουμε τη συμπεριφορά δυο συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$ για μεγάλα n .

Ταξινομεί τις συναρτήσεις με βάση την τάξη “μεγέθους” τους.

Π.χ: Η $T_1(n) = n^2$ έχει μεγαλύτερη τιμή από την $T_2(n) = 1000n$ για “μεγάλο” n (π.χ. $n \geq 1000$).

Πίνακας τιμών των $T_1(n)$ και $T_2(n)$								
n	100	300	500	700	900	1100	1300	1500
$T_1(n)$	$0,1 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^5$	$8,1 \cdot 10^5$	$12,1 \cdot 10^5$	$16,9 \cdot 10^5$	$22,5 \cdot 10^5$
$T_2(n)$	10^5	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	$11 \cdot 10^5$	$13 \cdot 10^5$	$15 \cdot 10^5$

Άρα αν για την ίδια είσοδο μεγέθους n δύο προγράμματα λύνουν το ίδιο πρόβλημα, αυτό που κάνει $T_2(n)$ πράξεις είναι προτιμότερο.

Αριθμητικές συναρτήσεις

Τάξη αριθμητικών συναρτήσεων

Ορισμός $\Theta(\cdot)$ και $\Omega(\cdot)$

Σχέση O , Ω , Θ

Ορισμός Τάξης

Ορισμός 2.

Εστω αριθμητικές συναρτήσεις f, g με θετικές τιμές. Λέμε πως η $f(n)$ “είναι” $O(g(n))$ εφόσον υπάρχουν σταθερές $c \in \mathbb{R}_+, n_0 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.

$$f(n) \leq cg(n), \quad \forall n > n_0.$$

Ορισμός 3.

Τάξη της αριθμητικής συνάρτησης $g(n)$ είναι το σύνολο

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c > 0, n_0 \geq 0 : \forall n > n_0, \\ f(n) \leq cg(n)\}$$

Για οποιαδήποτε $f \in O(g)$, γράφουμε $f = O(g)$ και λέμε πως “**ή** f είναι $O(g(n))$ ”.

Παρατηρήσεις

- ▶ Από τον ορισμό της, η τάξη δηλώνει
 - ▶ μόνο άνω φράγμα (στο ρυθμό αύξησης),
 - ▶ μπορεί να κρύβει μια σταθερά,
 - ▶ κρύβει συμπεριφορά πεπερασμένου πλήθους (n_0) όρων.
- ▶ Υπάρχει απειρία αριθμητικών συναρτήσεων g τ.ω. για μια δεδομένη $b(n)$, $b(n) = O(g(n))$. (γιατί;)

Παραδείγματα (I)

- ▶ $\frac{1}{n} + 7 = O(n)$, $n > 0$.

Απόδειξη: Για $c = 1$, $\forall n > 7 \Rightarrow \frac{1}{n} + 7 \leq n$

- ▶ $1/n = O(1)$.

Απόδειξη: Για $c = 1$, $\forall n > 1 \Rightarrow 1/n \leq 1$

- ▶ $n \log n = O(n^2)$,

$n^2 + 10^6 n = O(n^2)$ για $c = 1 + 10^6, n_0 = 1$.

- ▶ $n^2 - 32n + 199n \log n = O(n^2)$.

- ▶ Για κάθε πολώνυμο $P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} \dots + a_0 = O(n^k)$
θέτοντας $c = (k+1) \max_i \{a_i\}, n_0 = 1$.

- ▶ $n \neq O(\frac{1}{n} + 7)$, διότι $\forall n_0, c, \exists k : k \geq n_0$, όπου
 $k > 8c > (\frac{1}{k} + 7)c$. Αρκεί να διαλέξω $k = 1 + \max \{n_0, 8c\}$.

Λήμμα 1.

$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow T \cdot f(n) = O(g(n)), \forall$ σταθερά $T > 0$.

Απόδειξη 1.

