Αρχές απαρίθμησης

- Συνδυαστική: Μελετάει την απαρίθμηση διαφορετικών αντικειμένων
- Ορισμός: Πείραμα είναι μια διαδικασία με συγκεκριμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
- Στόχος: Να απαριθμήσουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα

Παράδειγμα

- Password: 6, 7 ή 8 χαρακτήρες
  Χαρακτήρας είναι γράμμα ή ψηφίο
  Υποχρεωτικά ≥ 1 αριθμητικό ψηφίο

π.χ. aaaaa0
abcde1
⋮
1234567

Χαρακτήρας = 26+10
= 36

$\underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$

(Απάντηση για 6) + (Απάντηση 7) + (Απάντηση για 8)

$$= 36^6 - 26^6 \qquad = 36^7 - 26^7 \qquad = 36^8 - 26^8$$

Εφαρμογές

- Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων
- Κρυπτογραφία
- Σχεδιασμός Συστημάτων : - Τηλεφωνικοί Αριθμοί
  - IP address
  - Πινακίδες Αυτοκινήτων
- Τυχερά Παιχνίδια

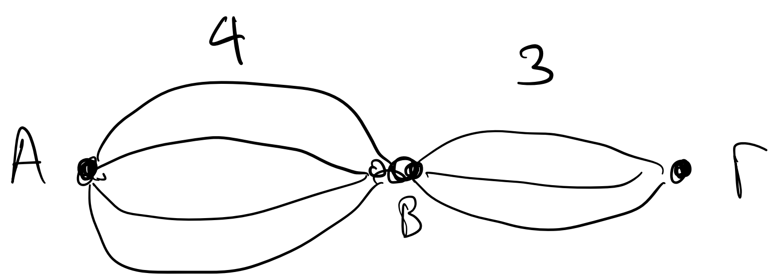
1. Κανόνας του γινομένου

Αν μια διαδικασία διαχωρίζεται σε μια ακολουθία 2 εργασιών

- Αν η πρώτη εργασία έχει a_1 τρόπους εκτέλεσης
- και η δεύτερη a_2 τρόπους εκτέλεσης

Υπάρχουν συνολικά $a_1 \cdot a_2$ τρόποι εκτέλεσης της συνολικής διαδικασίας

Γενικότερα $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$
για n εργασίες



$4 \times 3 = 12$
μονοπάτια από το A στο Γ

Παράδειγμα: Πόσα πιθανά αποτελέσματα με 2 ζάρια;

$(1,1)$ $(1,2)$ ...
$(2,1)$ ...
...

$(\underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}}, \underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}})$

$6 \times 6 = 36$ επιλογές

Παράδειγμα: Πόσες συμβολοσειρές με 0/1 μήκους 9;

0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 0 1 0 1 1 1 0 1

⋮

$$\underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \cdots\ \underset{2}{\sqcup}$$

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$$

$$= 2^9 = 512$$

Παράδειγμα: Πόσες πινακίδες με 3 ελληνικά γράμματα και 4 νούμερα

ΑΑΑ 0000

ΑΒΓ 1234

⋮

$$\underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$$

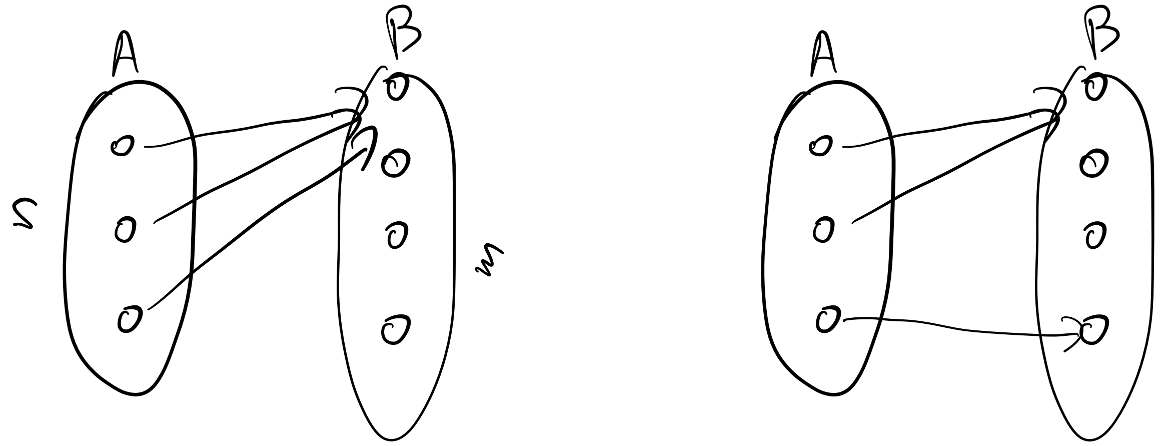
$$24^3 \times 10^4 = 138\,240\,000$$

α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω

× × × × × × × × × ×

$14^3 \cdot 10^4$

Παράδειγμα: Πόσες συναρτήσεις $f : A \to B$ υπάρχουν αν $|A| = n$
$|B| = m$

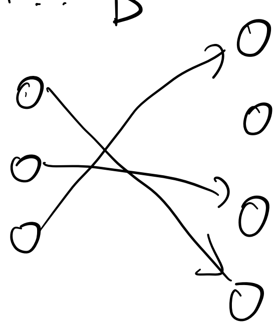


$\underbrace{\text{1ο στοιχείο του } A}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad$ $\underbrace{\text{2ο στοιχείο του } A}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad$ .... $\quad$ $\underbrace{n\text{-οστό του } A}_{m \text{ επιλογές}}$

$$m \times m \times m \times \cdots \times m = m^n$$

$f \in B^A$ $\quad$ $\overbrace{B \times B \times \cdots B}^{B^3}$

$(4, 3, 1)$



Συνολοθεωρητική Προσέγγιση

Αν έχουμε σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και το πείραμα είναι

