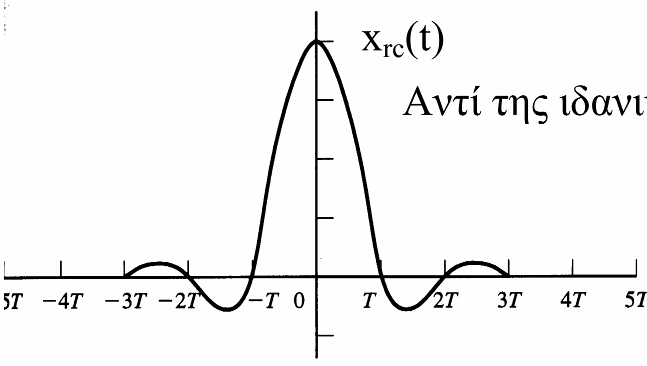
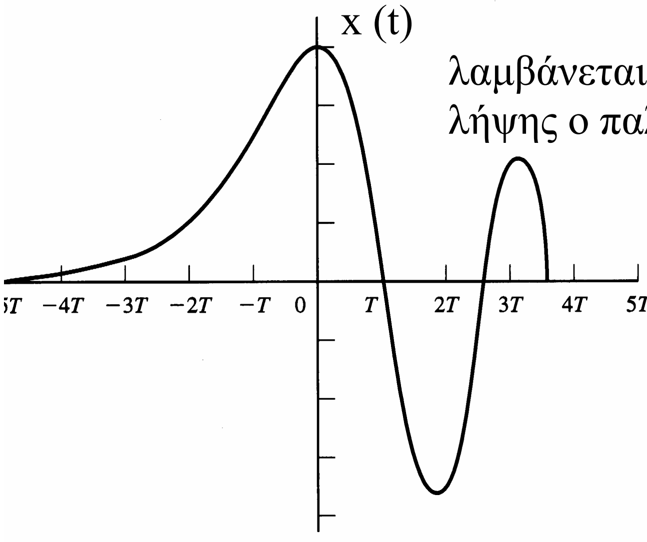
ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ Η ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ, C(f), ΤΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΗ ΚΑΙ ΑΚΟΜΗ ΧΕΙΡΟΤΕΡΟ ΣΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΓΡΗΓΟΡΑ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ.

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται η χρήση τεχνικών εξίσωσης του καναλιού, ή η τεχνική αναζήτησης της ακολουθίας Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ακολουθία ML). Τα φίλτρα εκπομπής επιλέγονται λαμβάνοντας το C(f) =σταθ.➔ Αποτέλεσμα είναι η παραμόρφωση του παλμού λήψης.



Αντί της ιδανικής μορφής $x_{rc}(t)$

(a)



λαμβάνεται στην έξοδο του φίλτρου λήψης ο παλμός $x\,(t)$

(b)

Οπότε στην έξοδο του φίλτρου λή-
ψης εμφανίζεται και πάλι ISI!

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + \nu(t)$$

Μετά τη δειγματοληψία $t_m = mT$

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_{m-n} + \nu_m$$

$$= x_0 a_m + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} a_n x_{m-n} + \nu_m$$

Όπου $x_q = x(qT)$

Στην πράξη ισχύει : $x_n = 0$ για $n < -L_1$ και $n > L_2$

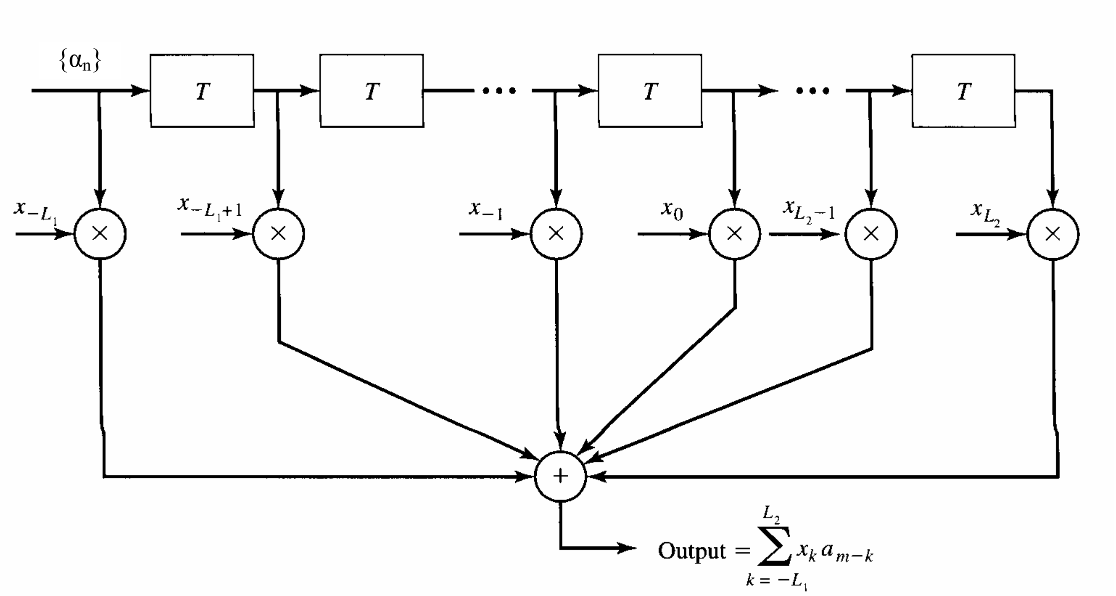
Αν $L = L_1 + L_2$

$$y_m = \sum_{n=-L_1}^{L_2} x_n a_{m-n} + v_m$$

Η τελευταία σχέση μας υποδεικνύει ότι η ακολουθία δειγμάτων $\{y_m\}$ που λαμβάνεται στην έξοδο του φίλτρου λήψης μπορεί να θεωρηθεί ως η συνέλιξη της ακολουθίας συμβόλων $\{\alpha_n\}$ και ενός ψηφιακού φίλτρου με συντελεστές $\{x_n\}$, στην οποία προστίθεται επι πλέον και η τυχαία ακολουθία θορύβου $\{v_n\}$.

ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ML

Ισοδύναμο Φίλτρο Καναλιού Διακριτού Χρόνου



Όπου $x_{-L1}, x_{-L1+1},\ldots,x_{-1}, x_0,\ldots x_{L2} =$
με $x(-L_1T), x(-L_1T+T),\ldots x(-T), x(0),\ldots, x(L_2T)$, $x(t)$ ο παραμορφωμένος παλμός λήψης.

Όταν είναι γνωστοί οι συντελεστές του ισοδύναμου διακριτού φίλτρου του καναλιού, $x(n)$ ο βέλτιστος φωρατής της ακολουθίας των διαβιβασθέντων συμβόλων $\{a_n\}$, είναι η ML ακολουθία.

Για Σύστημα M συμβόλων με ISI μήκους L απαιτείται trellis με M^L καταστάσεις.

Πρακτικά είναι δυνατόν να εφαρμοστεί για M=2 ή 4 και $1<L<6$

Για μεγάλες τιμές των M και L ο αλγόριθμος είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μόνο off line και έχει αξία μόνο θεωρητική, όπως βαθμονόμηση επιδόσεων εξισωτών, κ.λ.π.