Αφού $f(n) = O(g(n))$ υπάρχουν σταθερές $c \in \mathbb{R}_+, n_0 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.
 $f(n) \leq cg(n), \forall n > n_0$. Έστω $T > 0$ τότε $Tf(n) \leq c_2g(n), \forall n > n_0$,
για $c_2 = Tc$. Άρα $Tf(n) = O(g(n))$.

Λήμμα 2.

$f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$.

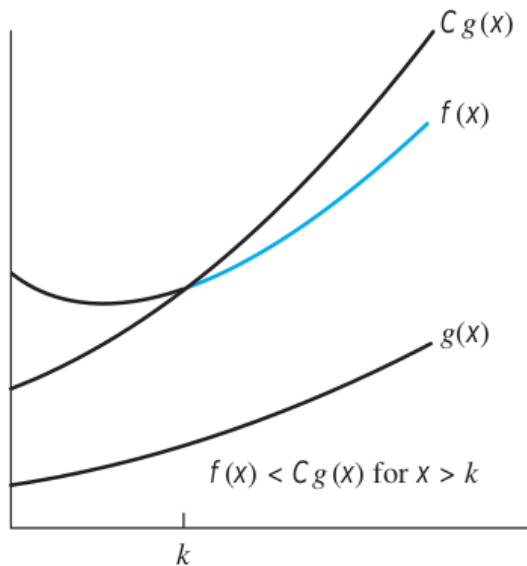
Απόδειξη 2.

Θα υπάρχουν σταθερές $c_1 \in \mathbb{R}_+, n_1 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.
 $f(n) \leq c_1g(n), \forall n > n_1$ και $c_2 \in \mathbb{R}_+, n_2 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.
 $g(n) \leq c_2h(n), \forall n > n_2$. Έστω $c = c_1c_2$ και $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Θα
ισχύει $f(n) \leq ch(n), \forall n > n_0$, άρα $f(n) = O(h(n))$.

Παραδείγματα (II)

- ▶ Για κάθε σταθερά $T > 0$, ισχύει πως $T = O(1)$.
- ▶ Για κάθε σταθερά $T > 0$, ισχύει: $T = O(\lg n)$.
Απόδειξη. $\exists n_0 = 2^T, c = 1 : \forall n \geq n_0 : \lg n \geq \lg n_0 = T$.
Β' απόδειξη. $\exists n_0 = 1, c = T : \forall n \geq 1, c \lg n \geq T$.
- ▶ Είναι δυνατό να ισχύει $f = O(g)$ και $g = O(f)$.
Π.χ. Ελέγξτε την περίπτωση $f(n) = 13n, g(n) = 35n + 211$.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά



Ιδιότητες

Εστω $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$.

- ▶ Προσθετική: $f_1 + f_2 = O(\max\{g_1, g_2\})$
- ▶ Πολλαπλασιαστική: $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.
- ▶ Μέγιστο: $\max\{f_1, f_2\} = O(f_1 + f_2) = O(g_1 + g_2)$.

Λόγος

Λήμμα 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 0 \Rightarrow a = O(b).$$

Απόδειξη 3.

Εστω θετικές συναρτήσεις $a(n), b(n) > 0$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 0 \Rightarrow \left[\forall \varepsilon \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow \frac{a(n)}{b(n)} < \varepsilon \right].$$

Διάλεξε μία συγκεκριμένη τιμή του ε και θέσε $c := \varepsilon$. Τότε $\exists n_0(\varepsilon) : n > n_0$ ισχύει $\frac{a(n)}{b(n)} < c \Rightarrow a = O(b)$.

Δεν ισχύει το αντίστροφο:

$$n^2 + n = O(n^2), \text{ ενώ } \lim \frac{n^2 + n}{n^2} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = 1.$$

Κανόνας L'Hôpital

Ο κανόνας L'Hôpital είναι χρήσιμο εργαλείο για να υπολογίζουμε το όριο ενός λόγου συναρτήσεων $\frac{f(x)}{g(x)}$ όταν προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$.