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$$
$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \forall i, a_i \in A_i\}$$

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots |A_n|$$

Παράδειγμα: 2 ζάρια έτσι ώστε το πρώτο ζάρι να μην είναι ίδιο με το δεύτερο

$\underbrace{\text{1ο νούμερο}}_{\text{6 επιλογές}}$ $\underbrace{\text{2ο νούμερο}}_{\text{5 επιλογές}}$ $6 \times 5 = 30$ επιλογές

Κανόνας του αθροίσματος

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
(χωρίς κοινά στοιχεία)
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2$ τρόποι επίλυσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$
αν $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ με $i \neq j$

Παράδειγμα: Επιλογές για πτυχιακή εργασία
- 18 επιλογές για βιβλιογραφική εργασία
- 35 επιλογές για ανάπτυξη κώδικα

$18 + 35 = 53$ επιλογές

Παράδειγμα

Ένας χαρακτήρας είτε ψηφίο
είτε ελληνικό γράμμα

$\#$ χαρακτήρες $= 10 + 24 = 34$

Παράδειγμα: Μπιλιάρδο

15 μπάλες	7	μονόχρωμες
	7	δίχρωμες
	1	μαύρη

Μια μονόχρωμη και μια δίχρωμη
$7 \times 7 = 49$ (γινόμενο)

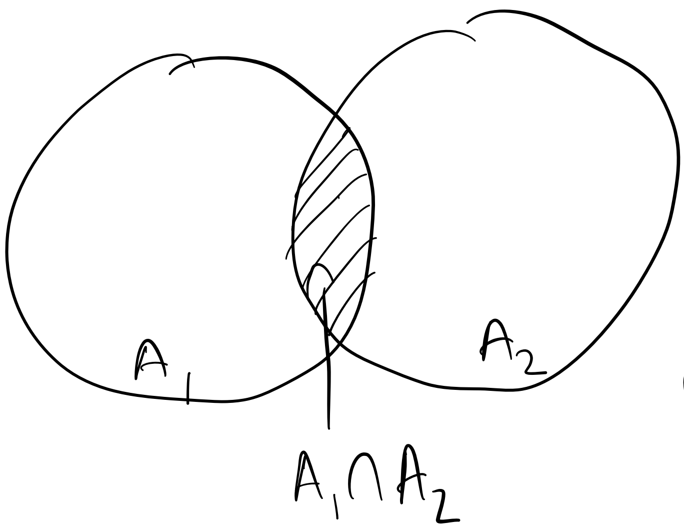
Μια μονόχρωμη ή μια δίχρωμη
$7 + 7 = 14$ (άθροισμα)

Κανόνας της αφαίρεσης

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
εκ των οποίων k είναι κοινοί
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2 - k$ τρόποι εκτέλεσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|} - |A_1 \cap A_2|$$



$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού

$A_1 = \{a, b\}$

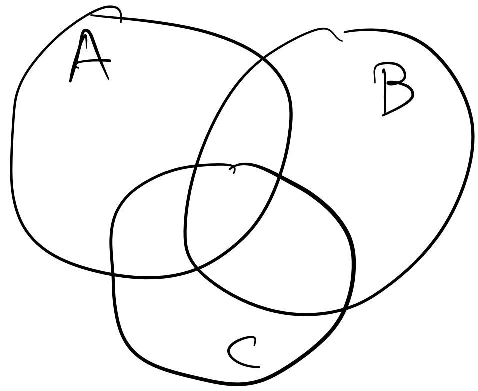
$A_2 = \{b, c\}$

$A_1 \cap A_2 = \{b\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c\}$

$A_1 \oplus A_2 = \{a, c\}$

Για 3 σύνολα



$|A \cup B \cup C| =$

$|A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$

Παράδειγμα: Πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολ/σια ούτε του 2, ούτε του 3 ούτε του 5

$\boxed{1 \ldots 999}$

A_2 = "πολ/σια του 2"
A_3 = "πολ/σια του 3"
A_5 = "πολ/σια του 5"

$$999 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$$

$$= 999 - \big(|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|\big)$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

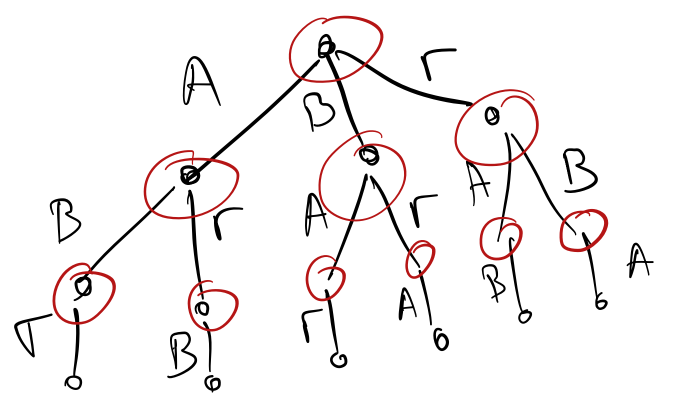
$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 499+333+199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

Άρα συνολικά $999-733=266$ νούμερα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 3 άτομα σε μια σειρά;

$$\left.\begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \\ A & \Gamma & B \\ B & A & \Gamma \\ B & \Gamma & A \\ \Gamma & A & B \\ \Gamma & B & A \end{array}\right\} \text{6 τρόποι}$$