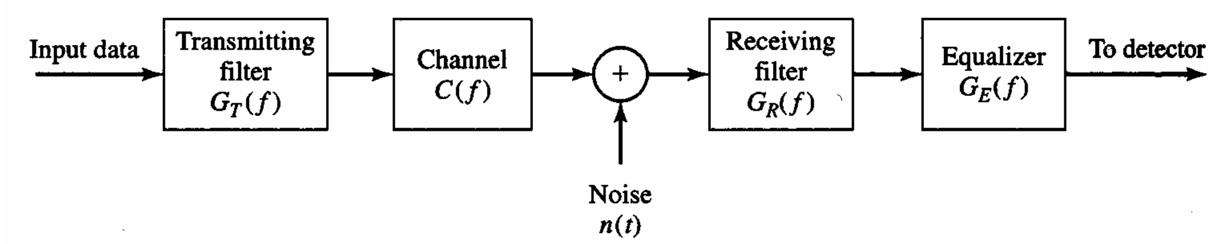
ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ

Γραμμικός Εξισωτής

Στο Πεδίο Συχνοτήτων

Χρήση Φίλτρου με Χαρακτηριστική Αντίστροφη αυτής του Καναλιού (Inverse Chanel Filter)

ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΟΥ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥΣ



$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)} = \frac{1}{|C(f)|} e^{-j\Theta_c(f)} |f| \leq W$$

Εξαλείφει την ISI !!!➔

$$y_m = a_m + \nu_m$$

Δυστυχώς!! Ενισχύει τον θόρυβο-αυξάνει την P_e!

$$\sigma_\nu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |G_R(f)|^2 |G_E(f)|^2 \, df$$

$$= \int_{-W}^{W} \frac{S_n(f)|X_{\mathrm{rc}}(f)|}{|C(f)|^2} \, df$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{N_0}{2} \boxed{\int_{-W}^{W} \frac{|X_{\mathrm{rc}}(f)|}{|C(f)|^2} \, df}$$

Εν γένει αυξάνεται η διακύμανση του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου

Παράδειγμα 8.6.2 $G_T(f)$, $G_R(f)$ 1/T=4800 bits/sec με

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{W}\right)^2}}, \qquad |f| \le W$$ W=4800 Hz $N_0/2=10^{-15}$ W/Hz

Προσδιορίστε σ_v^2 και P_e

Λύση

$$\begin{aligned}
\sigma_\nu^2 &= \frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W} \frac{|X_{\rm rc}(f)|}{|C(f)|^2}\,df \\
&= \frac{TN_0}{2}\int_{-W}^{W}\left[1+\left(\frac{f}{W}\right)^2\right]\cos^2\frac{\pi|f|}{2W}\,df \\
&= N_0\int_0^1 (1+x^2)\cos^2\frac{\pi x}{2}\,dx \\
&= \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\pi^2}\right)N_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{av} &= \frac{(M^2-1)d^2}{3T}\int_{-W}^{W}|G_T(f)|^2\,df \\
&= \frac{(M^2-1)d^2}{3T}\int_{-W}^{W}|X_{\rm rc}(f)|\,df \\
&= \frac{(M^2-1)d^2}{3T}
\end{aligned}$$

και η Πιθανότητα σφάλματος

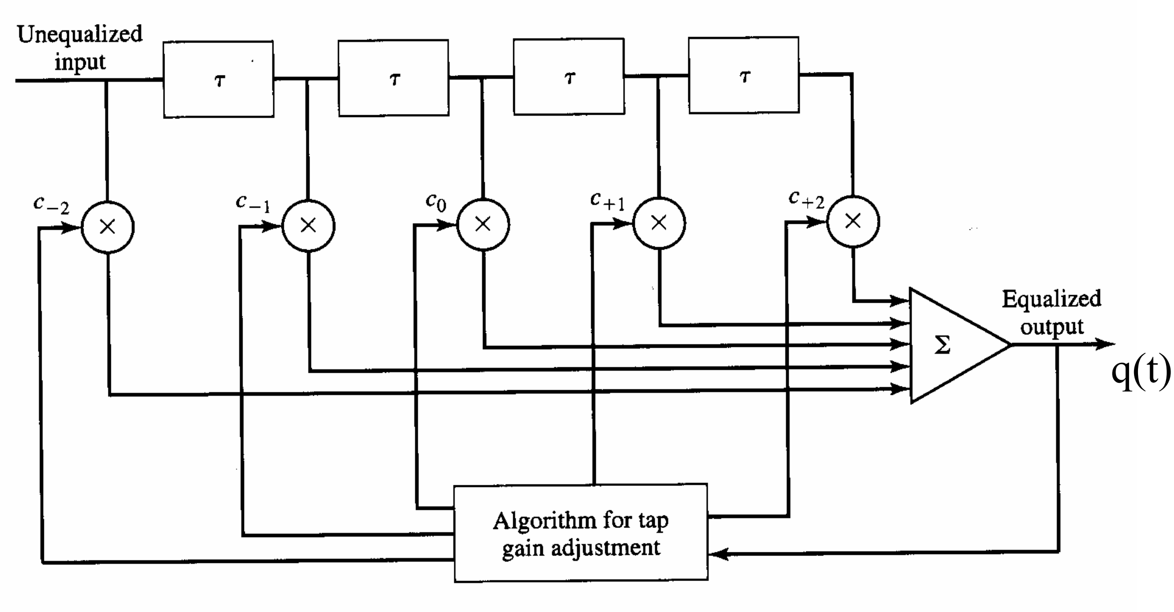
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{3P_{av}T}{(M^2-1)(2/3-1/\pi^2)N_0}}\right)$$

αντί

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\,P_{av}T}{(M^2-1)\,\mathrm{N}_0}}\right)$$

1.133 ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ Ή 0.54 dB υποβάθμιση

Υλοποίηση του Εξισωτή ως Ψηφιακού FIR Φίλτρου.



ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΟΥ FIR ΦΙΛΤΡΟΥ

$$C_{-N}, C_{-N+1}, \ldots C_0, \ldots, C_N$$

ΕΞΙΣΩΜΕΝΟ ΣΗΜΑ ΕΞΟΔΟΥ, q(t), ΤΟΥ ΕΞΙΣΩΤΗ

$$\{q_m\}=\{C_n\}*\{x_n\}$$

Όπου $x_n=x(n\tau)$, $q_m=q(m\tau)$

ΟΤΑΝ $\tau=T$: ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΥΜΒΟΛΟΥ (ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΠΑΓΩΓΩΝ) (Symbol Spaced Equalizer)

ΟΤΑΝ $\tau<T$: ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΛΑΣΜΑ ΣΥΜΒΟ-ΛΟΥ(ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΠΑΓΩΓΩΝ) (Fractionally Spaced Equalizer) Συνήθως $\tau=T/2$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Και στις δύο περιπτώσεις από την ακολουθία $\{q_m\}$ μας ενδιαφέρουν οι όροι που αντιστοιχούν σε $m\tau$ ακέραιο πολλαπλάσιο του T. Όταν δηλαδή $\tau=T/2$ υπολογίζουμε τους όρους $q_{-2N}, \ldots, q_0, \ldots, q_{2N}$

ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΥΜΒΟΛΟΥ (ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΠΑΓΩΓΩΝ)

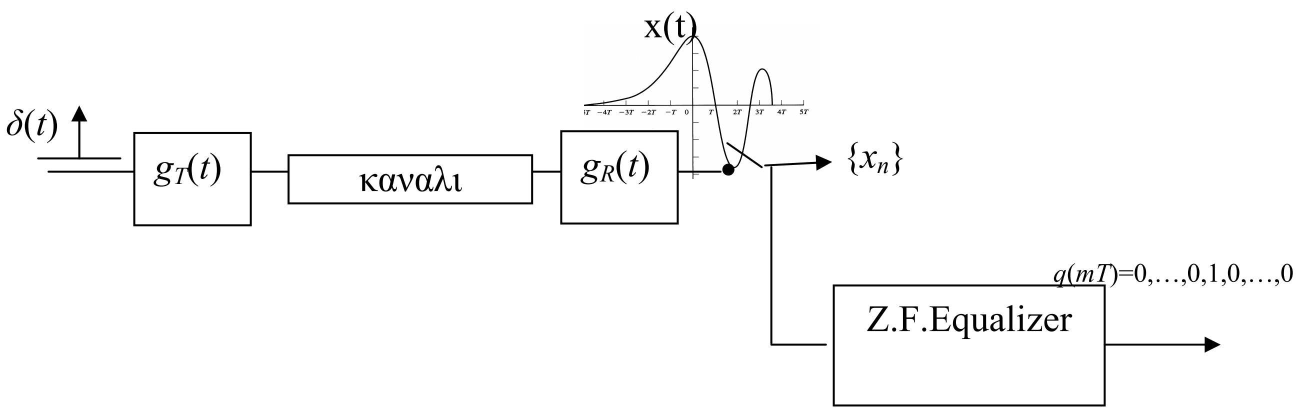
$$q(mT) = q(m) = \sum_{n=-N}^{N} C_n x(m-n)$$

ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΙΣΟ ΣΥΜΒΟΛΟ

$$q(mT) = q\left(2m\frac{T}{2}\right) = q(2m) = \sum_{n=-N}^{N} C_n x(2m-n)$$

ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΟΥ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥΣ Zero Forcing Condition

$$q(mT) = \begin{cases} 0 & \text{για } m = \pm 1, \ldots, \pm N \\ 1 & \text{για } m = 0 \end{cases}$$



Από τις πιο πάνω συνθήκες προκύπτει γραμμικό σύστημα με 2N+1 εξισώσεις και αγνώστους τους 2N+1 συντελεστές του Εξισωτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

παλμός λήψεως

$$x(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{2t}{T}\right)^2}$$

Ζητείται να σχεδιαστεί Εξισωτής Εξαναγκασμού σε Μηδενισμούς με 5 απαγωγές

1. Για $\tau=T$

2. Για $\tau=T/2$

ΛΥΣΗ

ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΥΜΒΟΛΟΥ

$$q(mT) = q(m) = \sum_{n=-N}^{N} C_n x(m-n) \Rightarrow$$

$$q(m) = \sum_{n=-2}^{2} C_n x(m-n), \quad m = -2:1:2$$

Με βάση την αρχή επιβολής μηδενισμών:

$q(m)=0$, $m=-N, -N+1, \ldots,-1,1,\ldots,N$ και $q(0)=1$

Ισχύει όμως

$$\begin{aligned}
q(-2) &= C_{-2}x_0 + C_{-1}x_{-1} + C_0x_{-2} + C_1x_{-3} + C_2x_{-4} \\
q(-1) &= C_{-2}x_1 + C_{-1}x_0 + C_0x_{-1} + C_1x_{-2} + C_2x_{-3} \\
q(0) &= C_{-2}x_2 + C_{-1}x_1 + C_0x_0 + C_1x_{-1} + C_2x_{-2} \\
q(1) &= C_{-2}x_3 + C_{-1}x_2 + C_0x_1 + C_1x_0 + C_2x_{-1} \\
q(2) &= C_{-2}x_4 + C_{-1}x_3 + C_0x_2 + C_1x_1 + C_2x_0
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(-1) & x(-2) & x(-3) & x(-4) \\ x(1) & x(0) & x(-1) & x(-2) & x(-3) \\ x(2) & x(1) & x(0) & x(-1) & x(-2) \\ x(3) & x(2) & x(1) & x(0) & x(-1) \\ x(4) & x(3) & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Δειγματοληπτωντας τη δοσμένη συνάρτηση (Θυμηθείτε $x(n)=x(nT)$)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/17 & 1/37 & 1/65 \\ 1/5 & 1 & 1/5 & 1/17 & 1/37 \\ 1/17 & 1/5 & 1 & 1/5 & 1/17 \\ 1/37 & 1/17 & 1/5 & 1 & 1/5 \\ 1/65 & 1/37 & 1/17 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

και από την επίλυση προκύπτει:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.0178 \\ -0.2006 \\ 1.0823 \\ -0.2006 \\ -0.0178 \end{bmatrix}$$

ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΙΣΟ ΣΥΜΒΟΛΟ

$$q(mT) = q\left(2m\frac{T}{2}\right) = q(2m) = \sum_{n=-N}^{N} C_n x(2m-n) \Rightarrow$$

$$q(2m) = \sum_{n=-2}^{2} C_n x(2m-n), \quad m = -2:1:2$$

Με βάση την αρχή επιβολής μηδενισμών:

$q(2m)=0$, $m=-N, -N+1, \ldots, -1, 1, \ldots, N$ και $q(0)=1$

Ισχύει όμως

$$q(-4) = C_{-2}x_{-2} + C_{-1}x_{-3} + C_0x_{-4} + C_1x_{-5} + C_2x_{-6}$$
$$q(-2) = C_{-2}x_0 + C_{-1}x_{-1} + C_0x_{-2} + C_1x_{-3} + C_2x_{-4}$$
$$q(0) = C_{-2}x_2 + C_{-1}x_1 + C_0x_0 + C_1x_{-1} + C_2x_{-2}$$
$$q(2) = C_{-2}x_4 + C_{-1}x_3 + C_0x_2 + C_1x_1 + C_2x_0$$
$$q(2) = C_{-2}x_6 + C_{-1}x_5 + C_0x_4 + C_1x_3 + C_2x_2$$

και επομένως

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-2) & x(-3) & x(-4) & x(-5) & x(-6) \\ x(0) & x(-1) & x(-2) & x(-3) & x(-4) \\ x(2) & x(1) & x(0) & x(-1) & x(-2) \\ x(4) & x(3) & x(2) & x(1) & x(0) \\ x(6) & x(5) & x(4) & x(3) & x(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Δειγματοληπτωντας τη δοσμένη συνάρτηση (Θυμηθείτε $x(n)=x(nT/2)$)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/17 & 1/26 & 1/37 \\ 1 & 1/2 & 1/5 & 1/10 & 1/17 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/5 \\ 1/17 & 1/10 & 1/5 & 1/2 & 1 \\ 1/37 & 1/26 & 1/17 & 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

και από την επίλυση προκύπτει:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2.2. \\ 4.9 \\ -3 \\ 4.9 \\ -2.2 \end{bmatrix}$$

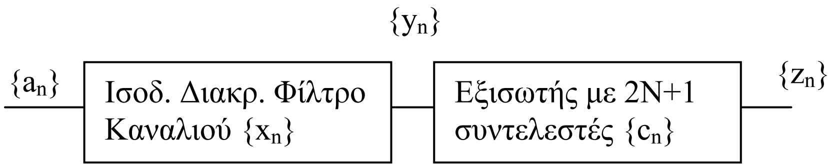
ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΞΙΣΩΤΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΟΥ

Δεν αντιμετωπίζει καθόλου το θόρυβο!!!

