

Υπολογιστική Γεωμετρία

1ο Μέρος (β): Κυρτότητα σε γενική διάσταση

Γιάννης Εμίρης

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ
Ερευνητικό Κέντρο Αθηνά

Εαρ. 2024

- 1 Πολύεδρα γενικής διάστασης
 - Φημισμένα πολύεδρα
 - Ορισμοί
 - Είδη Πολυέδρων
 - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

- 2 ΚΠ3 και ΚΠ*d*
 - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
 - Gift wrapping

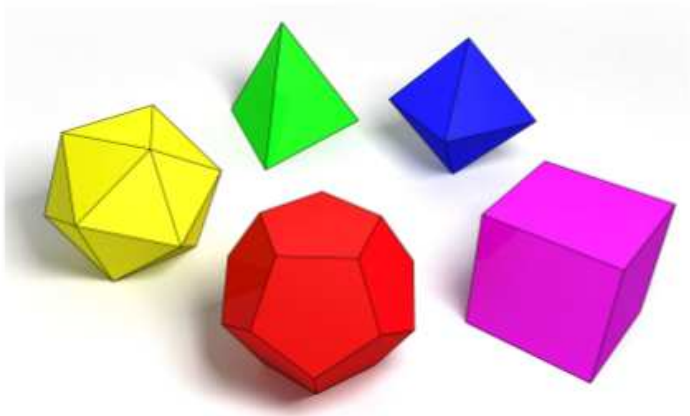
1 Πολύεδρα γενικής διάστασης

- Φημισμένα πολύεδρα
- Ορισμοί
- Είδη Πολυέδρων
- Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

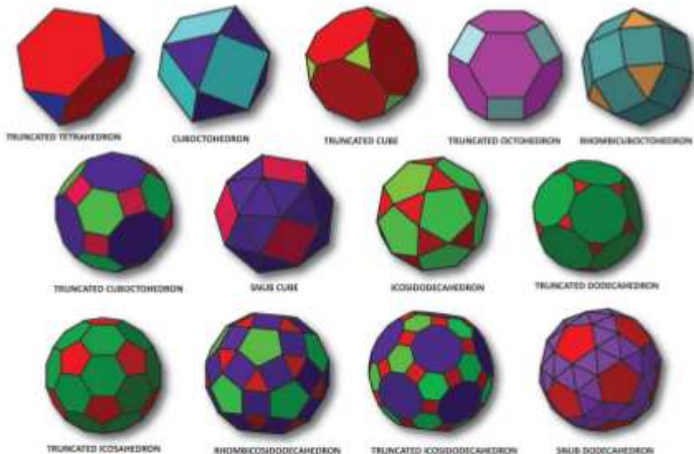
2 ΚΠ3 και ΚΠd

- Beneath-Beyond για το ΚΠ3
- Gift wrapping

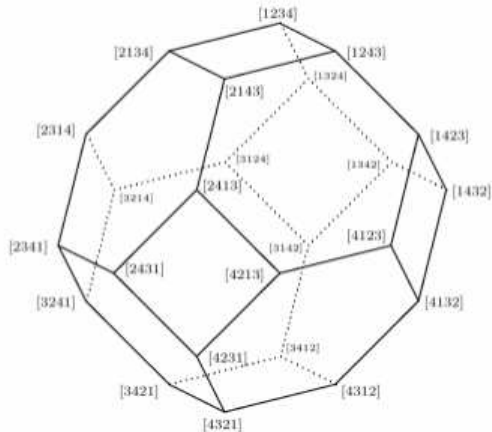
Platonic Solids



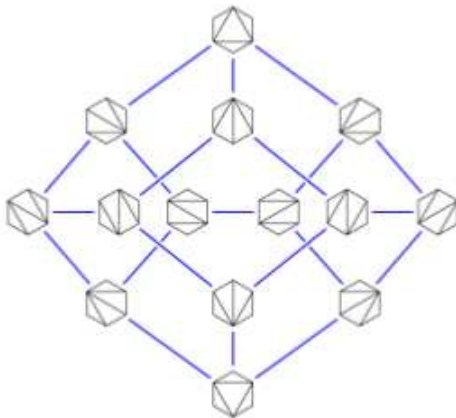
Archimedean Solids



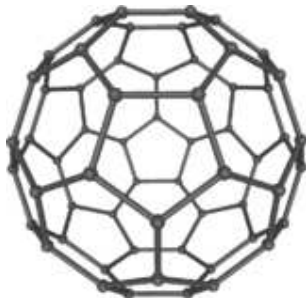
Permutahedron



Associahedron



Το πολύεδρο της φουλερενίου (fullerene)



