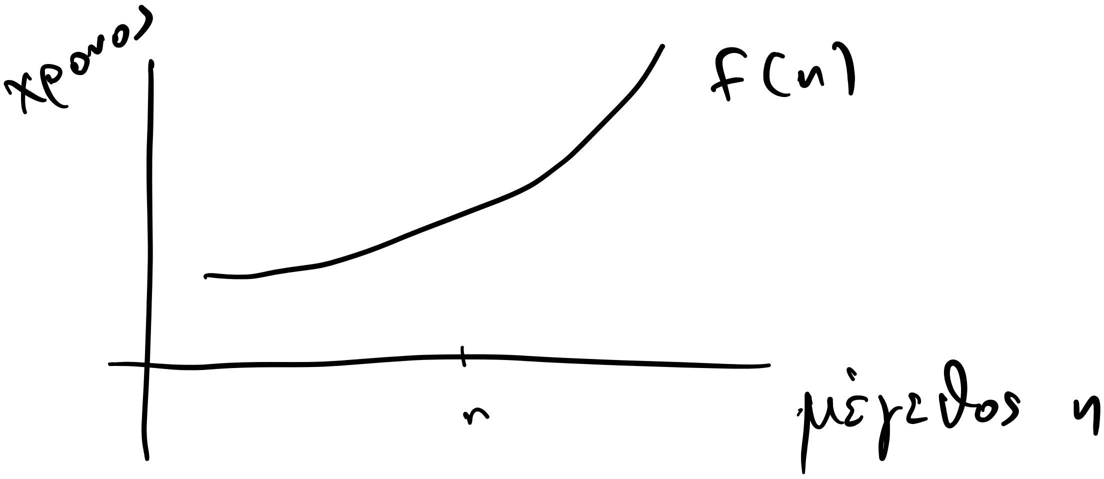
Αλγόριθμοι και Ρυθμός Αύξησης Συναρτήσεων

Αριθμητικές Συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

π.χ. Ο χρόνος εκτέλεσης μιας διεργασίας όταν το μέγεθος εισόδου είναι $n \in \mathbb{N}$




```
For(int i=0; i<n; i++) {
   ...
}
```

n φορές

$f(n) = n$

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=0; j<n; j++) {
        ...
    }
}
```

$\leftarrow n^2$ ops

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i+1; j<n; j++) {
        ...
    }
}
```

$\leftarrow \binom{n}{2}$ ops

Αναζήτηση

- Εύρεση ενός αριθμού μέσα σε ένα πίνακα

[1, 3, 7, 5, 4, 8, 2]

Να βρω το 4

Γραμμική αναζήτηση

Στη χειρότερη περίπτωση χρειάζεται να εξετάσουμε n στοιχεία

$$f(n) = n$$

- Εύρεση ενός αριθμού σε ένα ταξινομημένο πίνακα

[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8]

Βρες το 5

Κοιτάω το 4 : $4 < 5$

άρα $[5, 7, 8]$

Κοιτάω το 7 : $7 > 5$

άρα $[5]$

Κοιτάω το 5 : $5 = 5$

τέλος

Δυαδική αναζήτηση

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 1 + f(n/2) \\
&= 2 + f(n/4) \\
&= 3 + f(n/8) \\
&= i + f(n/2^i) \\
&\dots \\
&= \underbrace{\log_2 n} + f(1) = \log_2 n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{2^i \geq n \Rightarrow i \geq \log_2 n}$$