ΘΕΡΑΠΕΙΑ;

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ (*MINIMUM MEAN SQUARE ERROR*) ,MMSE

Δηλαδή οι συντελεστές του φίλτρου επιλέγονται έτσι ώστε τα δείγματα της εξόδου να δημιουργούν ακολουθία z(mT) με ελάχιστη τη μέση τετραγωνική διαφορά από την ακολουθία $\{\alpha_n\}$ που έχει διαβιβαστεί. Με τον τρόπο αυτό οι συντελεστές επιλέγονται με στόχο την ελαχιστοποίηση της P_e .



$$y(m) = \sum_{n=-L_1}^{L_2} x_n a_{m-n} \qquad z(m) = \sum_{n=-N}^{N} c_n y(m-n)$$

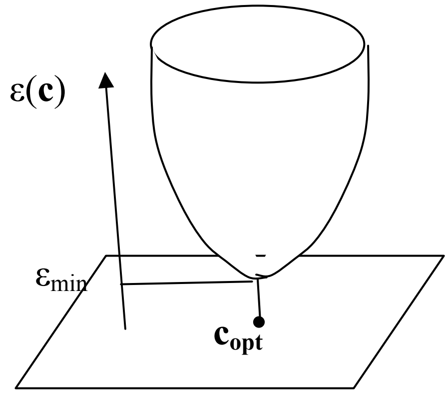
Στόχος ο υπολογισμός των 2N+1 συντελεστών του εξισωτή ώστε να ελαχιστοποιηθεί το $\varepsilon(\mathbf{c}) = E[(z(m)-a_m)^2]$.

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = E\left[\left(z(m)-a_m\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n y(m-n) - a_m\right)^2\right]$$

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} c_n c_k R_Y(n-k) - 2\sum_{k=-N}^{N} c_k R_{AY}(k) + E[a_m^2]$$

όπου

$$\begin{aligned} R_Y(n-k) &= E[y(mT-n\tau)y(mT-k\tau)] \\ R_{AY}(k) &= E[y(mT-k\tau)a_m] \end{aligned}$$



Στόχος να προσδιοριστεί το $\mathbf{c}_{\mathbf{opt}}$. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_k} = \sum_{n=-N}^{N} c_n R_Y(n-k) - R_{AY}(k), \quad k = 0, \pm 1, ..., \pm N$$

➔Θέτοντας όλες τις μερικές παραγώγους =0 προκύπτει το πιο κάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} R_y(0) & \cdots & R_y(2N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(-2N) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AY}(-N) \\ \vdots \\ R_{AY}(N) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_y(0) & \cdots & R_y(2N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(2N) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AY}(-N) \\ \vdots \\ R_{AY}(N) \end{bmatrix} =$$

➔**Bc=d**

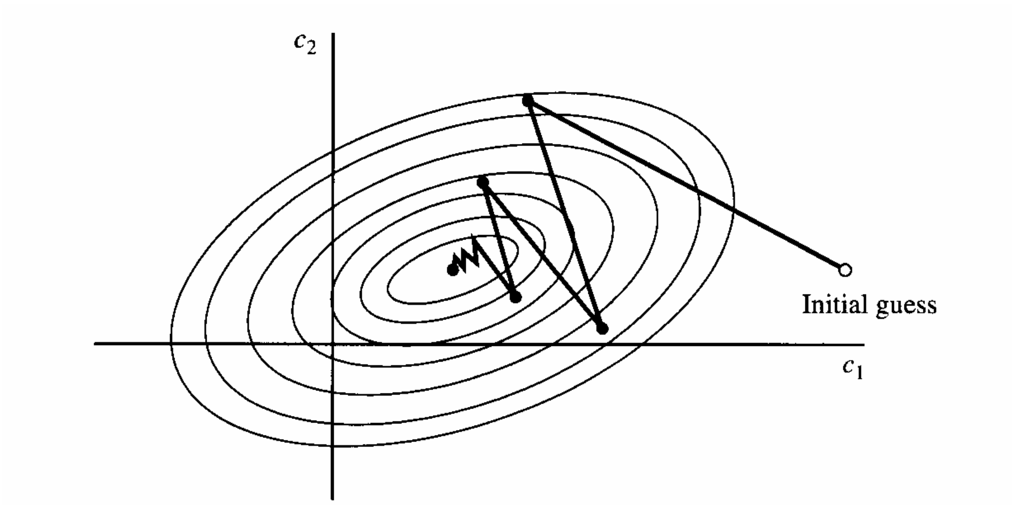
Διάστημα Χρόνου Εκπαίδευσης Εξισωτή

Για να λειτουργήσει λοιπόν ο MMSE εξισωτής απαιτείται για ένα αρχικό χρονικό διάστημα να διαβιβαστεί από τον πομπό γνωστή στο δέκτη ακολουθία συμβόλων $\{\alpha_n\}$. Ο δέκτης χρησιμοποιεί την ακολουθία λήψης $\{y_n\}$ για να υπολογίσει τις ακολουθίες $\{R_y(n)\}$, n=0,1,…,2N και $\{R_{AY}(n)\}$, n=-N,…,0,…,N και κατασκευάζει τον πίνακα **B** και το διάνυσμα **d**. Επιλύεται το σύστημα και υπολογίζονται οι άριστες τιμές των συντελεστών.

Διάστημα Χρόνου Εξίσωσης Σήματος

Έχοντας τους άριστους συντελεστές ο εξισωτής λειτουργεί και εξουδετερώνει το μεγαλύτερο μέρος της ISI.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΙ ΕΞΙΣΩΤΕΣ
(ADAPTIVE EQUALIZERS)



Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΠΙΟ ΑΠΟΤΟΜΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ (STEEPEST DESCENT ΜΕΘΟΔΟΣ) (Lucky 1965)

Αν συμβολίσουμε με

$$\mathbf{g}_k = \text{grad}(\varepsilon(\mathbf{c}))|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_k}$$

όταν έχουμε επιλέξει $\mathbf{c}=\mathbf{c}_k$ συντελεστές.