ΚΠ3 60 κορυφών, 32 εδρών (κανονικά πεντάγωνα και 20 εξάγωνα).
Χάρισε στους ερευνητές που το ανακάλυψαν ('85) το Nobel Χημείας '96.
Πόσες είναι οι ακμές;

- 1 Πολύεδρα γενικής διάστασης
 - Φημισμένα πολύεδρα
 - Ορισμοί
 - Είδη Πολυέδρων
 - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

- 2 ΚΠ3 και ΚΠd
 - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
 - Gift wrapping

(Υπερ)επίπεδο, ως σημειοσύνολο

Ορισμός (Αλγεβρικός)

(Υπερ)επίπεδο: Ορίζεται ως το σημειοσύνολο που ικανοποιεί μια γραμμική εξίσωση

$$f(x_1, \dots, x_d) = k_1x_1 + \dots + k_dx_d + k_0 = 0, \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα

Ευθεία $\{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 = 3\} \subset \mathbb{R}^2$,

επίπεδο $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\} \subset \mathbb{R}^3$.

υπερεπίπεδο $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ορισμός

Ισοδύναμα, μέσω του κάθετου διανύσματος v στο (υπερ)επίπεδο, και της απόστασης $k_0/\|v\|$ του (υπερ)επιπέδου από την αρχή των αξόνων:

$$f = v \cdot (x_1, \dots, x_d) + k_0.$$

Π.χ. Για $k_0 = 0$ το (υπερ)επίπεδο περνά από την αρχή των αξόνων.
Για $v = (2, -1)$, $k_0 = -3$, παίρνουμε $f = 2x_1 - x_2 - 3$.

Για γνωστό $f(x_1, \dots, x_d) = k_1x_1 + \dots + k_dx_d + k_0 = 0$,

το κάθετο διάνυσμα είναι $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right) = (k_1, \dots, k_d)$.

Ορισμός (Παραμετρικός)

Ισοδύναμα, όλα τα σημεία $\in \mathbb{R}^d$ που παράγονται από $d - 1$ ανεξάρτητα διανύσματα.

Π.χ. ευθεία $(x_1, x_2) = t(1, 2) - (0, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

επίπεδο $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 1) + s(0, 1, 2) + (0, 0, 1)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Λήμμα

Το υπερεπίπεδο σε χώρο \mathbb{R}^d έχει διάσταση $d - 1$.

Ορισμός

Ημιχώρος: η μία «πλευρά» δεδομένου υπερεπιπέδου: έχει διάσταση d .
Π.χ. ημιεπίπεδο $\{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 > 3\} \subset \mathbb{R}^2$, ημιχώρος $\subset \mathbb{R}^3$.

Ορίζεται ως το σημειοσύνολο που δίνει θετικό/αρνητικό πρόσημο στο πολυώνυμο του υπερεπιπέδου:

$$\{(x_1, \dots, x_d) : f(x_1, \dots, x_d) \square 0\}, \quad \square \in \{>, \geq, <, \leq\}.$$

Ισοδύναμα, δίνει θετικό/αρνητικό πρόσημο στο:

$$\nabla f \cdot (x_1, \dots, x_d) + k_0.$$

Κλειστός ή ανοικτός ημιχώρος \iff περιλαμβάνει ή όχι το υπερεπίπεδο
 $\iff \square \in \{\geq, \leq\}$ ή $\square \in \{>, <\}$, αντίστοιχα.

Ορισμός

Κυρτό πολύτοπο (polytope) ή **πολύεδρο (polyhedron)** είναι η Τομή πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων.

Καθώς μεγαλώνει το σύνολο των ημιχώρων, η τομή τους είτε δεν αλλάζει είτε μικραίνει, και μπορεί να φτάσει στο \emptyset .

Π.χ. Κάθε ΚΠ2 εκφράζεται ως τομή ημιεπιπέδων. Αρκούν τα ημιεπίπεδα των ακμών.