Πρώτο άτομο	3
Δεύτερο άτομο	2
Τρίτο άτομο	1

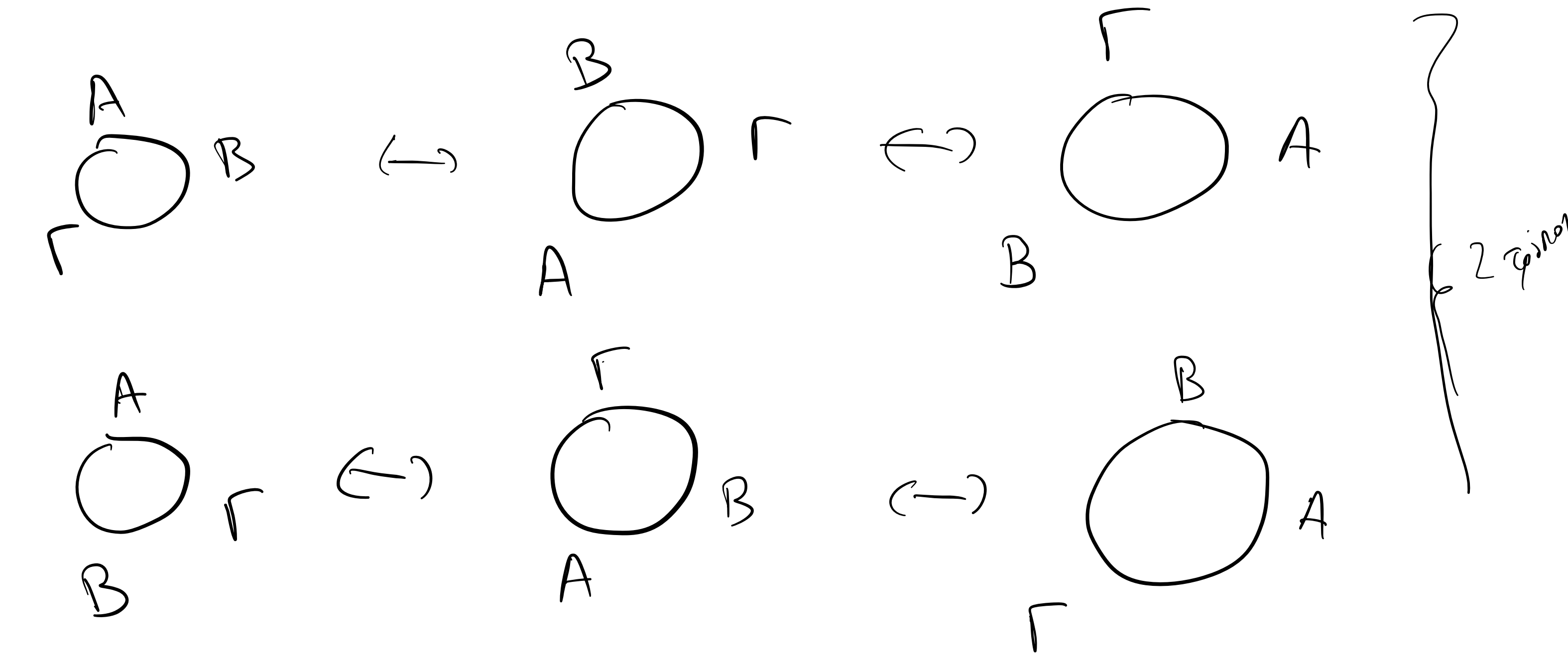


Με 10 άτομα $10!$ τρόποι

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

(Μεταθέσεις)

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω 3 άτομα σε ένα κύκλο;



$$\frac{3!}{3} = 2$$

Με 10 άτομα

$$\frac{10!}{10} = 9! \text{ τρόποι}$$

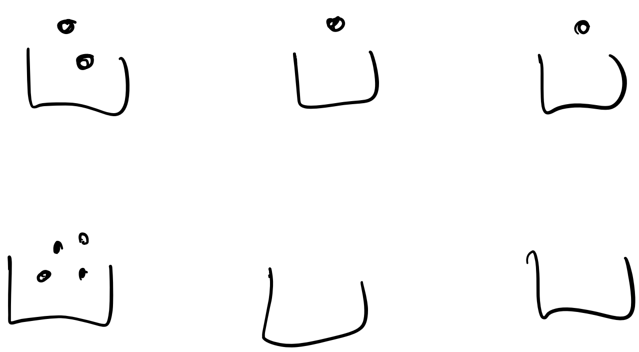
Κάθε τρόπος μετριέται 10 φορές αν τους βάλω σε σειρά

4. Κανόνας της διαίρεσης

Αν έχω ένα τρόπο να μετρήσω το κάθε στοιχείο ακριβώς k φορές, διαιρώντας με το k βρίσκω το πραγματικό πλήθος στοιχείων.

- ### Αρχή του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle)

Αν έχουμε $k+1$ αντικείμενα και τα βάλουμε σε k κουτιά τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κουτί με 2 ή περισσότερα αντικείμενα.



Μια συνάρτηση από $k+1$ στοιχεία σε k δεν μπορεί να είναι 1-1

Άσκηση: Αν σε ένα διαγώνισμα μπαίνουν οι βαθμοί 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ..., 10
Πόσοι φοιτητές πρέπει να έχω για να υπάρχουν σίγουρα 2 με τον ίδιο βαθμό;
22

$|\{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 10\}| = 21$
άρα $21+1 = 22$ φοιτητές

Άσκηση: Για κάθε ακέραιο n υπάρχει πολ/σιο που αποτελείται μόνο από 0 ή 1.