Γραμμική αναζήτηση — Δυαδική αναζήτηση

$n = 10^6 \rightarrow \log_2 n \simeq 20$

$10^9 \rightarrow \log_2 n \simeq 30$

Με μία πράξη $f(n) = 1$

Αν έχω

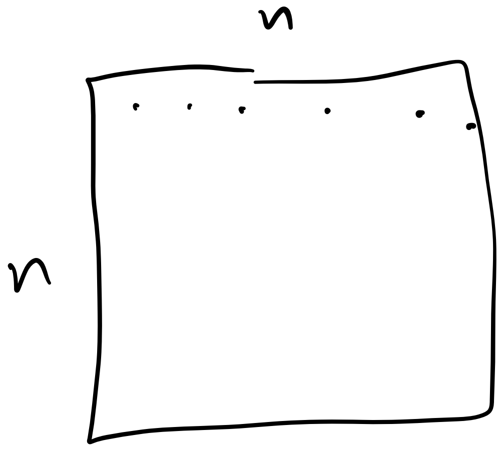
Για κάθε αριθμό x στη θέση i

$Index[x] = i$

Αν ψάχνω το 4

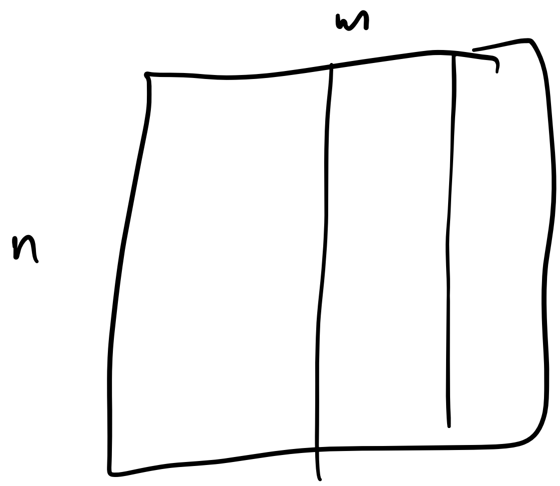
$Index[4]$

Όλοι οι δάμνοι



$f(n) = n^2$

Δυαδική Αναζήτηση στις στήλες



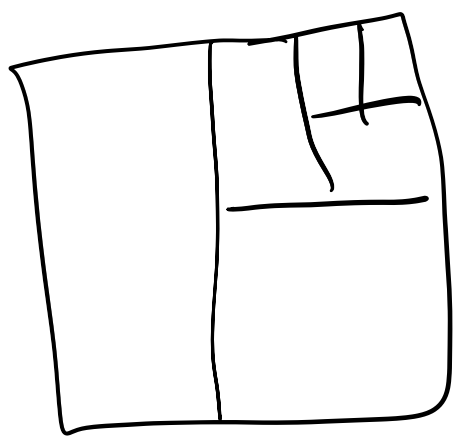
$f(n,m) = n + f(n, m/2)$

$= \dots$

$= n \log_2 m$

Αν $n = m$

$f(n) = n \log_2 n$



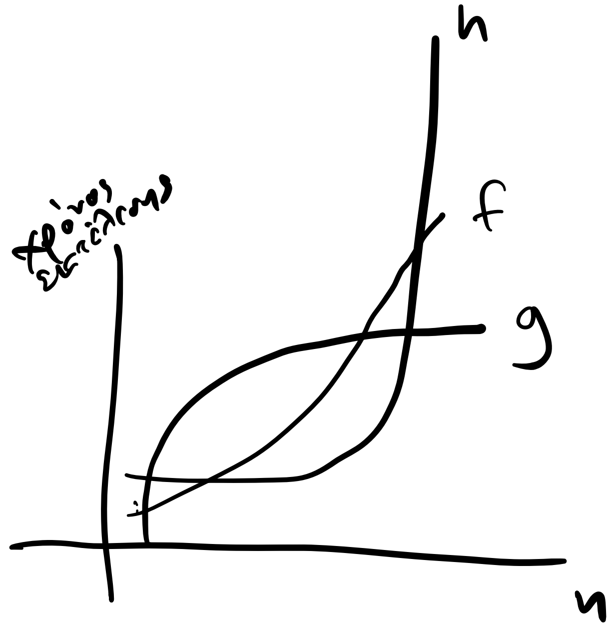
$f(n,n) = n + \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

$f(n) = 1.5n + f\left(\frac{n}{2}\right)$

$= 1.5\,(1 + 2 + 4 + 8 + \dots n)$

$\simeq 1.5 \quad 2n = 3n$

Αριθμητική Συνάρτηση



- $f(n) = n^2$
- $g(n) = 3\log_2(n)$
- $h(n) = 3^n$

Ορισμός

Έστω f και g αριθμητικές συναρτήσεις με θετικές τιμές. Λέμε ότι

$$\boxed{f(n) = O(g(n))}$$

"big-O"

Αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$

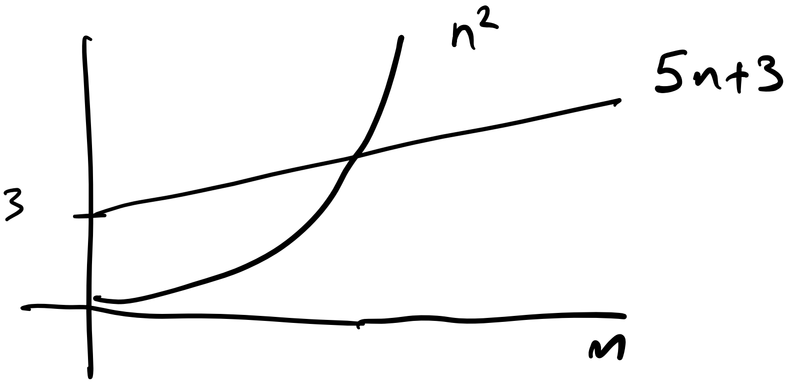
Ανισότητα

$f \le g$

Διαφορετικά Υπάρχει n_0, και c σταθερά τ.ω. $f(n) \le c \cdot g(n)$ $\forall n \ge n_0$