Ορισμός

Φραγμένο/μη ανν δεν/εκτείνεται στο άπειρο.

Π.χ. στο \mathbb{R}^2 , τα κυρτά περιβλήματα σημειοσυνόλων είναι τα φραγμένα κυρτά πολύγωνα. Συνήθως «πολύτοπο» = φραγμένο πολύεδρο.

Ορισμός

Έστω σημεία $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^d$. Το Κυρτό Περίβλημα $\text{ΚΠ}(A_1, \dots, A_n)$ είναι το μικρότερο (ως προς όγκο ή ως σημειοσύνολο) κυρτό πολύεδρο (τομή ημιχώρων), που περιέχει τα A_1, \dots, A_n .

Λήμμα

Το *Κυρτό Περίβλημα* πεπερασμένου πλήθους σημείων είναι μη κενό και φραγμένο.

Πόρισμα

- Οι κορυφές P_1, \dots, P_k του ΚΠd ανήκουν στο $\{A_1, \dots, A_n\}$.
- Τα σημεία του ΚΠ είναι **κυρτοί συνδυασμοί** των κορυφών:
 $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k, \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$.
- [Καραθεοδωρής] Κάθε σημείο Κυρτού Πολυέδρου στο \mathbb{R}^d είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων $d + 1$ κορυφών του.

Λήμμα (Άσκηση)

Αν το d -πολύεδρο έχει $O(d)$ κορυφές, τότε ο υπολογισμός των $d + 1$ κορυφών που 'παράγουν' δοσμένο σημείο γίνεται σε $O(d^4)$ μέσω γραμμικής άλγεβρας.

Υπερεπίπεδο στήριξης

Ορισμός

Υπερεπίπεδο στήριξης (supporting hyperplane) πολυέδρου P : τέμνει το P μόνο σε σημεία που ανήκουν σε ένα ή περισσότερα από τα κρίσιμα (critical) υπερεπίπεδα που ορίζουν το P (όπου το P αλλάζει αν λείπει ένα κρίσιμο υπερεπίπεδο).

Ισοδύναμα, το υπερεπίπεδο στήριξης έχει μη-κενή τομή με το κλειστό πολύεδρο, αλλά κενή τομή με το ανοικτό πολύεδρο (δηλ. την τομή των ανοικτών ημιχώρων).

Παράδειγμα

\mathbb{R}^2 : κάθε ευθεία όπου ανήκει μια ακμή/κορυφή ενός ΚΠ2.

\mathbb{R}^3 : κάθε επίπεδο όπου ανήκει μια έδρα/ακμή/κορυφή ενός ΚΠ3.

Ορισμός

Όψη (face): τομή πολυέδρου με ένα/περισσότερα επίπεδα στήριξης.

Ορισμός (Διάσημες όψεις)

- Κορυφή (vertex) (διάσταση 0),
- Ακμή (edge) (διάσταση 1),
- Έδρα (facet) (διάσταση $d - 1$),
- Ράχη (ridge) (διάσταση $d - 2$).
- Το d -διάστατο πολυέδρο θεωρείται όψη διάστασης d .
- Το \emptyset θεωρείται όψη διάστασης -1 κάθε πολυέδρου.

1 Πολύεδρα γενικής διάστασης

- Φημισμένα πολύεδρα
- Ορισμοί
- Είδη Πολυέδρων
- Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

2 ΚΠ3 και ΚΠd

- Beneath-Beyond για το ΚΠ3
- Gift wrapping

Ορισμός

d -άπλοκο (simplex): Κυρτό πολύεδρο ΚΠ(A_0, \dots, A_d) τ.ώ. τα $A_i \in \mathbb{R}^d$ είναι αφινικώς ανεξάρτητα δηλ. τα $A_i - A_0$ γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λήμμα

Κάθε άπλοκο έχει

- $d + 1 = \binom{d+1}{d}$ έδρες, κάθε d κορυφές ορίζουν έδρα.
- $\binom{d+1}{2}$ ακμές: κάθε ζεύγος κορυφών ορίζει ακμή.
- Κάθε $k + 1$ κορυφές ορίζουν k -άπλοκο: $\binom{d+1}{k+1}$ όψεις διάστασης k .

Παράδειγμα

Ευθύγραμμο τμήμα στο \mathbb{R} , τρίγωνο στο \mathbb{R}^2 , τετράεδρο στο \mathbb{R}^3 .

