1. (2 μονάδες) Σωστό ή Λάθος, εξηγείστε

   (α) Σωστό Λάθος Η πρόταση "Αν 1+1=3 τότε κάθε ζυγός αριθμός $n \geq 4$ γράφεται σαν άθροισμα δύο πρώτων αριθμών." είναι ορθή.

   (β) Σωστό Λάθος Η άρνηση της πρότασης $\forall x \exists y : P(x,y)$ είναι $\exists y \forall x : \neg P(x,y)$

   (γ) Σωστό Λάθος Το δυναμοσύνολο του συνόλου $S = \{1,2,3\}$ είναι το σύνολο

   $$2^S = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

   (δ) Σωστό Λάθος Αν για 2 μη κενά σύνολα A και B ισχύει ότι $A \cup \overline{B} = A - B$, τότε $A = \overline{B}$

   (ε) Σωστό Λάθος Καμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις δεν είναι 1-1 και επί ως συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   $$f(x) = x^3 - x, \qquad f(x) = e^x \quad \text{και} \quad f(x) = |x|$$

   (ζ) Σωστό Λάθος Άν $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μια ακολουθία μήκους n με λογικές τιμές, ισχύει

   $$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \equiv (\forall i \in \{1, ..., n\} : x_i)$$

   (η) Σωστό Λάθος Υπάρχει ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$ που περιλαμβάνει κάθε ρητό αριθμό ακριβώς μία φορά.

   (θ) Σωστό Λάθος Έστω η ακολουθία $1, 2, 4, 8, \ldots$ που δίνεται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Ο επόμενος της όρος είναι 16.

   (ι) Σωστό Λάθος Όπως και να επιλέξεις 6 διαφορετικούς ακεραίους από 1 εώς και 10, αναγκαστικά υπάρει ένα ζέυγος αριθμών που διαφέρουν ακριβώς κατά 2.

   (κ) Σωστό Λάθος Για κάθε θετικό ακέραιο n, ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \binom{n}{2}$

2. (1 μονάδα) Να βάλετε σε κύκλο τη μεγαλύτερη από τις ασυμπτωτικές χρονικές πολυπλοκότητες

   (α) $\boxed{n \log n}$ vs $\boxed{n^2}$ vs $\boxed{\log(n!)}$

   (β) $\boxed{2^n}$ vs $\boxed{n!}$

   (γ) $\boxed{2^{2n}}$ vs $\boxed{\binom{2n}{n}}$

   (δ) $\boxed{2^{\sqrt{\log n}}}$ vs $\boxed{\sqrt{n}}$

   (ε) $\boxed{\frac{n^2}{\log n}}$ vs $\boxed{n \log^2 n}$

   (ζ) $\boxed{\log n}$ vs $\boxed{n^{\frac{1}{\log n}}}$

   (η) $\boxed{(n-100)^{10}}$ vs $\boxed{1 + n + 10n + 1000n^9}$

   (θ) $\boxed{3^{2n}}$ vs $\boxed{2^{3n}}$ vs $\boxed{10^{100}}$

3. (2 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούμε...
   (α) Να επιλέξουμε 3 άτομα από μια ομάδα 10 ατόμων;
   (β) Να αναδιατάξουμε τα γράμματα της λέξης "ΠΑΠΑΓΑΛΟΣ";
   (γ) Να γράψουμε έναν 5ψήφιο αριθμό που να περιέχει το 5 και τα ψηφία του είναι σε **γνησίως αύξουσα** διάταξη, π.χ. 14589 και 15678 αλλά όχι 01235 γιατί ειίναι 4ψήφιος, όχι 12335 γιατί δεν είναι σε γνησίως αύξουσα διάταξη και όχι 12346 γιατί δεν περιέχει το 5.
   (δ) Να γράψουμε έναν 5ψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι σε **μη-φθήνουσα** διάταξη, π.χ. 14559 και 12388 αλλά όχι 53879 και 01234.
   (ε) Να τοποθετήσουμε 10 όμοια βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια αν κάθε ράφι έχει τουλάχιστον 1 βιβλίο.

4. (3 μονάδες) Επαγωγή
   (α) Να δείξετε ότι $5^{n-2} \leq n! + 5, \forall n \geq 5$
   (β) Δύο παίκτες Π1 και Π2 παίζουν ένα παιχνίδι με έναν αρχικό αριθμό πετρών n. Ο παίκτης Π1 παίζει πάντα πρώτος και οι δύο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Οι κανόνες του παιχνιδιού έχουν ως εξής: Σε κάθε κίνηση, ένας παίκτης μπορεί να αφαιρέσει 1, 2 ή 3 πέτρες από το ταμπλό του παιχνιδιού. Όποιος πάρει την τελευταία πέτρα χάνει. Να δείξετε ότι ο δεύτερος παίκτης έχει στρατηγική νίκης αν και μόνο αν το n είναι της μορφής $4k + 1$, όπου k μη-αρνητικος ακέραιος.

5. (2 μονάδες) Σε ένα σχολείο υπάρχουν n μαθητές ($n \geq 4$). Κάθε μαθητής έχει φίλους στο Facebook τουλάχιστον k άλλους μαθητές του σχολείου.
   (α) Αν οι φίλοι ενός μαθητή Α δεν έχουν άλλους κοινούς φίλους μεταξύ τους (ανά 2), πόσο λίγοι μπορεί να είναι **οι φίλοι των φίλων** του Α σαν συνάρτηση του k;
   (β) Να δείξετε ότι αν $k \geq \sqrt{n} + 1$, κάθε μαθητής Α έχει τουλάχιστον δύο κοινούς φίλους με κάποιον άλλο μαθητή.