ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3Α

Χρησιμοποιείστε το κριτήριο MMSE για τον υπολογισμό των πέντε συντελεστών ενός εξισωτή σε ένα σύστημα βασικής ζώνης αν οι συντελεστές του ισοδύναμου φίλτρου καναλιού είναι x_0=1, x_{-1}=0.3, x_1= 0.2 και οι υπόλοιποι μηδενικοί. Δίνεται ότι για την ακολουθία συμβόλων $\{\alpha_m\}$ ισχύει, $E\{\alpha_m\}=0$ $E\{\alpha^2{}_m\}=1$ και $E\{\alpha_m a_{m-k}\}=0$ για $k\neq 0$.

<u>Υπόδειξη</u>

Η ακολουθία δειγμάτων στην έξοδο του φίλτρου λήψης y_m m=…,0,1,2,…, δίνεται από τη σχέση

$$y_m = \sum_{n=-1}^{1} x_n a_{m-n}$$

Καθώς τα x_i είναι γνωστά από τα δεδομένα της άσκησης, είναι εύκολος ο προσδιορισμός των $R_Y(n)$ και $R_{AY}(n)$ n=-2,-1,0,1,2 και $R_{AY}(n)$ n=-1,0,1 από τις σχέσεις:

$$R_Y(n)= R_Y(-n)=E[y_m y_{m-n}] \quad \text{και } R_{YA}(n) =E[y_m \alpha_{m-n}]$$

Τις παραστάσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα αν προσέξουμε ότι τα στοιχεία της ακολουθίας συμβόλων $\{\alpha_n\}$ είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3Β

Σε ένα Τηλεπ. Σύστημα με σύμβολα το 1 και το j, στην έξοδο του φίλτρου λήψης ισχύει:

$$y_m=-0.8a_{m+1}+a_m+0.1a_{m-1=}$$

Ποιες είναι οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να λάβει το y_m;

ΛΥΣΕΙΣ
3Α

$E\{(z_m-\alpha_m)^2\} = E\left[\left(\sum_{n=-2}^{2} c_n y_{m-n} - a_m\right)^2\right] = \sum_{n=-2}^{2}\sum_{k=-2}^{2} c_n c_k R_y(n-k) - 2\sum_{k=-2}^{2} c_k R_{ay}(k)$

και παραγογίζοντας ως προς τους άγνωστους συντελεστές και εξισώνοντας με το 0 προκύπτει το σύστημα :

$c_{-2}R_y(0)+c_{-1}R_y(1)+ c_0R_y(2)+ c_1R_y(3)+c_1R_y(4) \quad =R_{ay}(-2)$
$c_{-2}R_y(-1)+c_{-1}R_y(0)+ c_0R_y(1)+ c_1R_y(2)+c_1R_y(2) \quad =R_{ay}(-1)$
$c_{-2}R_y(-2)+c_{-1}R_y(-1)+c_0R_y(0)+c_1R_y(1)+c_1R_y(2) \quad =R_{ay}(0)$ ή
$c_{-2}R_y(-3)+c_{-1}R_y(-2)+c_0R_y(-1)+c_1R_y(0)+c_2R_y(1) \quad =R_{ay}(1)$
$c_{-2}R_y(-4)+c_{-1}R_y(-3)+c_0R_y(-2)+c_1R_y(-1)+c_2R_y(0) \quad =R_{ay}(2)$

$$\begin{pmatrix} R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & R_y(3) & R_y(4) \\ R_y(-1) & R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & R_y(3) \\ R_y(-2) & R_y(-1) & R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) \\ R_y(-3) & R_y(-2) & R_y(-1) & R_y(0) & R_y(1) \\ R_y(-4) & R_y(-3) & R_y(-2) & R_y(-1) & R_y(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AY}(-2) \\ R_{AY}(-1) \\ R_{AY}(0) \\ R_{AY}(1) \\ R_{AY}(2) \end{bmatrix}$$

Οι συντελεστές του συστήματος και οι σταθεροί όροι υπολογίζονται ως:
$R_{ay}(0)=E[\alpha_m y_m]=E[\alpha_m (0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})]=\sigma_\alpha^2$
$R_{ay}(1)=E[y_{m-1}\alpha_m]=E[\alpha_m (0.3\alpha_m+\alpha_{m-1}+ 0.2\alpha_{m-2})]=0.3\sigma_\alpha^2$
$R_{ay}(-1)=E[\alpha_m y_{m+1}]=E[\alpha_m (0.3\alpha_{m+2}+\alpha_{m+1}+ 0.2\alpha_m)]=0.2\sigma_\alpha^2$
$R_{ay}(-2)=E[\alpha_m y_{m+2}]=E[\alpha_m (0.3\alpha_{m+3}+\alpha_{m+2}+ 0.2\alpha_{m+1})]=0$
$R_{ay}(2)=E[\alpha_m y_{m-2}]=0$(όπως και πιο πάνω).

$R_y(-3)=R_y(3)=E[y_my_{m-3}]=E[(0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})(0.3\alpha_{m-2}+\alpha_{m-3}+ 0.2\alpha_{m-4})]=0$

$R_y(-2)=R_y(2)=E[y_my_{m-2}]=E[(0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})(0.3\alpha_{m-1}+\alpha_{m-2}+ 0.2\alpha_{m-3})]=$
$=0.06\sigma_\alpha^2$
$R_y(-1)=R_y(1)=E[y_my_{m-1}]=E[(0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})(0.3\alpha_m+\alpha_{m-1}+ 0.2\alpha_{m-2})]=$
$=0.5\sigma_\alpha^2$

$R_y(0)=E[y_my_m]=E[(0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})(0.3\alpha_{m+1}+\alpha_m+ 0.2\alpha_{m-1})]=$
$=1.13\sigma_\alpha^2$
Αντικαθιστώντας και μετά από απλοποίηση με σ_α^2

$$\begin{bmatrix} 1.13 & 0.5 & 0.06 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.13 & 0.5 & 0.06 & 0 \\ 0.06 & 0.5 & 1.13 & 0.5 & 0.06 \\ 0 & 0.06 & 0.5 & 1.13 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0.5 & 1.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 1 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας συντελεστών είναι συμμετρικός Toeplitz Πίνακας! Εδώ βέβαια η επίλυση του συστήματος γίνεται με μέθοδο Gauss.

➔ $(c_{-2}\ \ c_{-1}\ \ c_0\ \ c_1\ \ c_2)$=(0.0984, -0.3597, 1.1434 -0.2418, 0.0463)

3B

y_m	a_{m+1}	a_m	a_{m-1}
0.3	1	1	1
0.2+0.1j	1	1	j
-0.7 + j	1	j	1
-0.8+1.1j	1	j	j
1.1 -0.8j	j	1	1
1 - 0.7j	j	1	j
0.1 + 0.2j	j	j	1
0.3j	j	j	j