π.χ.
$5 \to 10$
$3 \to 111$
$4 \to 100$
$6 \to 1110$

Θα δείξω ότι ισχύει για κάθε n

Έστω

$$A = \{1, 11, 111, \dots, \overbrace{111\cdots1}^{n}\}$$

Αν υπάρχει $a \in A$ $\quad a \bmod n = 0$ ✓

Διαφορετικά $\forall a \in A$ $\quad a \bmod n \in \{1, \dots, n-1\}$

αλλά $|A| = n$

άρα υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$

$$a \bmod n = b \bmod n$$

$b = 111111$
$a = 111$
$b - a = 111000$

Τότε το $b-a$

- $(b-a) \bmod n = 0$
- και $b-a$ είναι της μορφής

$$111\dots110\dots0$$

✓

6

	a			b		
$A =$	$\{1,$	$11,$	$111,$	$1111,$	$11111,$	$111111\}$
$\bmod 6$	1	5	3	1	5	3

$11111 - 11 = 11100$

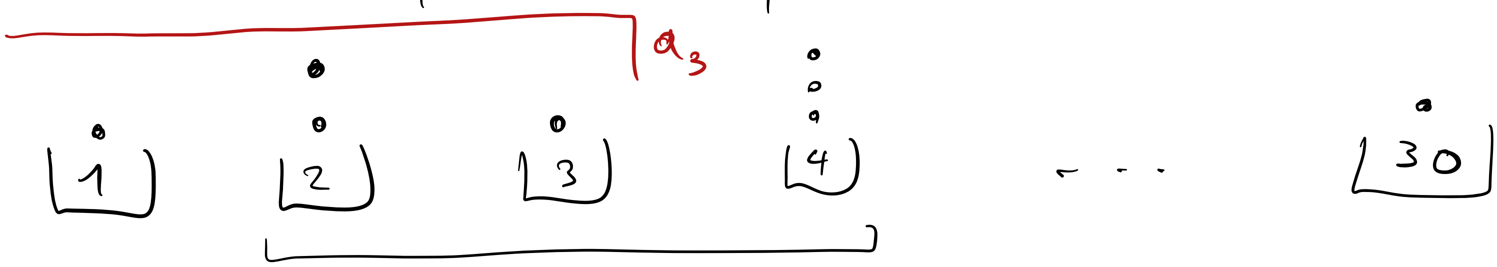
$$1111 - 1 = 1110$$

∎

Άσκηση

- 30 κουτιά αριθμημένα 1...30
- 45 μπάλες
- Τουλάχιστον 1 μπάλα σε κάθε κουτί.

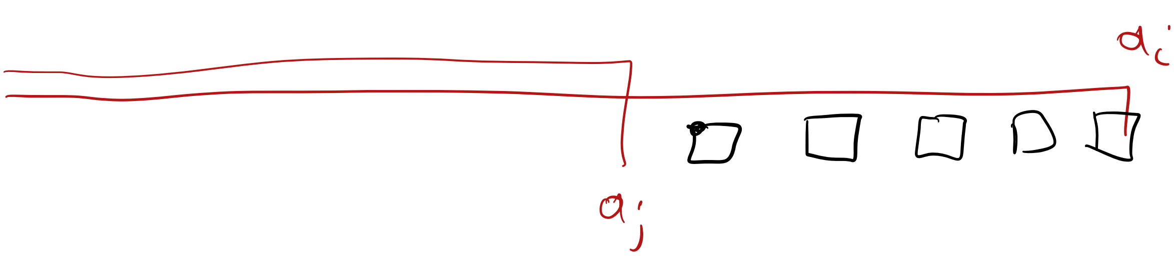
Ν.δ.ο. υπάρχουν διαδοχικά κουτιά με ακριβώς 14 μπάλες.



a_i = "Το πλήθος από μπάλες στα πρώτα i κουτιά"

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{30} = 45$$

Αν υπάρχει j τ.ω. $a_i = a_j + 14$ τελειώνω γιατί τα κουτιά $j+1 \dots i$ έχουν 14 μπάλες



$$b_j = a_j + 14$$

$1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{30}, b_1, b_2, \dots, b_{30} \leq \underset{59}{\underset{\shortparallel}{45+14}}$

Άρα υπάρχει i και j

$a_i = b_j$ γιατί 2 όροι της a δεν μπορεί να είναι ίση ούτε της b

$\Downarrow$

$a_i = a_j + 14$

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς αριθμούς περιέχει είτε μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μια γνησίως φθίνουσα

π.χ. $n=2$ $7, 3, 6, 5, 8$

$3, 5, 8$ αύξουσα ή $3, 6, 8$

$7, 6, 5$ φθίνουσα

1, 2, 3, 5, 4

1, 2, 3, 5 αύξουσα

Ορίζω

α_i = μεγαλύτερη αύξουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

φ_i = μεγαλύτερη φθίνουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

	7	3	6	5	8
α_i	2	3	2	2	1
φ_i	3	1	2	1	1

Αν κάποιο α_i ή $\varphi_i \geq n+1$ τελειώνω.