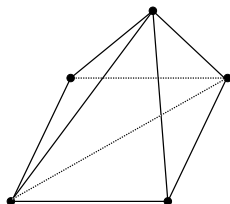
Ορισμός

Απλό (simple) d -πολύεδρο: σε κάθε κορυφή τέμνονται ακριβώς d έδρες (d υπερεπίπεδα στήριξης).

Απλοειδές (simplicial) d -πολύεδρο: \forall έδρα άπλοκο διάστασης $d - 1$.

Λήμμα (Άσκηση)

- Στο επίπεδο, κάθε πολύγωνο είναι απλό και απλοειδές.
- Το μοναδικό απλό και απλοειδές πολύεδρο σε ≥ 3 διαστάσεις είναι το άπλοκο.
- Κάθε πολύεδρο γίνεται απλοειδές αν τριγωνοποιήσουμε τις έδρες του. Για γενικό d , τριγωνοποίηση σημαίνει υποδιαίρεση σε άπλοκα.
- Βρείτε πολύεδρο που είναι: απλό αλλά όχι απλοειδές, απλοειδές αλλά όχι απλο, τίποτα εκ των δύο.



Τετραγωνική πυραμίδα (του Χέοπος) στο \mathbb{R}^3 .

Διαταράσσω απειροελάχιστα και τυχαία τις κορυφές ώστε να προκύψει τριγωνοποιημένη βάση, άρα απλοειδές.

Γενικά: μια τυχαία απειροελάχιστη διαταραχή σε οποιοδήποτε πολύεδρο το μετατρέπει σε απλοειδές.

- 1 Πολύεδρα γενικής διάστασης
 - Φημισμένα πολύεδρα
 - Ορισμοί
 - Είδη Πολυέδρων
 - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

- 2 ΚΠ3 και ΚΠd
 - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
 - Gift wrapping

Θεώρημα άνω φράγματος (upper bound)

Θεώρημα (McMullen)

Οποιοδήποτε d -πολύεδρο με n κορυφές (ή n έδρες) περιέχει

$$O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$$

k -διάστατες όψεις, όπου διάσταση $k = 0, \dots, d - 1$.

Το φράγμα είναι σφιχτό στα «κυκλικά» πολύεδρα: $K\Gamma(A_1, \dots, A_n)$, για $A_i = (i, i^2, \dots, i^d) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, n$.

Πόρισμα

$d = 2$: $O(n)$ ακμές, κορυφές.

$d = 3$: $O(n)$ έδρες, ακμές, κορυφές.

$d = 4$: $O(n^2)$ έδρες, ακμές, για n κορυφές.

Λήμμα

Για n δοσμένα σημεία στο επίπεδο, $KΠ2 = \Omega(n \log n)$.

Πόρισμα

Ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος n σημείων στο \mathbb{R}^d έχει χρονική πολυπλοκότητα χειρίστης περίπτωσης $KΠd = \Omega(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Η αποθήκευση του γράφου πρόσπτωσης ή γειτνίασης έχει χωρική πολυπλοκότητα $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Πόρισμα

Το συνολικό πλήθος όψεων όλων των διαστάσεων, για $d = O(1)$, είναι $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

- 1 Πολύεδρα γενικής διάστασης
 - Φημισμένα πολύεδρα
 - Ορισμοί
 - Είδη Πολυέδρων
 - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
- 2 ΚΠ3 και ΚΠd
 - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
 - Gift wrapping

- 1 Έχοντας το ΚΠ k σημείων, «εισάγουμε» ένα νέο σημείο p :
- 2 Εντόπισε το p ως προς το ΚΠ και αγνόησέ το αν είναι εσωτερικό.
- 3 Αλλιώς υπολόγισε μια απόδειξη (certificate) πως το p είναι εξωτερικό σημείο.
- 4 Χρησιμοποίησε την απόδειξη για να ανανεώσεις το ΚΠ (υπολόγισε το μέρος του ΚΠ που διατηρείται μαζί με το p , και το μέρος που διαγράφεται)

Αυξητικός αλγόριθμος για το ΚΠ3

Είσοδος: n σημεία στο \mathbb{R}^3 , σε γενική θέση.

