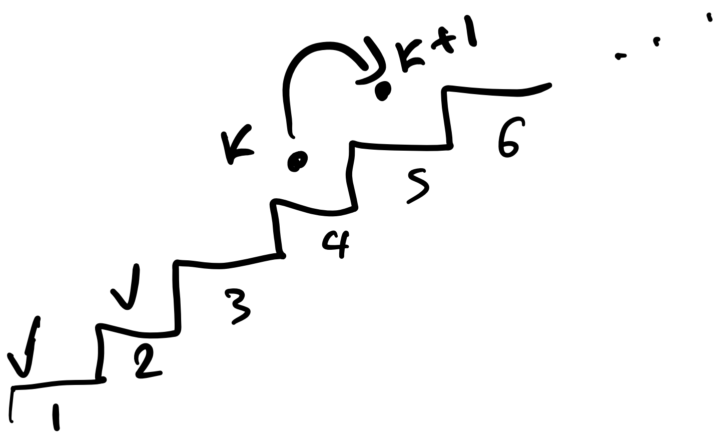
Επαγωγή

$\forall\ n \geq n_0 \ : \ P(n)$] απόδειξη αυτής της μορφής

Αρκει να δείξουμε:

- Βάση της επαγωγής : $P(n_0)$
- Επαγωγική Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει για $n=k$
- Επαγωγικό Βήμα : Δείχνω ότι ισχύει για $n=k+1$

$$P(n_0) \wedge \left(\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1) \right)$$
$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : P(n)$$



$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3)$$
$$\Rightarrow P(4) \Rightarrow \ldots$$

Παράδειγμα 1

Ν.δ.ο. $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Απόδειξη:

$P(n)$ είναι η πρόταση $\sum_{i=1}^{n} i \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$

Βάση: $P(1)$ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

$P(2)$ $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ ✓

Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει $P(k)$

Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + k+1 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

από επαγωγική υπόθεση

Άρα αρκεί να δείξω ότι $\frac{k(k+1)}{2} + k+1$ είναι ίσο με $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ✓

Άρα ισχύει η $P(k+1)$

Επομένως λειτουργεί η επαγωγή και

ισχύει η $P(n)$ $\forall\ n \geq 1$ $\blacksquare$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε και να αποδείξετε κλειστό τύπο για το άθροισμα

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$$

Απόδειξη

Για

$$
\begin{array}{lcll}
n=1 & \to & 1 & = 1^2 \\
n=2 & \to & 4 & = 2^2 \\
n=3 & \to & 9 & = 3^2 \\
n=4 & \to & 16 & = 4^2 \\
n=5 & \to & 25 & = 5^2
\end{array}
$$

$$P(n):\quad 1+3+5\ldots+(2n-1) = n^2$$

Βάση : $P(1), P(2), \dots, P(5)$

Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει για $n=k$ η $P(k)$

Βήμα : Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

Ξέρω ότι

$$\underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)} = \underbrace{k^2}$$

Αν προσθέσω $(2(k+1)-1) = (2k+1)$

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = \overbrace{k^2+(2k+1)}$$
$$= (k+1)^2$$

Άρα ισχύει η $P(k+1)$ $\square$

$$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$$
$$= (k+2)^2$$

Ν.δ.ο. $1+2+4+8+\dots 2^{n-1}=2^n-1$

Βάση: $n=1$ $\qquad 1 = 2^1-1$ ✓

$n=2$ $\qquad 1+2 = 2^2-1$ ✓

Υπόθεση: Έστω ότι

$$1+2+4+\dots+2^{k-1}=2^k-1$$

Βήμα: Θα δείξω ότι

$$\underbrace{1+2+4+\dots+2^{k-1}}_{\overset{\parallel}{2^k-1}}+2^k \overset{?}{=} 2^{k+1}-1$$

