Υπολογιστική Γεωμετρία

1ο Μέρος (α): Κυρτότητα στο επίπεδο

Γιάννης Εμίρης

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ
Ερευνητικό Κέντρο Αθηνά

Εαρ. 2024

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικά

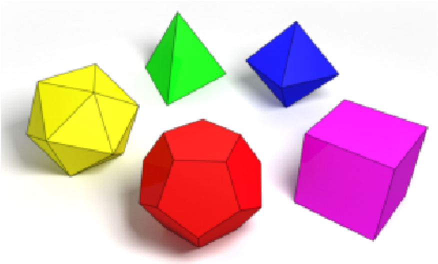
2 Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
- Ορισμός ΚΠ2
- Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
- Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
- Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Κυρτά σύνολα

Γιατί τα κυρτά σύνολα;

Διότι μπορούμε!
Η απλούστερη γενίκευση των γραμμικών συνόλων που περιλαμβάνει σημαντικά προβλήματα και εφαρμογές:
– βελτιστοποίηση σε κυρτά σύνολα (γραμμικός προγραμματισμός)
– αναπαράσταση πολύπλοκων αντικειμένων

Platonic Solids



Υπολογιστικό μοντέλο

Πραγματική (real) RAM (Random Access Machine):

- Ακριβής αναπαράσταση, αποθήκευση πραγματικών σε χώρο $O(1)$
- Μοναδιαίος χρόνος για προσπέλαση μνήμης.
- Μοναδιαίος χρόνος, απόλυτη ακρίβεια για βασικές πράξεις στο $\mathbb{R}$

Μια ικανοποιητική υλοποίηση του μοντέλου είναι η βιβλιοθήκη CGAL.

Outline

1. Εισαγωγικά

2. Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
   - Ορισμός ΚΠ2
   - Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
   - Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
   - Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

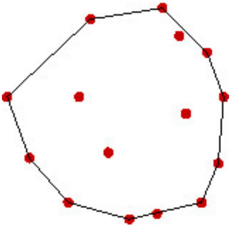
Κυρτό σύνολο

Ορισμός (Κυρτότητα)

Το σύνολο S είναι κυρτό (convex) ανν $a, b \in S \Rightarrow$ το ευθύγραμμο τμήμα $(a, b) \subset S$.

Ασκηση (Ορατότητα)

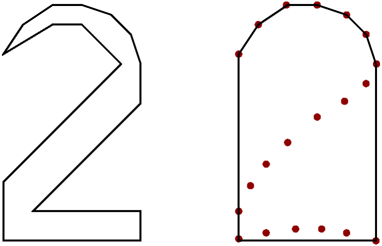
Ισοδύναμα, το S είναι κυρτό ανν $\forall$ σημείο $p \in S$ «φαίνονται» όλα τα σημεία του S, δηλ. συνδέονται με το p με ευθύγραμμο τμήμα εντός του S.



Κυρτό Περίβλημα σε 2 διαστάσεις

Ορισμός (ΚΠ2)

- n σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο $\mathbb{R}^2$.
- Το κυρτό περίβλημα (ΚΠ) συνόλου σημείων είναι το μικρότερο (ως προς επιφάνεια, ως προς περίμετρο, ή ως σημειοσύνολο: άσκηση) κυρτό σύνολο (πολύγωνο), το οποίο περιλαμβάνει όλα τα A_i.



Μη κυρτό πολύγωνο και κατασκευή ΚΠ σημείων στο επίπεδο.

Συνδυασμοί σημείων

Παρατήρηση

Συχνά θα ταυτίζουμε ένα σημείο A με το διάνυσμα $(0, A)$, το οποίο δεν είναι «ελεύθερο», δε μετακινείται στον χώρο.

Ορισμός (Συνδυασμοί σημείων/διανυσμάτων A_i)

- Γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Θετικός (κωνικός) συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \lambda_i \geq 0$.
- Αφινικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \sum_i \lambda_i = 1$.
- Κυρτός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \sum_i \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0$.

Παραδείγματα στην επόμενη σελίδα.

Συνδυασμοί σημείων: παράδειγμα

Παράδειγμα (Συνδυασμοί)

Εστω τα $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$ γραμμικώς ανεξάρτητα:

- Γραμμικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \lambda_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
- Θετικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2,\ \lambda_i \geq 0\} =$ κώνος των A_1, A_2, κορυφή $(0,0)$
- Αφινικός συνδυασμός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} =$ ευθεία που περνά από τα A_1, A_2.
- Κυρτός συνδυασμός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_i \geq 0\} =$ ευθύγραμμο τμήμα (A_1, A_2).