- ▶ Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ και f, g παραγωγίσιμες τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Εκθετικές συναρτήσεις

Λήμμα 4.

$n^b = O(a^n)$, για κάθε πραγματικό $a > 1$, ακέραιο $b \geq 1$.

Απόδειξη 4.

Αρκεί να δείξουμε πως $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^{b-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b!}{a^x \ln^b a} = 0,$$

όπου εφαρμόσαμε κανόνα *L'Hôpital*, διότι αριθμητής και παρονομαστής είναι γνησίως αύξοντες ως προς x , και:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Π.χ. $n^8 = O(2^n) \Rightarrow 10^6 n^8 = O(2^n)$.

Λογάριθμοι

Λήμμα 5.

Για κάθε $a, b \in \mathbb{N}^*$ ισχύει πως $(\ln n)^a = O(n^b)$.

Απόδειξη 5.

Αρκεί ν.δ.ό. $\exists n_0$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$:

$$(\ln n)^a \leq n^b \Leftrightarrow a \ln \ln n \leq b \ln n \Leftrightarrow \ln \ln n \leq (b/a) \ln n.$$

Θα δείξουμε πως $\ln \ln n = O(\ln n)$ με το προηγούμενο λήμμα:

$$\text{L'Hôpital:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{(b/a) \ln x} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/\ln x \cdot 1/x}{1/x} = 0,$$

διότι $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ και $(\ln x)' = 1/x$.

Παραγοντικό

Λήμμα 6.

Για $a \in \mathbb{N}$, $a^n = O(n!)$.

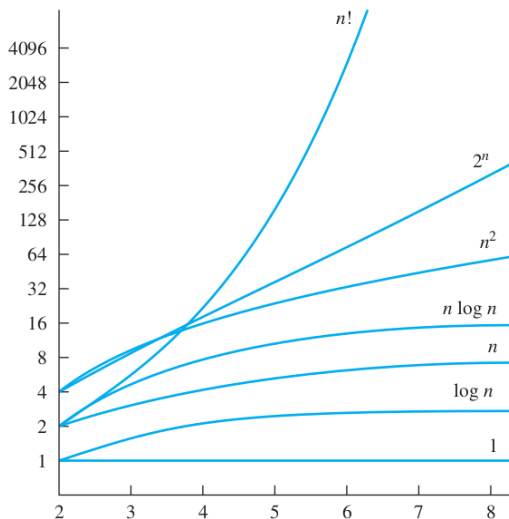
Απόδειξη 6.

Θέτουμε $c = a^a$, $n_0 = a : \forall n \geq n_0 = a :$

$$a^n \leq a^a \cdot a^{n-a} \cdot a! = c \cdot \underbrace{a \cdots a(a-1) \cdots 2 \cdot 1}_n \leq c \cdot n!$$

Πίνακας τιμών των 2^n και $2!$							
n	2	3	4	5	6	8	10
2^n	4	8	16	32	64	256	1024
$2!$	2	6	24	120	720	40320	3628800

Συναρτήσεις πρότυπα



Στο διάγραμμα χρησιμοποιείται εκθετική κλίμακα.

Αριθμητικές συναρτήσεις

Τάξη αριθμητικών συναρτήσεων

Ορισμός $\Theta(\cdot)$ και $\Omega(\cdot)$

Σχέση O , Ω , Θ

Ορισμός $\Theta(\cdot)$

Ορισμός 4.

Εστω $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Η f είναι $\Theta(g)$ αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+, n_0 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad n > n_0.$$

Ισοδύναμα,

$$\Theta(g(n)) := \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0, \\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Παρατήρηση: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = O(g) \wedge g = O(f)$.

Παράδειγμα

Παράδειγμα 5.

Ισχύει $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ αφού $\exists c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0$:

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_0$$

Διαιρώντας με n^2 έχουμε $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$.