από υπόθεση

Άρα αρκεί να δείξω

$$2^k-1+2^k = 2^{k+1}-1$$

$$2\cdot 2^k-1 = 2^{k+1}-1$$

✓

Γενικότερα $\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

Παράδειγμα 4

Ν.δ.ο. $n < 2^n$ για κάθε θετικό ακέραιο

Βάση : $n=1$ $\quad 1 < 2^1 = 2$

$n=2$ $\quad 2 < 2^2 = 4$

Υπόθεση : Έστω ότι $k < 2^k$

Βήμα : Θ.δ.ο. $k+1 < 2^{k+1}$

Ξέρω $k < 2^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad k+1 &< 2^k + 1 \\ &\leq 2^k + 2^k \quad \text{γιατί } 2^k \geq 1 \text{ αν } k \geq 0 \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα

αρμονικοί αριθμοί

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$H_m \simeq \log_2 m \qquad\qquad H_m = \Theta(\log m)$$

- $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$
- $H_{2^n} \leq 1 + n$

Ν.δ.ο. $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \geq 0$

Βάση $n = 0$ $\quad H_{2^0} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$

$n = 1$ $\quad H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$

Υπόθεση Έστω $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$

Βήμα Θ.δ.ο. $H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$

$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}}^{2^k \text{ όροι}}}_{= H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}}^{2^{k+1} \text{ όροι}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

Άρα $H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$ $\square$

Ν.δ.ο. $H_{2^n} \leq 1 + n$ $\forall n \geq 0$

Βάση $n = 0$ $H_{2^0} = 1 \leq 1 + 0$

$n = 1$ $H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + 1 = 2$

Υπόθεση Έστω $H_{2^k} \leq 1 + k$

Βήμα Θ.δ.ο. $H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$

$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}}^{2^k \text{ όροι}}}_{H_{2^k} \leq 1 + k} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}}^{2^{k+1} \text{ όροι}}$$

$$\leq 1 + k + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

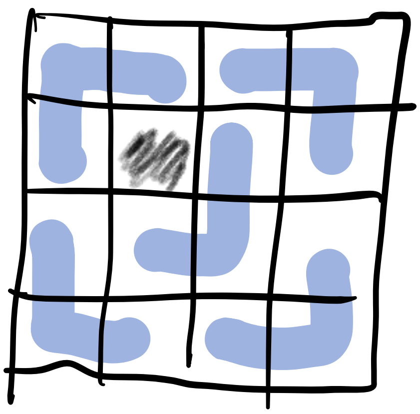
$$\leq 1 + k + 2^k \frac{1}{2^k} = 1 + k + 1 = 1 + (k+1)$$