Η επιλογή $\mathbf{c}_{\kappa+1}=\mathbf{c}_k-\Delta\mathbf{g}_k$ πλησιάζει περισσότερο προς το $\mathbf{c}_{opt}$, δηλαδή τη λύση του συστήματος . $\mathbf{Bc}=\mathbf{d}$

Δ: ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ-ΒΑΘΜΙΔΟΣ

Για $k\to\infty$ $\mathbf{g}_k\to\mathbf{0}$ και $\mathbf{c}_k\to\mathbf{c}_{opt}$

Όμως πόσο είναι το $\mathbf{g}_k$? Αν θυμηθούμε:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial c_k}=\sum_{n=-N}^{N}c_nR_Y(n-k)-R_{AY}(k),\quad k=0,\pm1,\ldots,\pm N \Rightarrow$$

$$\mathbf{g}_k = \text{grad}(\varepsilon(\mathbf{c}))|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_k}=\mathbf{B}\mathbf{c}_k-\mathbf{d}$$

Επομένως $\mathbf{c}_{\kappa+1}=\mathbf{c}_k-\Delta(\mathbf{B}\mathbf{c}_k-\mathbf{d})$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ GRADIENT
Ή
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ LMS (Least Mean Square)

Όταν η χαρακτηριστική του καναλιού μεταβάλλεται με το χρόνο με αποτέλεσμα να υπάρχει συνεχής μεταβολή στα **d** και **B,** τότε τα $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{n})$ και $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{AY}}(\mathrm{n})$ δεν παραμένουν σταθερά και καταφεύγουμε σε εκτιμήσεις για τα $\mathbf{g}_{\mathrm{k}}$, $\mathbf{c}_{\mathrm{k}}$ υπολογίζοντας τα $\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{k}}, \hat{\mathbf{c}}_{\mathrm{k}}$. Στην περίπτωση του Mean Square Error (MSE) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ι-σχύει η πιο κάτω πρόταση: (Widrow 1966)

Αν συμβολίσουμε το διάνυσμα των συντελεστών στην *k* επανάληψη με

$$\mathbf{c}_k = \left(c_{k,-N}, c_{k,-N+1}, \cdots, c_{k,n}, \cdots, c_{k,N}\right)^T$$

τότε το σφάλμα εκτίμησης της $\{a_n\}$

$$\varepsilon(\mathbf{c}_k) = E\left[\left(z(k) - a_k\right)^2\right]$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial c_{k,n}}\varepsilon(\mathbf{c}_k) = \frac{\partial}{\partial c_{k,n}}E\left[\left(z(k)-a_k\right)^2\right] = 2E\left[\left(z(k)-a_k\right)\frac{\partial}{\partial c_{k.n}}\left(z(k)-a_k\right)\right] = 2E\left[\left(z(k)-a_k\right)\frac{\partial}{\partial c_{k.n}}z(k)\right]$$

Θυμηθείτε ότι $z(k)$-a_k=e_k και ότι

$$z(k) = \sum_{n=-N}^{N} c_{k,n}\, y(k-n) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_{k.n}} z(k) = y(k-n)$$

και τελικά:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_{k,n}}\varepsilon(\mathbf{c}_k) = -2E\left[e_k y(k-n)\right], n = -N, \ldots, N, e_k = \left(a_k - z_k\right)$$

και επομένως

$$\mathbf{g} = \nabla\varepsilon\left(\mathbf{c}_k\right) = -2E\left[e_k\begin{bmatrix} y(k+N) \\ y(k+N-1) \\ \vdots \\ y(k-N+1) \\ y(k-N) \end{bmatrix}\right] = -2E\left[e_k\mathbf{y}_k\right]$$

και επομένως

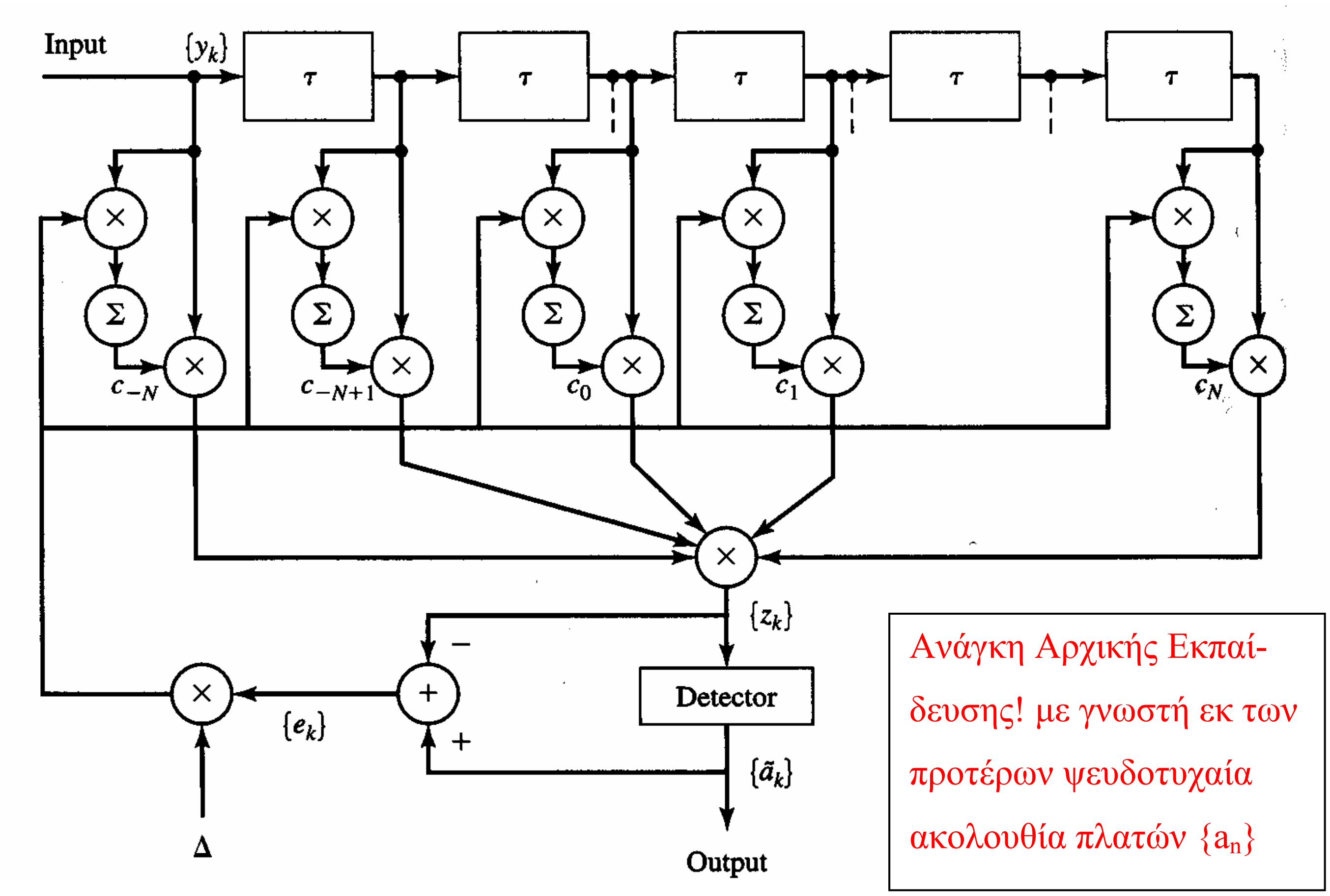
$$\mathbf{c}_{k+1}=\mathbf{c}_k+\Delta \mathrm{E}[e_k\mathbf{y}_k]$$

όπου $\mathbf{y}_k=[y_{k+N}, y_{k+N-1},\ldots, y_{k-N}]^T$ είναι το διάνυσμα που περιέχεται στον καταχωρητή του φίλτρου του εξισωτή τη στιγμή kT και $e_k=\alpha_k-z_k$