Έξοδος: το κυρτό περίβλημά τους (π.χ. ως γράφος γειτνίασης).

- 1 Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα $x_1: p_1, \dots, p_n$.
- 2 Αρχικοποίηση: τρέχον \leftarrow τετράπλευρο 4 δεξιότερων σημείων.
- 3 Για το p_k , $k = 5, \dots, n$:
 - Εξέτασε τις έδρες που προσπίπτουν στην p_{k-1} : υπάρχει **κόκκινη**.
 - Βρες όλες τις **κόκκινες έδρες** κι όλες τις **βυσσινί ακμές**.
 - Διέγραψε από τρέχον πολύεδρο **κόκκινες έδρες, ακμές, κορυφές**.
 - Εισήγαγε νέες έδρες (ακμές) που ορίζονται από: p_k και **βυσσινί ακμές (κορυφές)**.
- 4 Επέστρεψε το τρέχον πολύεδρο.

Λήμμα (Κατηγορήμα)

Για κάθε έδρα του τρέχοντος πολυέδρου τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- η έδρα είναι είτε **γαλάζια** είτε **κόκκινη**,
- η έδρα **δεν** / **είναι** ορατή από το νέο σημείο,
- το νέο σημείο κείται στο **ίδιο** / **διαφορετικό** ημιχώρο ως προς το επίπεδο στήριξης της έδρας,
- το πρόσημο του κατηγορήματος Προσανατολισμού για τις κορυφές της έδρας με το νέο σημείο είναι **ίδιο** / **διαφορετικό** από,τι με οποιοδήποτε σημείο (κορυφή ή εσωτερικό) του τρέχοντος πολυέδρου.

Λήμμα

Ο προσανατολισμός των $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, 3$ ανάγεται στο πρόσημο της ορίζουσας:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Μηδενίζεται αν τα 4 σημεία είναι συνεπίπεδα. Αλλιώς δηλώνει σε ποιον ημιχώρο που ορίζεται από το επίπεδο των $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}$ βρίσκεται το p_{i_0} , όπου $\{i_0, \dots, i_3\} = \{0, \dots, 3\}$.

Λήμμα

Σε κάθε αυξητικό βήμα,

- το σύνολο *βυσσινί ακμών/κορυφών* είναι τοπολογικά ισοδύναμο με ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο,
- το πολύγωνο αυτό είναι κυρτό περίβλημα $\leq n$ σημείων, άρα μεγέθους $O(n)$,
- το σύνολο νέων εδρών/ακμών αντιστοιχεί με τρόπο 1-1 στο σύνολο *βυσσινί ακμών/κορυφών*.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου για το ΚΠ3

- Αρχική ταξινόμηση = $O(n \log n)$.
- Κόστος εξαρτάται από:
 - συνολικό #κόκκινων εδρών/ακμών, το οποίο φράσσεται από το συνολικό #εδρών/ακμών που κατασκευάζονται = $O(n^2)$,
 - #βυσσινί ακμών/κορυφών = $O(n)$ ανά βήμα,
 - #εδρών/ακμών που κατασκευάζονται = $O(n)$ ανά βήμα.
- Συνολική πολυπλοκότητα = $O(n^2)$.

Suboptimal

Υπάρχει αλγόριθμος Beneath-Beyond σε $O(n \log n)$ αν χρησιμοποιήσουμε εισαγωγή/εντοπισμό σημείων (χωρίς το αρχικό στάδιο ταξινόμησης) ώστε να μην αλλάζουν το ΚΠ όλα τα σημεία.

Θεώρημα

Δίνονται n σημεία στο \mathbb{R}^d . Η συνολική χρονική πολυπλοκότητα του παραπάνω αυξητικού αλγορίθμου για την κατασκευή του ΚΠd είναι

$$O\left(n \log n + n^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}\right),$$

άρα βέλτιστος μόνο για άρτιες διαστάσεις.

Τυχαιοκρατική τεχνική αναμενόμενου κόστους $O(n \lg n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ [Seidel]

Πιο περίπλοκη ντετερμινιστική προσέγγιση με πολυπλοκότητα χείριστης περίπτωσης $O(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ [Chazelle]. Βέλτιστη χείριστης περίπτωσης σε κάθε διάσταση.