Παρατήρηση

Εστω αφινικός συνδυασμός των $A_1, \ldots, A_n$ το σημείο

$$P = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Ισοδύναμα

$$P = A_n + \lambda_1 (A_1 - A_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(A_{n-1} - A_n),$$

για οποιαδήποτε $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε το A_n ως αρχή των αξόνων $A_n = 0$ τότε το P είναι γραμμικός συνδυασμός των $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Ιδιότητες ΚΠ

Πόρισμα

- *Οι κορυφές* $P_1, \ldots, P_k$ *του ΚΠ ανήκουν στην είσοδο* $A_1, \ldots, A_n$.
- *Τα σημεία του ΚΠ είναι κυρτοί συνδυασμοί των κορυφών:* $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$, *άρα και των* A_i.
- *Κάθε κυρτός συνδυασμός των* P_i, *ή των* A_i, *ανήκει στο ΚΠ.*

Πρόταση (Καραθεοδωρής)

Κάθε σημείο του ΚΠ είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων 3 κορυφών: $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$.

Τομή ημιεπιπέδων

Μια ισοδύναμη αναπαράσταση κυρτού πολυγώνου P με k ακμές είναι ως η τομή k ημιεπιπέδων

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i,$$

όπου H_i το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία της ακμής i και περιέχει τις υπόλοιπες ακμές.

Αντίστροφα, κάθε τομή πεπερασμένου πλήθους ημιεπιπέδων είναι ένα φραγμένο κυρτό πολύγωνο ή μια μη-φραγμένη κυρτή πολυγωνική περιοχή.

Outline

1 Εισαγωγικά

2 Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
- Ορισμός ΚΠ2
- Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
- Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
- Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.

Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.
- Το κατηγόρημα προσανατολισμού (orientation) έχει ως όρισμα 3 σημεία $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.

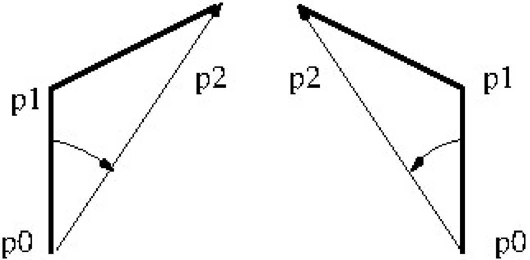
Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.
- Το κατηγόρημα προσανατολισμού (orientation) έχει ως όρισμα 3 σημεία $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.
- Αποφασίζει αν τα διανύσματα $v_1 = (p_0, p_1)$, $v_2 = (p_0, p_2)$ ορίζουν θετική ή αρνητική στροφή (Κανόνας Δεξιού Χεριού).

Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

Διανύσματα $v_i = (p_0, p_i)$, η στροφή τους είναι

- Αρνητική ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη < 0 (ClockWise, CW).
- Θετική ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη > 0 (CounterClockWise).
- Μη ορισμένη ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη $= 0$ (3 συνευθειακά p_i δηλ. παράλληλα v_i).



Υπολογισμός CCW

Λήμμα

Το CCW των $p_i = (x_i, y_i)$ ανάγεται σε πρόσημο ορίζουσας:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός CCW

Λήμμα

Το CCW των $p_i = (x_i, y_i)$ ανάγεται σε πρόσημο ορίζουσας:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Λήμμα

- *Το CCW υπολογίζει σε ποιά πλευρά (ημιεπίπεδο) της ευθείας των p_0, p_1 ανήκει το p_2.*
- *Το CCW υπολογίζει την φορά της στροφής που ορίζουν τα p_0, p_1, p_2 σε αυτή τη σειρά. Το πρόσημα είναι θετικό ανν η στροφή είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, ενώ μηδενίζεται ανν τα 3 σημεία είναι συνευθειακά.*

Outline

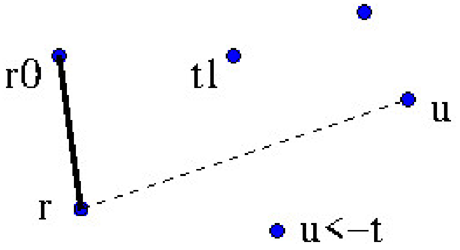
1. Εισαγωγικά

2. Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
   - Ορισμός ΚΠ2
   - Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
   - Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
   - Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Περιτύλιξη CCW

Αλγόριθμος Jarvis

- Έστω r_0 η αριστερότερη και r η τελευταία (πιο πρόσφατη) κορυφή.
- u το υποψήφιο σημείο για να γίνει επόμενη κορυφή του ΚΠ.
- Δοκιμάζουμε όλα τα σημεία $t_1, t, \ldots$: στην εικόνα, το t "βελτιώνει" το u, ενώ το t_1 έπαιξε τον ρόλο του t προηγουμένως



http://www.di.uoa.gr/∼compgeom/pycgalvisual/whypython.shtml

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο $(\min x)$.
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο $(\min\ y)$.
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο ($\min x$).
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο ($\min\ y$).
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο ($\min x$).
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο ($\min\ y$).
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο $(\min x)$.
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο $(\min\ y)$.
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή
   - r, u, t συνευθειακά, u εσωτερικό του (r, t),

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο ($\min x$).
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο ($\min\ y$).
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή
   - r, u, t συνευθειακά, u εσωτερικό του (r, t),
3. Αν $u = r_0$ τερμάτισε, αλλιώς:
   $r \leftarrow u, S \leftarrow S - \{r\}$, πρόσθεσε στις κορυφές το r, συνέχισε στο 2.