Αντί του $\mathrm{E}[e_k\mathbf{y}_k]$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία το $e_k\mathbf{y}_k$ και τελικά οι συντελεστές του φίλτρου προσδιορίζονται από τον επαναληπτικό τύπο

$$\mathbf{c}_{k+1}=\mathbf{c}_k+\Delta\, e_k\mathbf{y}_k$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΟΣ ΣΤΟ MSE (LMS)



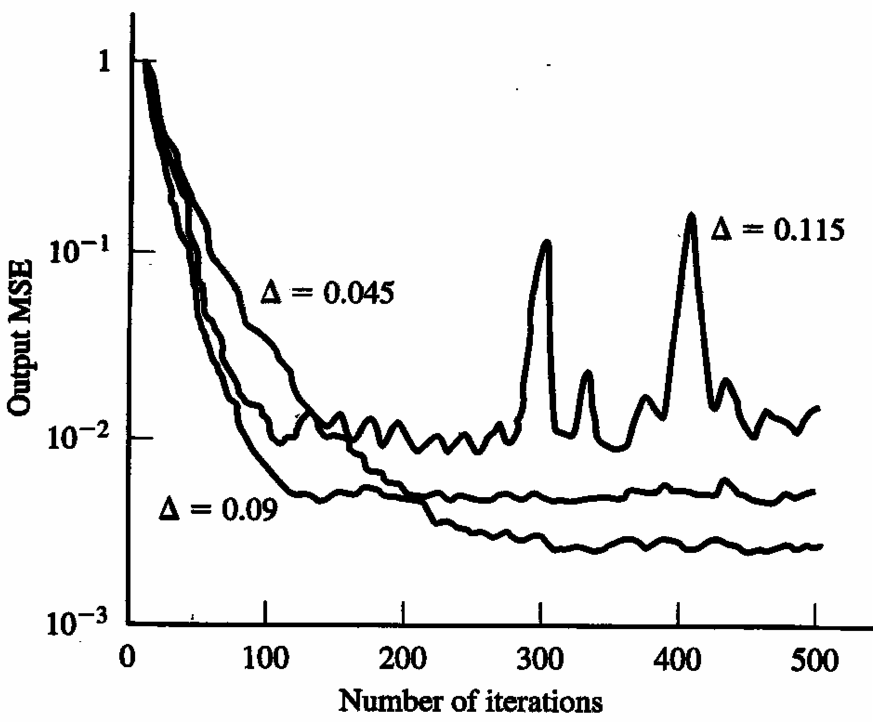
Ανάγκη Αρχικής Εκπαίδευσης! με γνωστή εκ των προτέρων ψευδοτυχαία ακολουθία πλατών $\{a_n\}$

$$e_k = \hat{\alpha}_k - z_k$$

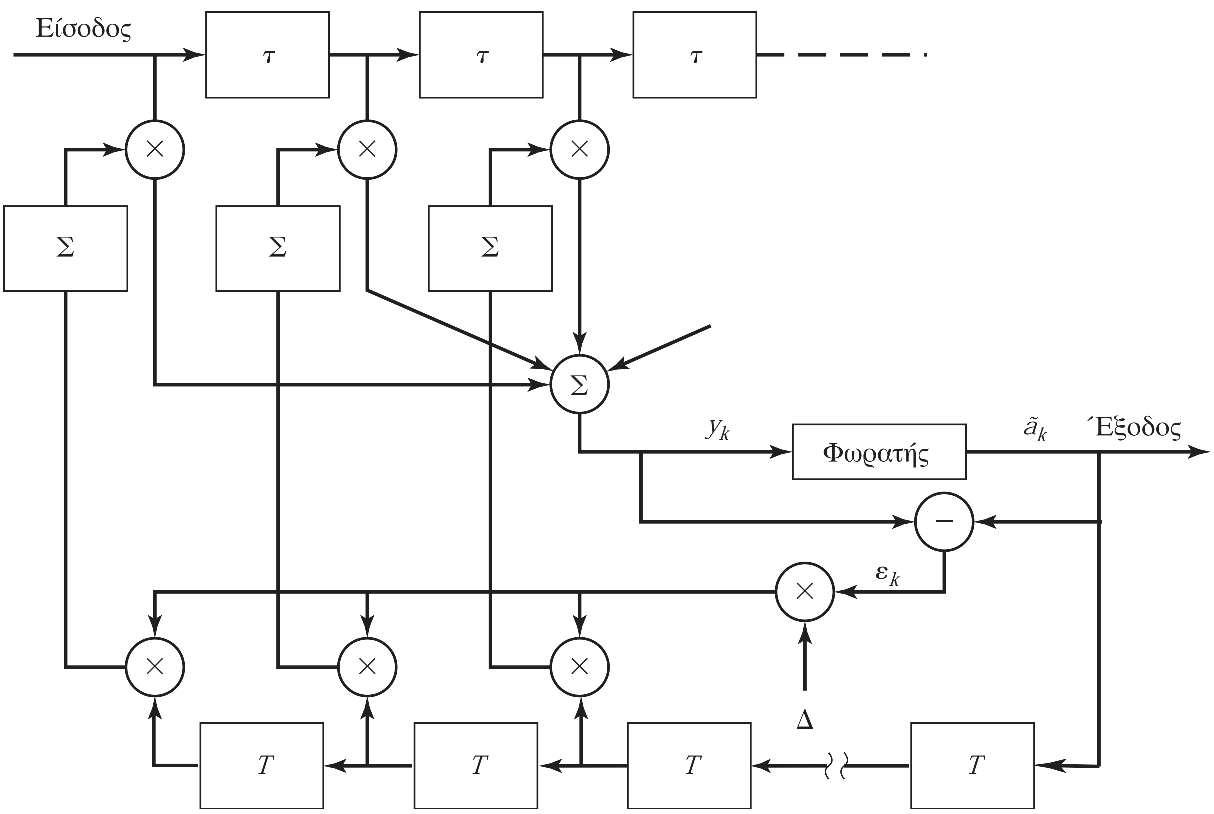
$$c_{k+1,n} = c_{k,n} + \Delta e_k y_{k,-n} \quad n=-N,-N+1,\ldots,0,\ldots,N$$