Υποθέτω ότι $\forall i \ \alpha_i, \varphi_i \leq n$ για να καταλήξω σε άτοπο

Πόσα ζεύγη (a_i, φ_i) υπάρχουν;

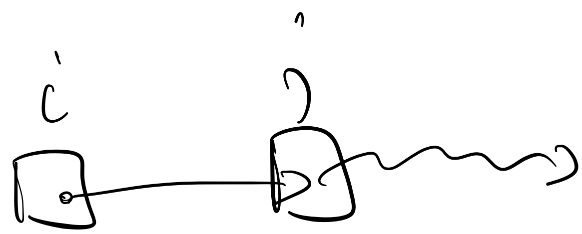
$$\{1, \dots, n\}$$

n^2 επιλογές $\underbrace{}_{n \text{ πρώτο}}$ $\underbrace{}_{n \text{ για το δεύτερο}}$

αλλά η ακολουθία έχει μήκος n^2+1

Άρα υπάρχει $i<j$ με

$$a_i = a_j$$
$$\varphi_i = \varphi_j$$



Αν $x_i < x_j$ πρέπει $a_i \geq a_j + 1$

Αν $x_i > x_j$ πρέπει $\varphi_i \geq \varphi_j + 1$

Σε κάθε περίπτωση $(a_i, \varphi_i) \neq (a_j, \varphi_j)$

Άτοπο $\square$

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Μετάθεση : Τρόπος διάταξης η στοιχείων σε μια ευθεία

π.χ. 5 άτομα

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά για φωτογράφιση ;

A B C D E
B A C D E

} μεταθέσεις

$\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup$

5 επιλογές 4 3 2 1

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Αν είχα μόνο 3 θέσεις

$\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup$

5 4 3

$5 \cdot 4 \cdot 3$ } μεταθέσεις -3

Θεώρημα: Αν n θετικός ακέραιος και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$ οι μεταθέσεις-k ενός συνόλου με n διαφορετικά στοιχεία είναι

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Δλδ. $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \underbrace{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{(n-k)!}$$

π.χ. 100 άτομα σε αγώνα
Πόσες 3-άδες νικητών μπορούμε να έχουμε;

$$P(100,3) = \frac{100!}{97!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970{,}200$$

Πχ. Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFGH υπάρχουν όπου εμφανίζεται μέσα η συμβολοσειρά ABC

$\underbrace{D}\,\underbrace{E}\,\underbrace{ABC}\,\underbrace{F}\,\underbrace{H}\,\underbrace{G}$

Υπάρχουν 6 αντικείμενα
ABC, D, E, F, G, H
κάθε μετάθεση αντιστοιχεί σε διαφορετική λύση άρα 6! τρόποι

D E A B F C H G

Αν δεν θέλω να εμφανίζεται το ABC $8! - 6!$

Συνδυασμοί

Επιλογή κ αντικείμενα από η χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά (σαν μεταθέσεις-κ χωρίς διάταξη)

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 άτομα από 4;

$$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ABD \\ CBD \\ ACD \end{array}\right]$$

Με 4 τρόπους

$C(4,3)$

Συμβολίζουμε $C(n,\kappa)$ το πλήθος των επιλογών κ αντικειμένων από η

π.χ. $C(100,3)$

$$\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ACB \\ BAC \\ CBA \\ BCA \\ CAB \end{array}\right]$$ ίδια λύση

$$P(n,k) = C(n,k) \cdot k!$$

με νοιάζει η σειρά

δεν με νοιάζει η σειρά

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Θεώρημα: Το πλήθος των συνδυασμών-k από n στοιχεία είναι

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

πχ. Από 4 να επιλέξω 3:

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$$

πχ. Έχω 52 χαρτιά και θέλω 5;

$$C(52,5) = \frac{52!}{47!\,5!}$$

π.χ. Πόσες συμβολοσειρές με bit 0 ή 1 μήκους n που έχουν k άσσους;

π.χ. $n = 5$, $k = 2$

00011 → $\{4,5\}$

00101 → $\{3,5\}$

00110

⋮

$C(5,2)$

Γενικότερα $C(n,k)$

$$C(5,2) = C(5,3)$$

$C(5,2)$: 5 — από τις 5 θέσεις; 2 — επιλέγω 2 θέσεις για τους άσσους

$C(5,3)$: 5 — από τις 5 θέσεις; 3 — επιλέγω 3 θέσεις για μηδενικά

$$C(n,k) = C(n, n-k)$$

$$C(n, n-k) = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C(n,k)$$

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$ διωνυμικός συντελεστής (n ανά k)

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

διωνυμικό θεώρημα

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

x^2y^2

$\binom{4}{2}$ Όλες οι συμβολοσειρές μήκους 4 με γράμματα $\{x,y\}$ και 2 x

$$\left.\begin{array}{l} xxyy \\ xyxy \\ xyyx \\ yxxy \\ yxyx \\ yyxx \end{array}\right\} \binom{4}{2} = 6$$

$(x+y)^n$ ο συντελεστής του $x^k y^{(n-k)}$

$C(n,k) = \binom{n}{k}$

Πόρισμα: $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1}^{i} \, \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{1}^{n-i} = (1+1)^n$$
$$= 2^n \qquad \square$$

Εναλλακτικά $\binom{n}{i}$ είναι το πλήθος των συμβολοσειρών 0-1 μήκους n με i άσσους

τότε $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ είναι το πλήθος όλων των συμβολοσειρών το οποίο είναι ίσο με $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ γιατί έχω 2 επιλογές (0 ή 1) για κάθε μια από τις n θέσεις.