π.χ. $f(n) = 5n+3$

$g(n) = n^2$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n^2} = 0$$

Άρα $f(n) = O(g(n))$

- $f(n) = 5n+3$

  $g(n) = n$

$f(n) \leq 10\,g(n) \quad \forall n \geq 1$

$f(n) = O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5 < +\infty$$ αλλά και $g(n) = O(f(n))$

$n = O(5n+3)$

$5n+3 = O(n)$

$O(n)$ $\Theta(n)$

$$\boxed{\begin{matrix}\sqrt{n}\\ 100\sqrt{n}\end{matrix}} < \underbrace{\boxed{\begin{matrix}5n+3\\ n\end{matrix}} < \boxed{\begin{matrix}n^2\\ 8n^2\end{matrix}}}_{\Omega(n)}$$

Δεν γράφουμε $\underbrace{5n+3} < \underbrace{n^2}$ ✗

αλλά $5n+3 = O(n^2)$

$\rightarrow 5n+3 \in O(n^2)$

- $f(n) = n$
  $g(n) = 100\sqrt{n}$

$$100\sqrt{n} = O(n)$$

γιατί $100\sqrt{n} \leq n$

$$\forall n \geq 100^2$$

Αν $f(n) = O(g(n))$
$g(n) = O(f(n))$

τότε $f(n) = \Theta(g(n))$

(σημαίνει ότι $f(n) \simeq g(n)$)

$$5n+3 = \Theta(n)$$

Το τεστ του ορίου

$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ τότε $f(n) = O(g(n))$

Απόδειξη

Έστω $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \,, \; \exists n_0 :$

$n > n_0$

$$\frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$$

Άρα $\quad f(n) < (c+\varepsilon)\, g(n) \quad$ για $n > n_0$

Για $\varepsilon = 1 \quad f(n) < \underbrace{(c+1)}_{\text{σταθερά } c'} g(n) \quad$ για $n > n_0$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$

$g(n) = n$

$$\frac{1}{n} + 7 \leq n \qquad \forall\, n \geq 8$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+7}{n} = 0 < \infty$$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$ $\qquad f(n) \overset{?}{=} O(1)$
  $g(n) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 7 < +\infty$$

$$\frac{1}{n} + 7 \leq 8 \cdot 1 \qquad \forall n \geq 1$$

àpa $\qquad f(n) = O(1)$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$ $\qquad f(n) \overset{?}{=} O(g(n))$
  $g(n) = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+7}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+1}{1}$$

$$= +\infty$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(n)$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(1)$$

$$\frac{1}{n} + 7 \neq O\left(\frac{1}{n}\right) \implies \frac{1}{n} + 7 = \Theta(1)$$

ισχύει επίσης

$$1 = O\left(\frac{1}{n} + 7\right)$$

Αν ισχύει $f(n) = O(g(n))$

και $g(n) = O(f(n))$

τότε $f(n) = \Theta(g(n))$

και $g(n) = \Theta(f(n))$

Αν ισχύει $f(n) = O(g(n))$
τότε $g(n) = \Omega(f(n))$

$\leq$	O
$=$	Θ
$\geq$	Ω
$<$	o
$>$	ω

Κατηγορίες συναρτήσεων

- Πολυωνυμικές

$$f(n) = 5n^3 + 2n^4 + 3n = O(n^4)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 + 2n^4 + 3n}{n^4} = 2 < \infty$$

Επίσης

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^4}{5n^3 + 2n^4 + 3n} = \frac{1}{2} < \infty$$

Γενικά αν έχω μια συνάρτηση
$f(n) = O(n^k)$ για σταθερό k
αυτή η συνάρτηση λέγεται πολυωνυμική