ΜΙΑ ΚΑΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ Δ ΕΙΝΑΙ:

$$\Delta = \frac{1}{5(2N+1)P_R}$$

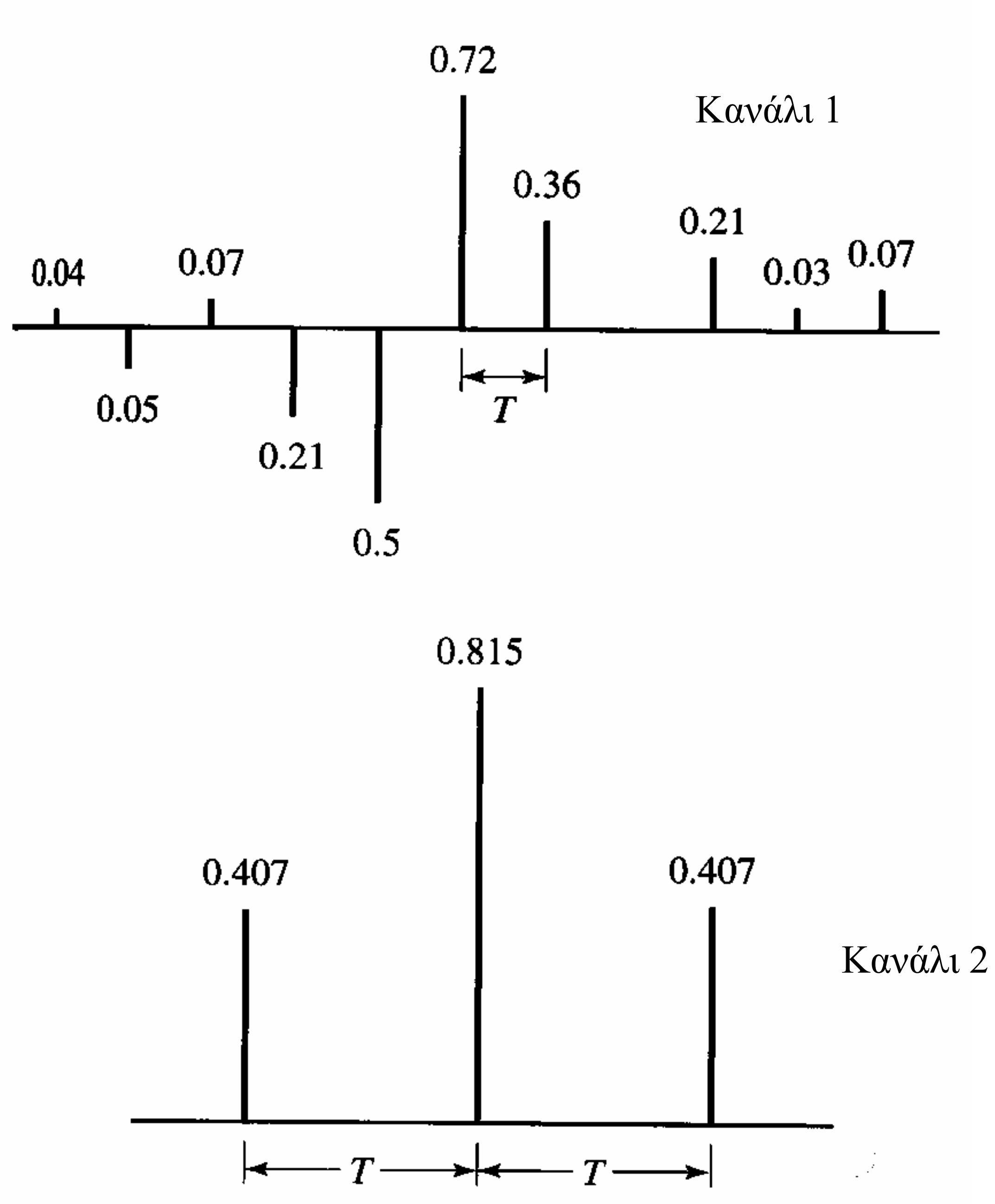


ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΟΥ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥΣ



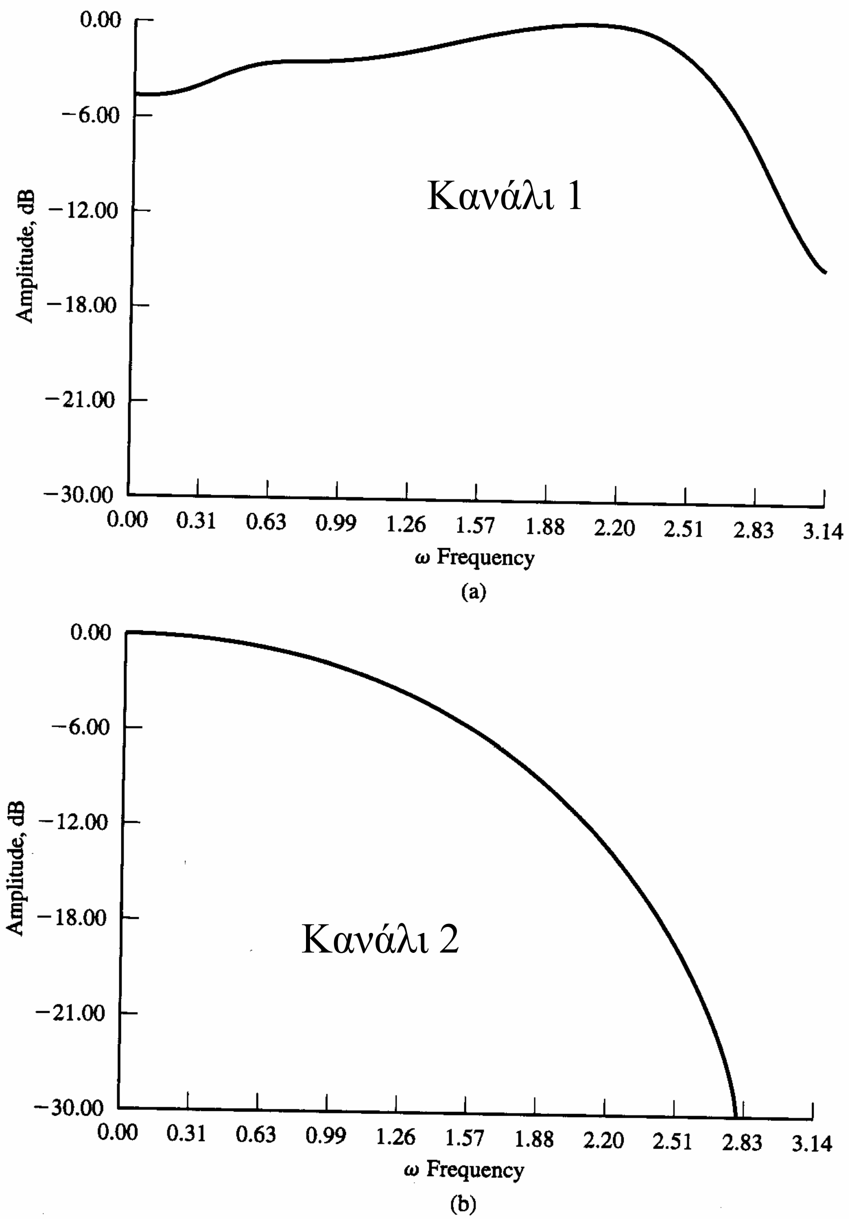
$$g_{k,n}=E[(\hat{\alpha}_k - y_k)\,\hat{\alpha}_{k+N-n}]$$