Πόρισμα $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

π.χ. $$\underbrace{\binom{3}{0}} - \underbrace{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{3}{2}} - \underbrace{\binom{3}{3}}$$

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underset{x}{\underset{\uparrow}{(-1)}}^{i} \cdot \underset{y}{\underset{\uparrow}{1}}^{n-i} = (-1+1)^n = 0$$

Πόρισμα $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

Απόδειξη: $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{(n-k)}$

$$= (2+1)^n = 3^n$$

$\square$

Το πλήθος των συνόλων $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$

με $A \subseteq B$

π.χ. $n = 3$

$B = \{1, 2, 3\} \to A \in 2^B, \ |2^B| = 8$

$B = \{1, 2\} \to A \in 2^B, \ |2^B| = 4$

$$\binom{3}{3} 2^3 + \binom{3}{2} 2^2 + \binom{3}{1} 2^1 + \binom{3}{0} 2^0$$

γενικότερα

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\substack{\text{τρόποι} \\ \text{να επιλέξω} \\ \text{το B από n στοιχεία} \\ \text{αν το B έχει i} \\ \text{στοιχεία}}} 2^i$$

← Το πλήθος των υποσυνόλων του B

Διαφορετικά για κάθε στοιχείο $i = 1 \ldots n$

έχω 3 επιλογές

Είτε

$i \in A$ και $i \in B$

$i \notin A$ και $i \in B$

$i \notin A$ και $i \notin B$

~~$i \in A$ και $i \notin B$~~ γιατί $A \subseteq B$

3^n

Τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|l}
0 & & & & & & 1 & & & & & & (x+y)^0 \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & (x+y)^1 \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & (x+y)^4 \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & (x+y)^5 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \\
n & & \cdot & & & & C(n,i) & & & & \cdot & & \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & \ldots & & n & &
\end{array}
$$

Η βασική ιδιότητα

$$
\begin{tikzcd}
\binom{n}{k-1} \arrow[dr, dash] & & \binom{n}{k} \arrow[dl, dash] \\
& \binom{n+1}{k} &
\end{tikzcd}
$$

Θεώρημα: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Απόδειξη με πράξεις $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1-k)}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1-k+k)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Διαφορετική απόδειξη

$\binom{n+1}{k}$ = επιλογή k στοιχείων από $n+1$

- Διαφορετικά μπορώ να μετρήσω τις k-άδες που δεν έχουν το $n+1$

$\binom{n}{k}$ τρόποι

- Οι λύσεις που ο $n+1$ είναι μέσα — Έχω $k-1$ θέσεις και n νούμερα

$\binom{n}{k-1}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

ο $n+1$ δεν είναι μέσα

ο $n+1$ είναι μέσα

$\square$

Συνδιασμοί n ανα k

$$\underbrace{\binom{n}{k} = C(n,k)}\qquad = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- Επιλέγω k αντικείμενα από n
- Πόσες συμβολοσειρές bit με n χαρακτήρες έχουν ακριβώς k άσσους (δηλ $n-k$ μηδενικά)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{2, 6, 7\}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Θεώρημα Vandermonde:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

m αγόρια + n κορίτσια
και θέλω ομάδα με r άτομα

Α τρόπος: m+n άτομα
άρα $\binom{m+n}{r}$ πιθανές
ομάδες r ατόμων

Β τρόπος: Ομάδες με k κορίτσια
και r άτομα

Από n κορίτσια επιλέγω k

$\binom{n}{k}$ ·

Από m αγόρια επιλέγω r-k

$\binom{m}{r-k}$

Άρα συνολικά $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

Ν.δ.ο. $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$

Θέλω από n άτομα να επιλέξω μια ομάδα με 1 αρχηγό

Έστω $n=3$ $\rightarrow$ 12

$\{1,2,3\} \rightarrow 1$

$\{1,2,3\} \rightarrow 2$

$\{1,2,3\} \rightarrow 3$

$\{1,2\} \rightarrow 1$

$\{1,2\} \rightarrow 2$

$\{1,3\} \rightarrow 1$

$\{1,3\} \rightarrow 3$

$\{2,3\} \rightarrow 2$

$\{2,3\} \rightarrow 3$

$\{1\} \rightarrow 1$

$\{2\} \rightarrow 2$

$\{3\} \rightarrow 3$

Α' τρόπος : Πρώτα διαλέγω ομάδα. Αν η ομάδα έχει k άτομα

$$\binom{n}{k} \cdot k$$

επιλέγω τα άτομα από n — από τα k επιλεγμένα διαλέγω αρχηγό

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Β τρόπος : Πρώτα διαλέγω τον αρχηγό

$$n \qquad 2^{n-1}$$

επιλογές για τον αρχηγό — σύνολο των υπολοίπων παικτών

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$$

$$\frac{\partial (1+x)^n}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n} k\, x^{k-1} \binom{n}{k}$$

$$\| $$

$$n(1+x)^{n-1}$$

για $x=1$

$$n\, 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Ν.δ.ο. $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2}_{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}} = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Υπάρχουν n αγόρια και n κορίτσια
Θέλω να φτιάξω μια ομάδα n ατόμων και αρχηγό κορίτσι

Α τρόπος : Για κάθε πλήθος κοριτσιών κ

- Επιλέγω κ κορίτσια $\binom{n}{\kappa}$
- Επιλέγω $n-\kappa$ αγόρια $\binom{n}{n-\kappa}$
- Επιλέγω από τα κ κορίτσια αρχηγό κ

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \kappa \binom{n}{\kappa}\binom{n}{n-\kappa}$$

Β τρόπος : - Επιλέγω κορίτσι για αρχηγό n

- Από τα $2n-1$ άτομα που περισσεύουν συμπληρώνω την ομάδα $\binom{2n-1}{n-1}$

$n\binom{2n-1}{n-1}$ ←

KINO

1 2 3 . . .