Άρα $H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$ $\square$

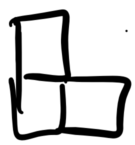
Τριόμινο στη σκακιέρα

4

4

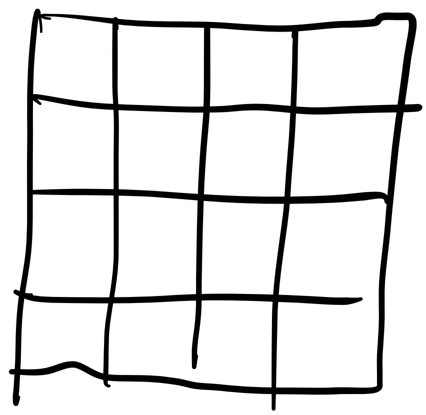


Τριόμινο



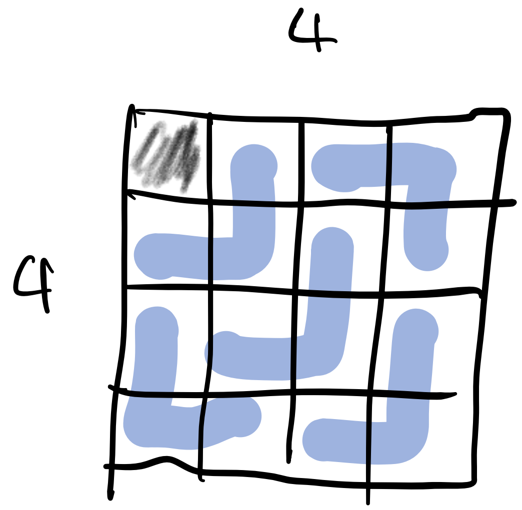
4

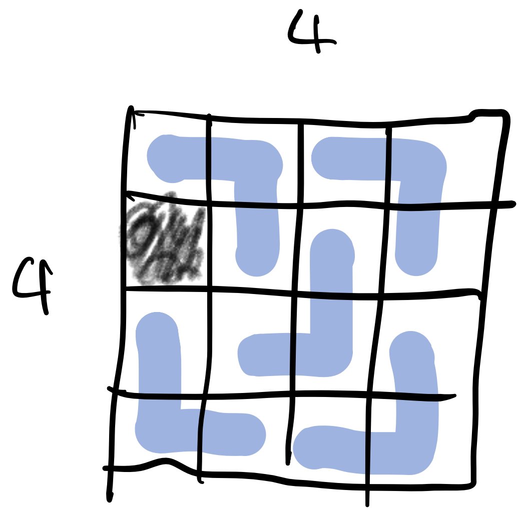
4



Μπορώ να καλύψω τη σκακιέρα;

Όχι γιατί έχω 16 κουτιά και κάθε τριόμινο καλύπτει 3
Αλλά το 16 δεν είναι πολ/σιο του 3



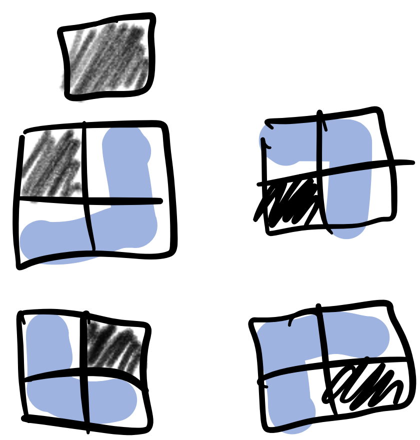


Ν.δ.ο. κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα που της λείπει 1 κουτάκι καλύπτεται με τριόμινο. $\Big]\ P(n)$

Απόδειξη με επαγωγή

Βάση $n=0$

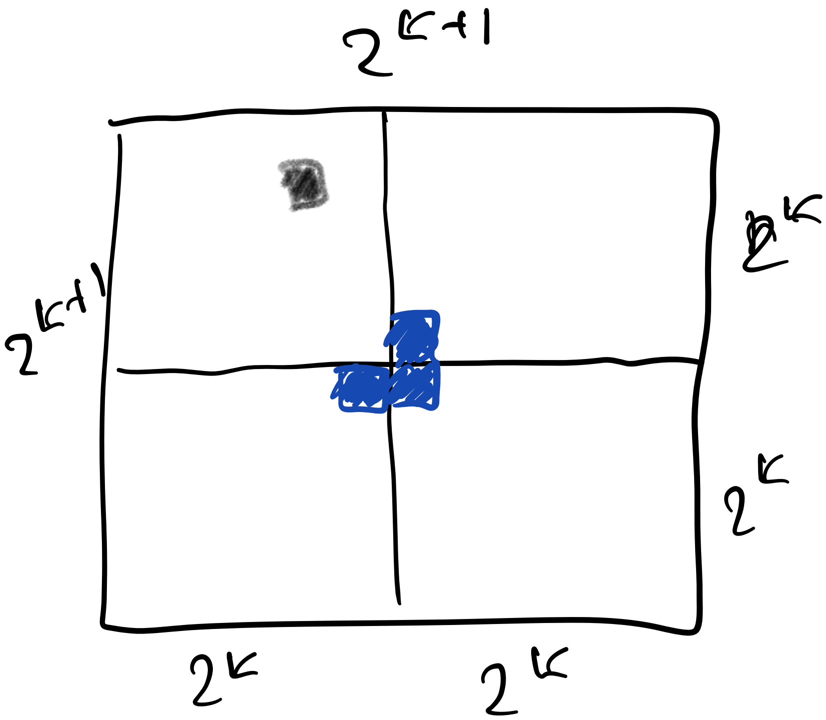
$n=1$



Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει η $P(k)$

Βήμα : $n = k+1$

Θα δείξω ότι η $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ καλύπτεται όποιο κοντάκι και να λείπει.