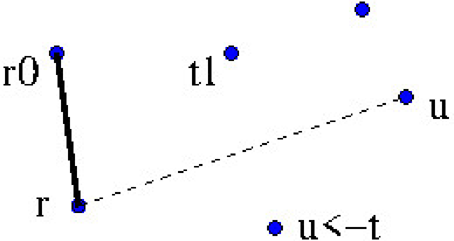
Ορθότητα

Λήμμα

Αν ισχύει CCW(r,u,t_1) και CW(r,u,t) τότε ισχύει CCW(r,t,t_1).

Απόδειξη.

Η γωνία $(r_0\widehat{r}u)$ μεγαλώνει με κάθε ανανέωση του u και είναι πάντα μεγαλύτερη από την $(r_0\widehat{r}t)$, για οποιοδήποτε t έχει εξεταστεί.



Πολυπλοκότητα αλγορίθμου περιτύλιξης

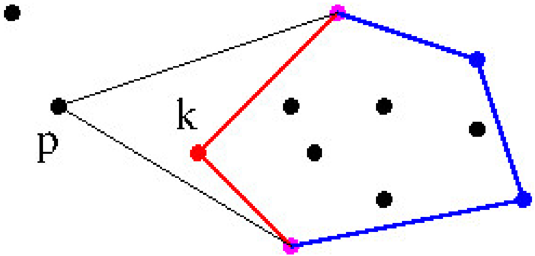
- Αρχικοποίηση $= O(n)$.
- $H = \#$ κορυφών/ακμών στην έξοδο.
- Βήμα 3 εκτελείται H φορές, καθεμιά με πολυπλοκότητα $O(n)$.
- Κόστος κατηγορήματος $CCW = O(1)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(n) + O(Hn) = O(Hn) = O(n^2)$.

Ερώτημα. Αποδείξτε ΚΠ2 $= \Omega(n \log n)$.
Εξηγήστε το παράδοξο ο αλγόριθμος περιτύλιξης να είναι ταχύτερος για $H = O(1)$.

Outline

1. Εισαγωγικά

2. Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
   - Ορισμός ΚΠ2
   - Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
   - Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
   - Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2



Παράδειγμα: Ανανέωση ΚΠ(10 σημείων) με το επόμενο σημείο p, όπου η τελευταία/πρόσφατη κορυφή είναι η k.

Ορισμός κόκκινων/γαλάζιων ακμών/κορυφών και βυσσινί κορυφών.

Νέα κορυφή

Αυξητικός αλγόριθμος

Κάθε βήμα εξετάζει ένα σημείο (προσθέτει μια κορυφή).

Γενικά ο αλγόριθμος αποφασίζει αν το νέο σημείο βρίσκεται εντός / εκτός του τρέχοντος πολυγώνου.

Προσέγγιση

Διέταξε τα σημεία (κατά φθίνουσα τετμημένη), άρα:
– κάθε νέο σημείο εκτός πολυγώνου (συνεπώς κορυφή),
– υπάρχει κόκκινη ακμή προσπίπτουσα στο προηγούμενο σημείο/κορυφή

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
    - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
    - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές
   - Αντικατέστησε κόκκινες ακμές με 2 νέες: κάθε μία ορίζεται από p_k και βυσσινί κορυφή.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές
   - Αντικατέστησε κόκκινες ακμές με 2 νέες: κάθε μία ορίζεται από p_k και βυσσινί κορυφή.
4. Επέστρεψε το τρέχον πολύγωνο.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.
- $\forall$ νέο σημείο:

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq$ #νέων ακμών $\leq 2n$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq \#$νέων ακμών $\leq 2n$.
  - Κατασκευή δύο νέων ακμών $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- Χρωματισμός ακμής $= O(1)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq \#$νέων ακμών $\leq 2n$.
  - Κατασκευή δύο νέων ακμών $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(n \log n) + O(n) = O(n \log n)$.

Δύο βασικά κατηγορήματα

- Διάταξη των τετμημένων δηλ. απόφαση αν ισχύει $x_i < x_j \in \mathbb{R}$ δηλ. το πρόσημο της ορίζουσας

$$\det \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{bmatrix}.$$

- Χρωματισμός ακμής (A, B) ως προς νέο σημείο P: Η ακμή είναι κόκκινη/γαλάζια ανν η ευθεία της αφήνει σε διαφορετικό/ίδιο ημιεπίπεδο το P και το υπάρχον κυρτό πολύγωνο. Ισοδύναμα ανν τα δύο (μη-μηδενικά) πρόσημα

$$\operatorname{sign}\det \begin{bmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ P_x & P_y & 1 \end{bmatrix}, \operatorname{sign}\det \begin{bmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \end{bmatrix}$$

διαφέρουν/ισούνται όπου Q οποιοδήποτε σημείο στο υπάρχον ΚΠ