- 80 αριθμοί . . . 80
- 20 αριθμοί κληρώνονται
- Παίχτης παίζει 1 έως 12 αριθμούς

πχ. Παίζω 5 αριθμούς
Πιάνω 3 αριθμούς
↳ ×2 λεφτά

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσω αν παίξω 1 νούμερο;

$$\frac{\text{Ευνοϊκά Αποτελέσματα}}{\text{Συνολικά Αποτελέσματα}}$$

Συνολικα Αποτελέσματα $= \binom{80}{20}$
Ευνοϊκά Αποτελέσματα $= \binom{79}{19}$

$$X \underbrace{\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_}_{19 \text{ θέσεις}}$$

$$\frac{\binom{79}{19}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{79!}{19!\,60!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \underbrace{2,5}_{\text{απόδοση}} + \frac{3}{4}\,0 = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$1 - 0.625 = 0.375$$

Αν παίξω 2 νούμερα

- Με τι πιθανότητα πιάνω και τα 2 (τότε βγάζω 5)

Συνολικά αποτελέσματα $\binom{78}{18}$

$$\frac{\binom{78}{18}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{78!}{18!\,60!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{19\cdot 20}{79\cdot 80}$$

$$= \frac{19}{79}\,\frac{1}{4} = 0.0601$$

$$0.0601 \cdot \underbrace{5}_{\text{αποδοση}} = 0.3005$$

Αν πιάσω το 1 από τα 2 παίρνω πίσω τα λεφτά $(\times 1)$

Πόσα συνολικά αποτελέσματα

$$2\cdot\binom{78}{19}$$

Η πιθανότητα

$$\frac{2\binom{78}{19}}{\binom{80}{20}} = 2\,\frac{\frac{78!}{19!\,59!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{2\cdot 20\cdot 60}{79\cdot 80}$$

$$\simeq 0.38$$

Συνολικά

$$6\% \times 5 + 38\% \times 1 = 0.68$$

$$1 - 0.68 = 0.32$$

Γενικότερα η πιθανότητα να πιάνω κ ακριβώς αν έχω παίξει n αριθμούς $1 \le n \le 12$;

$$\boxed{\frac{\binom{80-n}{20-k}\cdot\binom{n}{k}}{\binom{80}{20}}}$$

n katá

$80-n$ katá

$$\underbrace{\overset{k}{\overbrace{\underset{1}{\sqcup}\quad\underset{2}{\sqcup}\ \cdots\ \underset{k}{\sqcup}}}}_{\binom{n}{k}}\ \Bigg|\ \underbrace{\overset{20-k}{\overbrace{\sqcup\ \cdots\qquad\underset{20}{\sqcup}}}}_{\binom{80-n}{20-k}}$$

$\times 2$ $\qquad$ $\times 2$ $\qquad$ $\times 4$

Μονα – Ζυγά – Ισοπαλία

Απο τα 20 11+ μονά

Από τα 20 11+ ζυγά

Από τα 20 10 μονα 10 ζυγά

Με πόσους τρόπους ισοπαλία

Μονά

$$\underbrace{1, 3, 5, 7, \dots, 79}_{40 \text{ νούμερα}}$$

Ζυγά

$$\underbrace{2, 4, 6, 8, \dots, 80}_{40 \text{ νούμερα}}$$

$$\underbrace{\binom{40}{10}}_{10 \text{ μονα}} \cdot \underbrace{\binom{40}{10}}_{10 \text{ ζυγα}}$$

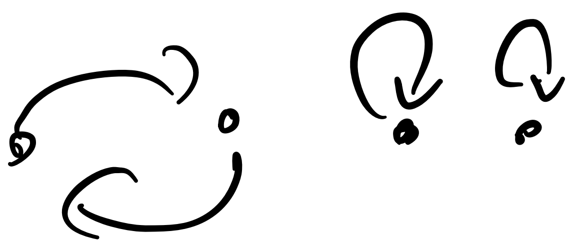
Πιθανότητα ισοπαλίας

$$\frac{\binom{40}{10}^2}{\binom{80}{20}} = 0{,}2032 > 20\%$$

$$20\% \cdot 4 = 0{,}80$$

Πιθανότητα μονά $< \frac{100\% - 20\%}{2} = 40\%$

$$40\% \cdot 2 = 0.8$$



$\frac{1}{4}$

Β	Γ	Δ	Α
Γ	Δ	Α	Β
Δ	Α	Β	Γ
Β	Α	Δ	Γ
Δ	Γ	Β	Α

Γενικευμένες Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Από n αντικείμενα επιλέγω k

πχ. $n = 3$ $\{A, B, C\}$ $k = 2$

Μεταθέσεις		Συνδυασμοί
AB	BA	AB
AC	CA	AC
BC	CB	BC
6 τρόποι		3 τρόποι

Με επανάληψη;

Μεταθέσεις (Μας ενδιαφέρει η σειρά)

AB	BA	AA
AC	CA	BB
BC	CB	CC

9 τρόποι

$$\underbrace{\quad}_{3}\ \underbrace{\quad}_{3} \qquad 3 \times 3 = 9$$

$$\underbrace{\quad}_{n}\ \underbrace{\quad}_{n} \cdots \underbrace{\quad}_{n} = n^k$$

Συνδυασμοί με επανάληψη (Δεν μας απασχολεί η σειρά)