– Σπάω την $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα σε 4 $2^k \times 2^k$

– Καλύπτω τη σκακιέρα που έχει το κενό από Επαγ. Υπόθεση

- Για τις υπόλοιπες 3 τις καλύπτω ολόκληρες λίρα από το κεντρικό κομμάτι

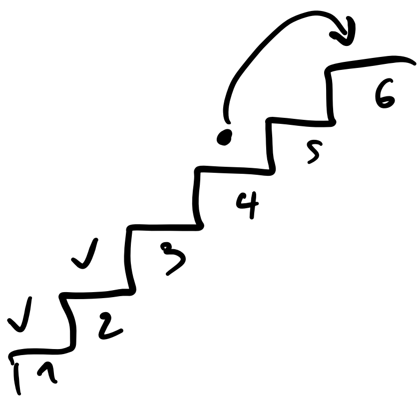
- Μένουν 3 ακάλυπτα κουτάκια στο κέντρο και τα καλύπτω με 1 τριόμινο

$\square$

Ισχυρή Επαγωγή

Βάση : $P(n_0)$
Υπόθεση : Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n_0 \leq n \leq k$
Βήμα : $P(n)$ για $k+1$

Παράδειγμα



Έχω μια σκάλα και ξέρω ότι μπορώ να ανέβω το σκαλί 1 και 2.
Επίσης ξέρω ότι αν έχω φτάσει στο k μπορώ να φτάσω στο $k+2$.

Ν.δ.ο. μπορώ να φτάσω σε κάθε σκαλί $n \geq 1$

Απόδειξη

Βαση : φτάνω στο 1

στο 2

Υπόθεση : Υποθέτω ότι για κάθε $1 \le n \le k$ μπορώ να φτάσω στο σκαλί n

Βήμα : Θα δείξω ότι μπορώ να φτάνω στο $k+1$ (για $k \geq 2$)

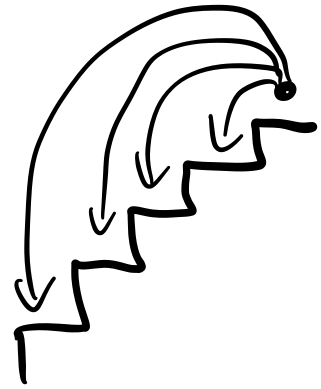
Απο Ε.Υ. φτάνω στο $k-1$ γιατί $1 \le k-1 \le k$ άρα μπορώ να φτάσω και στο $(k-1)+2 = k+1$ γιατί ανεβαίνω 2-2 τα σκαλιά $\square$

Αν $P(n_0)$ ισχύει

και για κάθε $n \geq n_0$

$$P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

τότε $\forall n \geq n_0 : P(n)$



Ν.δ.ο. Κάθε αριθμός $n \geq 2$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων αριθμών.

π.χ.

$$7 = 7$$
$$14 = 2 \cdot 7$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Βάση: Για $n=2$ γίνεται γιατί 2 πρώτος
Υπόθεση: Ισχύει για $2 \leq n \leq k$
Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει για $k+1$
$k+1$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

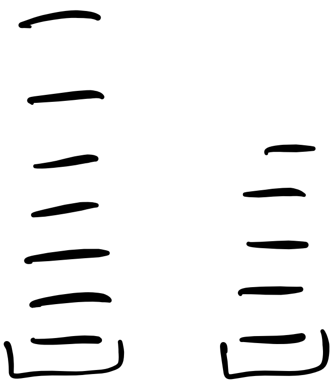
Αν $k+1$ είναι πρώτος ✓
Διαφορετικά
$k+1 = a \cdot b$ όπου $1 < a, b < k+1$
άρα $2 \leq a, b \leq k$