π.χ. $2n^3 + \eta\mu(n) = \Theta(n^3)$

π.χ. $f(n) = 5n^{1/3} + \sqrt{n} + n^{1.2} = \Theta(n^{1.2})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(5n^{1/3-1} + n^{1/2-1} + n^{0.2}\right)$$

$$= +\infty$$

- Εκθετικές $f(n) = a^n$ για σταθερό a

$\forall\ a > 1$ και k σταθερό
$n^k = O(a^n)$

Απόδειξη για ακέραιο κ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\kappa}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\kappa)'}{(a^n)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa n^{\kappa-1}}{a^n \ln a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(\kappa-1) n^{\kappa-2}}{a^n \ln^2 a}$$

$$\dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa!}{a^n \ln^\kappa a} = 0$$

Πολυωνυμικά $<$ Εκθετικά

Ποιο είναι μεγαλύτερο

$$\underset{8^n}{\overset{\shortparallel}{2^{3n}}} \quad ή \quad \underset{9^n}{\overset{\shortparallel}{3^{2n}}}$$

$\Rightarrow$ Ισχύει ότι $2^{3n} = O(3^{2n})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Αντίθετα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n = +\infty$$

$8^n = o(9^n)$

σημαίνει ότι $8^n = O(9^n)$

αλλά όχι $8^n = \Theta(9^n)$

o $n^{100} 8^n$

$9^n = 8^n \cdot a^n$

για $a = \frac{9}{8}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100} 8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{\left(\frac{9}{8}\right)^n} = 0$$

Γενικά αν $a(n) = O(b(n))$

$c(n) = O(d(n))$

τότε $a(n)c(n) = O(b(n)d(n))$

Λογάριθμοι

$f(n) = \log_b(n)$ όπου $b>1$ σταθερά

Για κάθε $b, b' > 1$

$$\log_b(n) = O(\log_{b'}(n))$$

$$\log_b(n) = \frac{\ln n}{\ln b} = \frac{\ln b'}{\ln b} \frac{\ln n}{\ln b'}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln b'}{\ln b}}_{= c \text{ σταθερά}} \log_{b'}(n)$$

Άρα $\log_b(n) = O(\log n)$

Λογαριθμικές $<$ Πολυωνυμικές

Για κάθε $a, b > 0$

$$(\log_2 n)^{a} = O(n^b)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)^a}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)^a}{(2^{\log_2 n})^b}$$

Θέτω $m = \log_2 n$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m^a}{2^{mb}}$$

$$= 0$$

$\frac{\text{Πολυωνυμική}}{\text{εκθετική}}$

3^n $\quad n2^n \quad \sqrt{n} \quad n \quad \frac{2^n}{n} \quad n\log n \quad 1.7^n \quad \frac{n}{\log_2 n} \quad 2^n$

$$\sqrt{n} < \frac{n}{\log n} < n < n\log n < 1.7^n < \frac{2^n}{n} < 2^n < n2^n < 3^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n^b \log^c n}{a'^n \cdot n^{b'} \log^{c'} n} < +\infty$$

Αν $a < a'$ ✓

Αν $a = a'$ και $b < b'$ ✓

Αν $a = a'$ και $b = b'$ και $c \le c'$ ✓

$$n^5 \log n + n^4 \log^2 n + n^3 = \Theta(n^5 \log n)$$

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \Theta(n^2)$

  $= \frac{n(n+1)}{2}$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{n}$

  $= n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{\Theta(\log n)} = \Theta(n \log n)$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$

  $= \Theta(n)$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq$

$n \cdot n \cdot n \cdots n = O(n^n)$

$O(2^{n \log_2 n})$

$n! \geq \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}}_{n/2 \text{ copis}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \Omega\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\right)$

$$n! \simeq \underbrace{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}_{\text{stirling}} = \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Για κάθε $a>1$ $\quad a^n = O(n!)$

$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ άρα για $n > e\cdot a$

$n! \geq a^n$

Λογάριθμοι	Πολυωνυμικές	Εκθετικές	Παραγοντικά
$\log n$ $\log^2 n$	n $n\log n$ n^2 n^3	2^n 5^n	$n!$

$$\log(n!) \leq$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n$$

$$\underbrace{\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \le \log(n!) \le n\log n}_{\Theta(n\log n)}$$

$$(\log n)! = (\log n)^{\log n} = \left(2^{\log\log n}\right)^{\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{\log\log n} = n^{\log\log n}$$

Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$ με σταθερό k

υποσύνολα μεγέθους k

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$$

$$\binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \Omega(n^k)$$

Υποσύνολα που έχουν ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε group

$$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$$

$$\binom{n}{n/2} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n} = c\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}$$