A B	A A
A C	B B
B C	C C

6 τρόποι

$n=3$
$k=3$

A A A
A A B
A A C
A B B
A B C
A C C
B B B
B B C
B C C
C C C

10 τρόποι

Θεώρημα: Οι συνδυασμοί με επανάληψη k στοιχείων από n είναι $\binom{n+k-1}{k}$

$n=3 \quad k=3$

$$\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$n=3 \quad k=2$

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

n αντικείμενα

k θέσεις

$k \times \sqcup$

$(n-1) \times |$

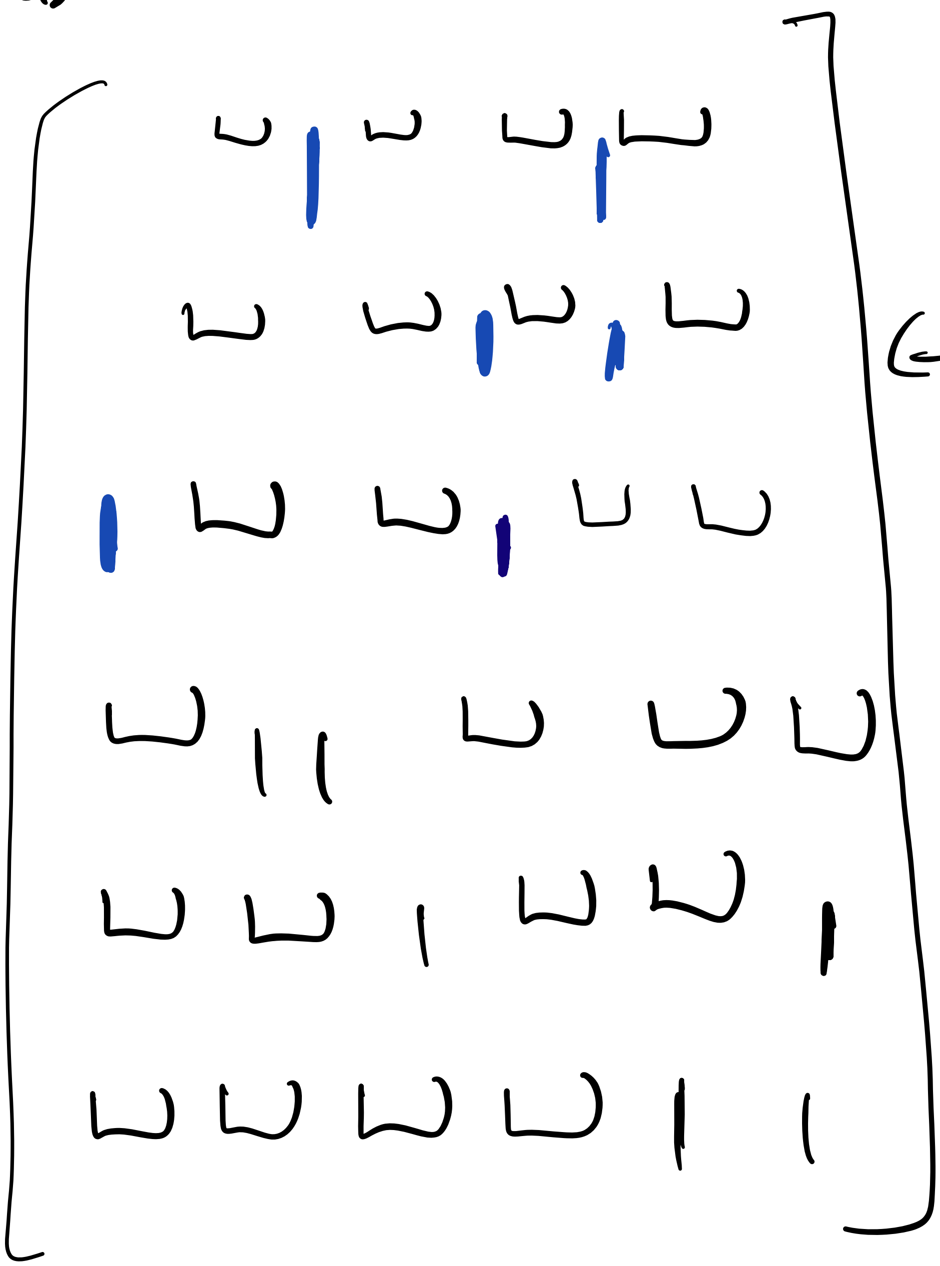
$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

n A B C

αντικείμενα

k θέσεις

$\binom{6}{2}$



$\Leftrightarrow$

ABBC

AABC

BBCC

ACCC

AABB

AAAA

Το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων που μπορώ να διατάξω κ θέσεις ($\sqcup$) και n-1 διαχωριστικά ($|$)

$n=4$ $\kappa=3$ A, B, C, D

$\sqcup\,|\,|\,\sqcup\,|\,\sqcup \longleftrightarrow ACD$

Πόσοι 5-ψήφιοι αριθμοί έχουν τα ψηφία σε μη φθίνουσα διάταξη

πχ.

13599 ✓

11288 ✓

15489 ✗

06889 ✗ 4 ψήφιος

13 5 99

⊔ || ⊔ || ⊔ |||| ⊔ ⊔

$\kappa = 5$ θέσεις

$n = 9$ ψηφία $1 \dots 9$

άρα $n-1$ διαχωριστικά

$$\binom{9-1+5}{5} = \binom{13}{5}$$

⊔	⊔	⊔	⊔	⊔
9	10	10	10	10

10 βιβλία και 3 ράφια

Με πόσους τρόπους μπορούμε
να βάλουμε τα βιβλία
στα ράφια;

- Διαφορετικά ράφια
  Ίδια βιβλία

$$| \circ \; | \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

$$\downarrow$$

$$(0, 1, 9)$$

$$\binom{10+2}{2}$$

1 βιβλίο τουλάχιστον σε κάθε ράφι

7 βιβλία για 3 ράφια

9 θέσεις για 2 διαχωριστικά

$$\binom{9}{2}$$

– Διαφορετικά βιβλία

$$\frac{1\ 3}{2\ 4\ 5\ 6} \qquad \neq \qquad \begin{matrix} 3\ 1 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{matrix}$$
$$7\ 8\ 9\ 10$$

$10!$ $\binom{12}{2}$

- Αν δεν με νοιάζει η σειρά στο ράφι

3^{10}

Αν ξέραμε

3 στο πρώτο
4 στο δεύτερο
3 στο τρίτο

$$\frac{10!}{3!\,4!\,3!} = \binom{10}{3,4,3}$$