Από επαγωγική υπόθεση
ο a και ο b γράφονται
σαν γινόμενα πρώτων
άρα και το γινόμενο τους
είναι γινόμενο πρώτων $\square$

π.χ. $24 = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2 \cdot 2}}{4} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 2 \cdot 3}}{6} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Παράδειγμα

Το παιχνίδι Nim



A B

- Δύο παίχτες
- Δυο στήλες A, B με σπίρτα n_A, n_B
- Σε κάθε γύρο επιλέγει ο παίχτης μια στήλη και αφαιρεί όσα σπίρτα θέλει (τουλάχιστον 1)
- Χάνει όποιος δεν μπορεί να πάρει σπίρτο

$$\begin{array}{cc} 7 & 5 \\ \downarrow & \\ 4 & 5 \\ \downarrow & \\ 4 & 1 \\ \downarrow & \\ 4 & 0 \\ \downarrow & \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$(7\ \ 5) \downarrow (7\ \ 2) \downarrow (2\ \ 2) \downarrow (2\ \ \emptyset) \rightarrow (\emptyset, \emptyset) \downarrow$$

$(1,0) \to (0,0)$

N.δ.ο. Αν $n_A = n_B = n$ τότε ο 2ος παίχτης έχει στρατηγική νίκης.

Βάση : $n=0$ ο πρώτος χάνει

Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει για $0 \leq n \leq k$

Δηλαδή ο 2ος κερδίζει αν οι 2 στήλες έχουν τον ίδιο αριθμό σπίρτων και το πολύ k

Βήμα : Θα δείξω ότι ο 2ος κερδίζει στο $(k+1, k+1)$

Ο πρώτος παίρνει απο μια στήλη $1 \leq a \leq k+1$

↳ $(k+1-a, k+1)$

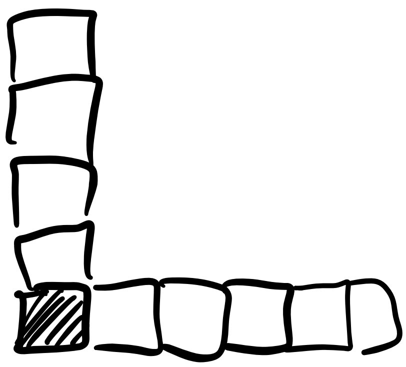
τότε ο 2ος

↳ $(k+1-a, k+1-a)$

Αλλα $0 \le (k+1-a) \le k$ άρα

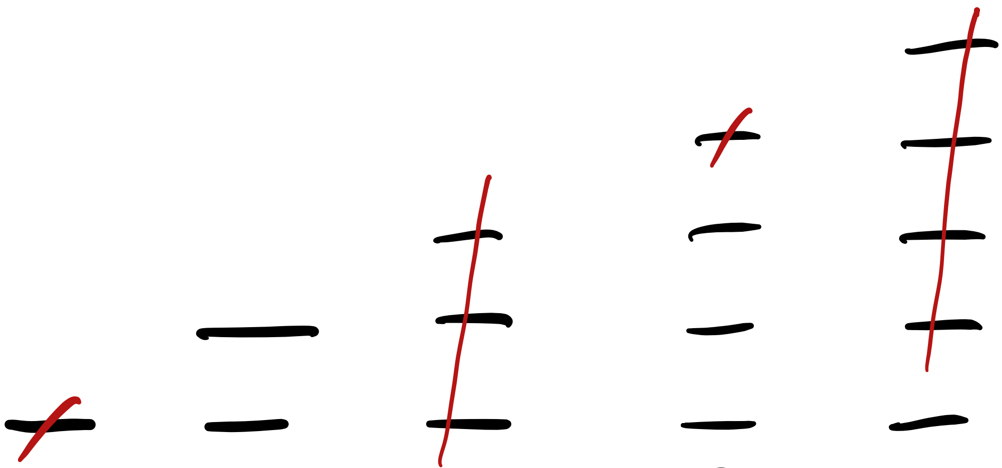
απο Ε.Υ. ο 2ος κερδίζει □

A



B

Παιχνίδι σοκολάτας



Επιλέγω μια στοίβα και παίρνω όσα θέλω

A	B	C	D	E
0	2	0	3	1
↓	↓	↓	↓	↓
000	010	000	011	001

Χάνω αν το xor των αριθμών είναι 0.