Λήμμα

Ο χώρος αποθήκευσης είναι ανάλογος με το μέγεθος του γράφου πρόσπτωσης ή γειτνίασης = $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Υλοποίηση

Polymake [Joswig]

CGAL/triangulate [Boissonnat, Hornus, Devillers]

- 1 Πολύεδρα γενικής διάστασης
 - Φημισμένα πολύεδρα
 - Ορισμοί
 - Είδη Πολυέδρων
 - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
- 2 ΚΠ3 και ΚΠd
 - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
 - Gift wrapping

- n σημεία σε γενική θέση στο \mathbb{R}^d : κάθε d σημεία ορίζουν υπερεπίπεδο, κάθε $d + 1$ σημεία \notin στο ίδιο υπερεπίπεδο.
- Αυξητικός αλγόριθμος ως προς τις έδρες: σύνολο γνωστών εδρών συνεκτικό (άρα και σύνολο άγνωστων εδρών συνεκτικό).
- Δομή δεδομένων PAX περιέχει γνωστές ράχες προς εξέταση (γνωρίζουμε μία από τις δύο έδρες).
- Οι ράχες αποθηκεύονται ως $(F - \{x\}, x)$
 F : d σημεία ορίζουν (γνωστή) έδρα που περιέχει τη ράχη,
 x = κορυφή έδρας F που δεν ανήκει στη ράχη,
 $F - \{x\}$: οι κορυφές της ράχης.

Είσοδος: Ράχη R και κορυφή $c \notin R$: $R \cup \{c\}$ αποτελεί έδρα του ΚΠ.

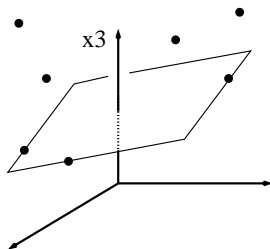
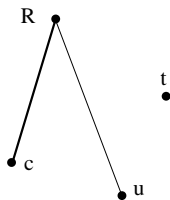
Έξοδος: Έδρα ΚΠ που περιέχει την R και δεν είναι η $R \cup \{c\}$.

- 1 Έστω υποψήφιο σημείο u από τα σημεία εισόδου, εκτός των $R \cup \{c\}$. Ορίζει υποψήφια έδρα $R \cup \{u\}$.
- 2 Για κάθε $t \notin R \cup \{c, u\}$:
Αν c, t σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το υπερεπίπεδο της υποψήφιας έδρας $R \cup \{u\} \Rightarrow u \leftarrow t$.
- 3 Επιστρέψε έδρα $R \cup \{u\}$.

Γενικεύει τον αλγόριθμο Jarvis που διατυπώθηκε στο \mathbb{R}^2 .

Πολυπλοκότητα = $O(n)$ κατηγορήματα Προσανατολισμού, άρα $O(nd^3) = O(n)$ για $d = O(1)$.

Παράδειγμα εύρεσης έδρας



- Αριστερά: Εκτέλεση συνάρτησης ΑΛΛΗ-ΕΔΡΑ(R, c) στο \mathbb{R}^2 , όπου η ράχη R είναι κορυφή: Το t καθίσταται u .
- Δεξιά: Εύρεση 1ης έδρας του ΚΠ στο \mathbb{R}^3 (στο κάτω Περίβλημα)

- Εστω η εξίσωση του υπερεπιπέδου της πρώτης (άγνωστης) έδρας:

$$k_1x_1 + \cdots + k_{d-1}x_{d-1} + k_dx_d + \lambda = 0,$$

για άγνωστα $k_1, \dots, k_d, \lambda \in \mathbb{Q}$.

- Αναζητούμε (για ευκολία) έδρα μη-παράλληλη με άξονα x_d , δηλ. υπερεπίπεδο τέμνει άξονα $\Rightarrow k_d \neq 0$, άρα γράφεται:

$$x_d = k_1x_1 + \cdots + k_{d-1}x_{d-1} + \lambda, k_1, \dots, k_{d-1}, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

\exists τέτοια έδρα εφόσον όγκος(ΚΠ) > 0 στο \mathbb{R}^d .

Αρχικοποίηση: περιορισμοί υπερεπιπέδου

- Για κάθε δεδομένο σημείο $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{id})$, $i = 1, \dots, n$:

$$p_{i,d} \geq k_1 p_{i,1} + \dots + k_{d-1} p_{i,d-1} + \lambda.$$

Τα p_i με ισότητα ανήκουν στην έδρα, τα υπόλοιπα άνωθεν.