Αν διαλέξουμε $c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7$ τότε η σχέση ισχύει.

Παράδειγμα

Παράδειγμα 6.

Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\lg(n) \left(2 + \sin \left(\frac{n}{2} \right) \right) = \Theta(\lg n)$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0$:

$$c_1 \lg n \leq \lg(n) \left(2 + \sin \left(\frac{n}{2} \right) \right) \leq c_2 \lg n$$

Πράγματι, από τη ανισότητα $-1 \leq \sin(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και για $n \geq 1$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$1 \leq 2 + \sin \left(\frac{n}{2} \right) \leq 3$$

$$\lg n \leq \lg(n) \left(2 + \sin \left(\frac{n}{2} \right) \right) \leq 3 \lg n$$

Οπότε αρκεί να διαλέξουμε $c_1 = 1, c_2 = 3, n_0 = 1$.

Λογάριθμοι

Λήμμα 7.

Για κάθε $f(n)$, $a, b > 1$, ισχύει $\log_a f(n) = \Theta(\log_b f(n))$.

Απόδ.
$$\log_a f(n) = \frac{\log_b f(n)}{\log_b a} = \Theta(\log_b f(n)).$$

Πόρισμα: $\lg f(n) = \Theta(\ln f(n))$.

Ορισμός $\Omega(\cdot)$

Ορισμός 5.

Εστω $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Λέμε πως η f “είναι μεγάλο Ωμέγα της g ” αν υπάρχουν σταθερές $c \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ.

$$f(n) \geq cg(n), \quad \forall n > n_0.$$

Ισοδύναμα,

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c > 0, n_0 \geq 0 : cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

Ιδιότητες $\Omega(\cdot)$

Παρατήρηση 1.

- ▶ Το Ω δίνει κάτω φράγμα, μπορεί να κρύβει μια σταθερά και να αγνοεί σταθερό πλήθος αρχικών όρων.
- ▶ $f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$.
- ▶ $f = \Theta(g) \Rightarrow f = \Omega(g)$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Ισχύει $2n^2 = \Omega(105n^2 + 45n)$ αλλά $n^{2/3} \notin \Omega(n^{4/5})$.

Παράδειγμα 8.

Να αποδειχθεί ότι $e^{2n} = \Omega(ne^n)$.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχτεί ότι υπάρχουν n_o και c , τ.ώ. $\forall n > n_o$:

$$e^{2n} \geq cne^n \Leftrightarrow e^n \geq cn$$

το οποίο ισχύει για $n_o = 1$ και $c = 1$.

Αριθμητικές συναρτήσεις

Τάξη αριθμητικών συναρτήσεων

Ορισμός $\Theta(\cdot)$ και $\Omega(\cdot)$

Σχέση O , Ω , Θ

Σχέση O , Ω , Θ

Θεώρημα 1.

Για κάθε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.

Απόδειξη 7.

$$O(g) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c_2 > 0, n_0 \geq 0 : 0 \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}$$

$$\Omega(g) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c_1 > 0, n_0 \geq 0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

$$\Theta(g) = \{f(n) : \exists \text{ σταθ. } c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0 : \\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}$$

Ιδιότητες (I)

Μεταβατική ιδιότητα

- ▶ $f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h) \Rightarrow f = \Theta(h)$
- ▶ $f = O(g) \wedge g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$
- ▶ $f = \Omega(g) \wedge g = \Omega(h) \Rightarrow f = \Omega(h)$

Ανακλαστική ιδιότητα

- ▶ $f(n) = \Theta(f(n))$
- ▶ $f(n) = O(f(n))$
- ▶ $f(n) = \Omega(f(n))$

Ιδιότητες (II)

Συμμετρική ιδιότητα

$$\blacktriangleright f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

Ιδιότητα αναστροφής

$$\blacktriangleright f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

Αθροιστική.

$$\blacktriangleright 2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$