~~001~~	~~1~~
010	2
011	3
100	4
101	5

$$\begin{array}{r} 010 \\ 011 \\ \oplus\ 001 \\ \hline 000 \end{array}$$

Άσκηση: Fibonacci

$f_0 = 1$
$f_1 = 1$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Να εξετάσετε αν το f_n είναι άρτιος ή περιττός, να βρείτε γενικό κανόνα και να τον δείξετε με επαγωγή

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_n =$	1	1	2	3	5	8	13	21
	περιττός	περιττός	άρτιος	περιττά	περιττός	άρτιος	περιττός	περιττός

P(n)

$\boxed{\text{Αν το } n \bmod 3 = 2 \text{ είναι άρτιος αλλιώς περιττός } (n+1 \text{ πολ/σιο του } 3)}$

Βάση: αν $n \leq 7$ ισχύει
Υπόθεση: Ισχύει για $0 \leq n \leq K$

Βήμα: Θ.δ.ο. ισχύει για $n=k+1$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Περιπτώσεις

Α— $n \bmod 3 = 0 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 2$
$(n-2) \bmod 3 = 1$

Β— $n \bmod 3 = 1 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 0$
$(n-2) \bmod 3 = 2$

Γ— $n \bmod 3 = 2 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 1$
$(n-2) \bmod 3 = 0$

Από ΕΥ

Α) f_{n-1} άρτιος
f_{n-2} περιττός

άρτιος + περιττός = περιττός ✓
f_n περιττός

B) f_{n-1} περιττός
f_{n-2} άρτιος

περιττός + άρτιος = περιττός ✓
f_n περιττός

Γ) f_{n-1} περιττός
f_{n-2} περιττός

περιττός + περιττός = άρτιος ✓
f_n άρτιος

Β

Άσκηση: Γραμματόσημα αξίας 4 και 5 ευρώ
Ποια ποσά μπορώ να σχηματίσω;

$4\alpha + 5\beta$ με ακέραια $0 \leq \alpha, \beta$

P(n) Μπορώ να φτιάξω κάθε ποσό n εκτός αν $n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$

Απόδειξη

$4 = 4$
$5 = 5$
$8 = 4 + 4$
$9 = 4 + 5$
$10 = 5 + 5$

$12 = 4+4+4$
$13 = 4+4+5$
$14 = 4+5+5$
$15 = 5+5+5$
$16 = 4+4+4+4$

Βάση : Η $P(n)$ ισχύει για $n=1 \dots 16$

Υπόθεση : Η $P(n)$ ισχύει για κάθε $1 \leq n \leq \kappa$

Βήμα : Θ.δ.ο $P(n)$ ισχύει για $n=\kappa+1$

$n \geq 16$

Δηλαδή ότι το n γράφεται σαν $n=4a+5b$

$$n = \underbrace{\kappa}_{\text{φτιάχνεται από ΕΥ}} + \underbrace{1}_{\text{όχι}}$$

$$= (\kappa-3) + 4$$

$$11 < \kappa - 3 \leq \kappa$$

άρα γράφεται σαν

$$\kappa - 3 = 4\alpha + 5\beta$$

τότε $$n = 4(\alpha + 1) + 5\beta$$

Ιδιότητα της καλής διάταξης

Κάθε υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

Αν $n \geq 16$ τότε το n γράφεται σαν $4a+5b$

Με άτοπο

Έστω το μικρότερο n που δεν γράφεται

Τότε πρέπει και $n-4$ και $n-5$ να μην γράφονται

Αν το $n \geq 20$ άτοπο γιατί το n το n δεν είναι το μικρότερο που δεν γράφεται

Αλλά αν το $n \in [16, 19]$ άτοπο γιατί το 12, 13, 14 φτιάχνονται.