- ΚΠ φραγμένο \Rightarrow τέτοια έδρα φράσσει ΚΠ από «κάτω», δηλ. ανήκει στο κάτω Περίβλημα.
- Τομή υπερεπιπέδου με x_d -άξονα όσο το δυνατόν ψηλότερα, δηλ. με λ μέγιστο: ορίζεται μοναδικό υπερεπίπεδο.

Άσκηση

Εφαρμόστε την αρχικοποίηση αυτή σε δύο διαστάσεις: ποια έδρα (ακμή) υπολογίζεται;

Ορισμός Προβλήματος

- Υπάρχουν d άγνωστες ποσότητες $k_1, \dots, k_{d-1}, \lambda$.
- Δεδομένα $p_{i,j} \in \mathbb{R} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, d$, ορίζουν n γραμμικές ανισότητες (περιορισμούς)

$$k_1 p_{i,1} + \dots + k_{d-1} p_{i,d-1} + \lambda \leq p_{i,d}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Συνάρτηση στόχος

$$f(k_1, \dots, k_{d-1}, \lambda) = -\lambda.$$

- Ζητείται σημείο $(k_1, \dots, k_{d-1}, \lambda)$, που ικανοποιεί τους n περιορισμούς και ελαχιστοποιεί την συνάρτηση-στόχο.

Πολυωνυμική πολυπλοκότητα

Μέθοδοι εσωτερικού σημείου ή Ελλειψοειδής αλγόριθμος: Ασθενώς πολυωνυμικοί, δηλ. πολυωνυμική πολυπλοκότητα ως προς n, d , bitsize.

Μια σταθερή παράμετρος

Εδώ υπάρχει σταθερό πλήθος αγνώστων $d = O(1)$.

- Ο αυξητικός αλγόριθμος [Megiddo'84] κοστίζει $O(n)$, για $d = O(1)$, εκθετικός ως προς d . (βλ. παρακάτω).
- Ο Δυϊσμός δίνει: $O(d)$, αν $n = O(1)$.
- Απλούστερος πιθανοκρατικός = $O(d! n)$ [Seidel'91].

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠd

Είσοδος: n σημεία στο \mathbb{R}^d σε γενική θέση.

Έξοδος: Το κυρτό τους περίβλημα σε κατάλληλη αναπαράσταση.

- 1 Υπολόγισε και τύπωσε μία πρώτη έδρα F του ΚΠ.
- 2 Αρχικοποίησε δομή PAX με ράχες $(F - \{x\}, x)$, $\forall x \in F$.
- 3 Όσο ή δομή PAX έχει στοιχεία, έστω $(R, c) \in \text{PAX}$.
Υπολόγισε και τύπωσε $F \leftarrow \text{ΑΛΛΗ-ΕΔΡΑ}(R, c)$.
Για κάθε κορυφή $x \in F$:
 - α. Αν \exists σημείο y : ράχη $(F - \{x\}, y) \in \text{PAX}$, διέγραψε την από PAX
 - β. Αλλιώς, εισήγαγε $(F - \{x\}, x)$ στη δομή PAX.

[Chand-Kapur]

Πολυπλοκότητα περιτύλιξης για το ΚΠd

- Βήμα1: Γραμμικός Προγραμματισμός n περιορισμών σε $d = O(1)$ διαστάσεις, έχει πολυπλοκότητα $O(n)$ [Megiddo].
- Βήμα2: Αρχικοποίηση PAX = $O(d)$.
- Βήμα3:
 - Αναζήτηση, προσθήκη ράχης στη PAX = $O(\log n^{\lfloor d/2 \rfloor}) = O(d \log n)$
 - Κόστος κάθε βήματος για ΑΛΛΗ-ΕΔΡΑ = $O(nd^3)$.
 - **Γενική θέση** (απλοειδές πολύεδρο): Υπάρχουν $O(d)$ σημεία $x \in F \Rightarrow$ κόστος = $O(d^2 \log n)$.

Συνολικός χρόνος = $O(n H d^3) = O(nH)$, $H = \#$ εδρών ΚΠ, δηλ. ευαίσθητος εξόδου.

Χωρική πολυπλοκότητα = $O(dn^{\lfloor d/2 \rfloor})$, αναιρεί ευαισθησία εξόδου.

Μέθοδος Αντίστροφης αναζήτησης

- Πρόβλημα: απαρίθμηση κόμβων γράφου τον οποίον ανακαλύπτουμε καθώς τον απαριθμούμε (με μικρή κατανάλωση μνήμης).
- Ιδέα 0: Ορίζουμε μια ολική διάταξη στους κόμβους.
- Ιδέα 1: Ορίζουμε επικαλύπτον δένδρο στους κόμβους και το διασχίζουμε κατά βάθος (depth first) χρησιμοποιώντας τη διάταξη.
- Ολικό ελάχιστο = ρίζα δένδρου = έναρξη αναζήτησης.
- Για κάθε κόμβο (με τιμή λ), υπάρχει στη μνήμη ο μοναδικός γονέας (έχει τιμή $< \lambda$) και υπολογίζονται όσοι από τους γείτονες έχουν τιμή $> \lambda$ άρα είναι παιδιά (και φυσικά αυτό με ελάχιστη τιμή από τα μη-εξερευνημένα παιδιά).
- Χρόνος διάσχισης: γραμμικός. Αρκεί να γνωρίζω τον κόμβο όπου βρίσκομαι και ποιον επισκέφτηκα τελευταίο (τοπική πληροφορία)

Simplex

- Ο αλγόριθμος Simplex [Dantzig] επιλύει το πρόβλημα ΓΠ ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή του εφικτού πολυέδρου και μετακινούμενος σε μοναδικά ορισμένη γειτονική κορυφή με βελτιωμένη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.
- Σε γενική θέση η τιμή αυτή ορίζει ολική διάταξη κορυφών.
- Ο Simplex ορίζει επικαλύπτον δένδρο στις κορυφές του εφικτού πολυέδρου, όπου όλα τα μονοπάτια καταλήγουν στη (μοναδική) βέλτιστη κορυφή και δεν τέμνονται.
- Η μοναδική βέλτιστη κορυφή είναι η καταβόθρα του Simplex δηλ. ρίζα του επικαλύπτοντος δένδρου.
- Αντίστροφη αναζήτηση: ακολουθεί αντίστροφα βέλη (αντιστρέφει αναζήτηση κατά Simplex), σε αναζήτηση κατά βάθος, επιλέγοντας γείτονα με ελάχιστο κριτήριο από τους μη-εξερευνημένους.

Αλγόριθμος περιτύλιξης [Avis-Fukuda'92]

- Ορίζουμε μια ολική διάταξη στις έδρες (π.χ. ως προς τομή λ με τον άξονα x_d ή με μια γενική ευθεία).
- Οι έδρες θεωρούνται κόμβοι γράφου, όπου ορίζεται κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος με ρίζα το ολικό ελάχιστο (έναρξη αναζήτησης). Υπολογίζεται με τροποποίηση της παραπάνω αρχικοποίησης.
- Για κάθε κόμβο με τιμή λ_0 ένα ή περισσότερα εξερχόμενα βέλη οδηγούν στα παιδιά ($\lambda > \lambda_0$), και υπάρχει μοναδικός γονιός ($\lambda < \lambda_0$), ο οποίος ορίζει εισερχόμενο βέλος.
- Τα παιδιά και ο γονιός είναι γειτονικές έδρες, αλλά μπορεί να υπάρχει γειτονική που δεν είναι ούτε παιδί ούτε γονιός.
- Ο γονιός έχει τιμή $\min_L \{ \lambda < \lambda_0 \}$ όπου L το σύνολο των γειτονικών εδρών κι έχουμε ταυτίσει την έννοια του κόμβου και της τιμής του,

Περιτύλιξη πολυέδρου [Avis-Fukuda'92]

- Η διάσχιση αποθηκεύει μόνο την τρέχουσα έδρα και την τιμή της τελευταίας εκτυπωμένης έδρας.
- Αρα συνολική χωρική πολυπλοκότητα = $O(d)$.
- Ο χρόνος εκτέλεσης πολλαπλασιάζεται με $O(1)$.

Υλοποίηση

lrs: lexicographic reverse search [Avis]

Άσκηση

Παράδειγμα αναζήτησης γράφου.