ISI STO ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΧΡΟΝΩΝ

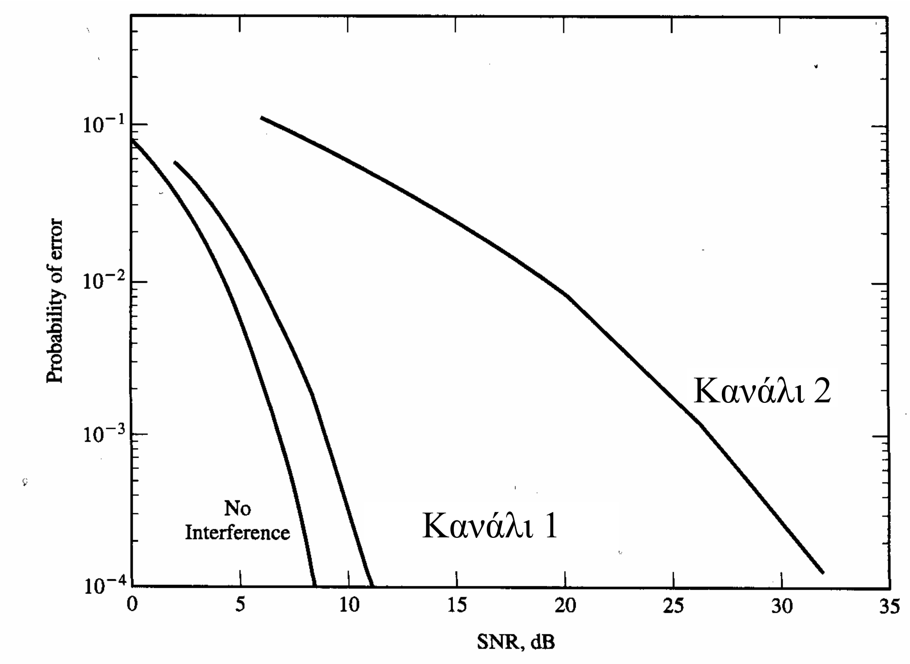


ΠΟΙΟΣ ΤΥΠΟΣ ISI ΈΙΝΑΙ ΠΙΟ ΕΝΤΟΝΟΣ?

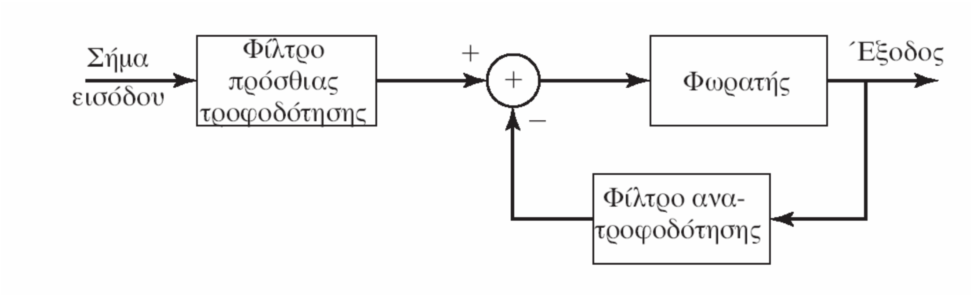
ISI STO ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ



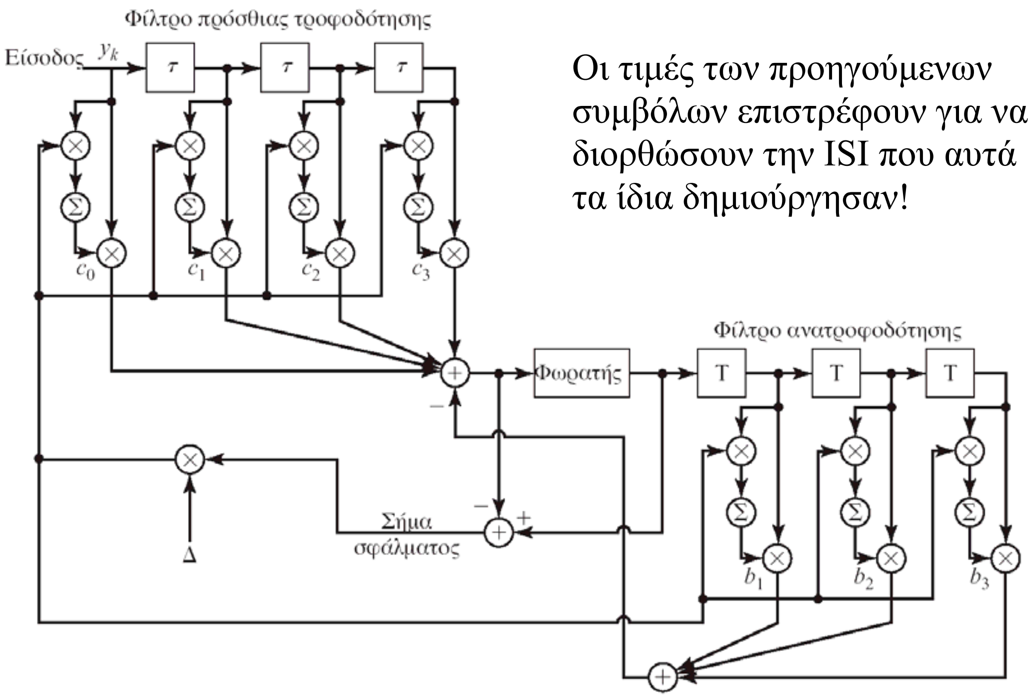
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΜΕ MSE ΕΞΙΣΩΤΗ



ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ DECISION-FEEDBACK EQUALIZER (DFE)



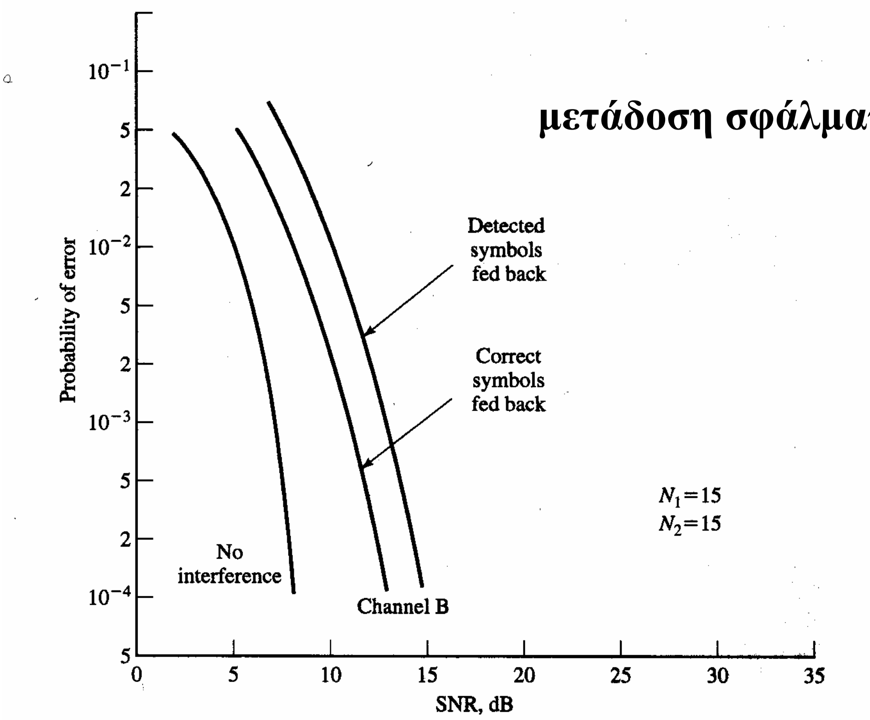
$$z_m = \sum_{n=1}^{N_1} c_n y(mT - n\tau) - \sum_{n=1}^{N_2} b_n \tilde{a}_{m-n}$$

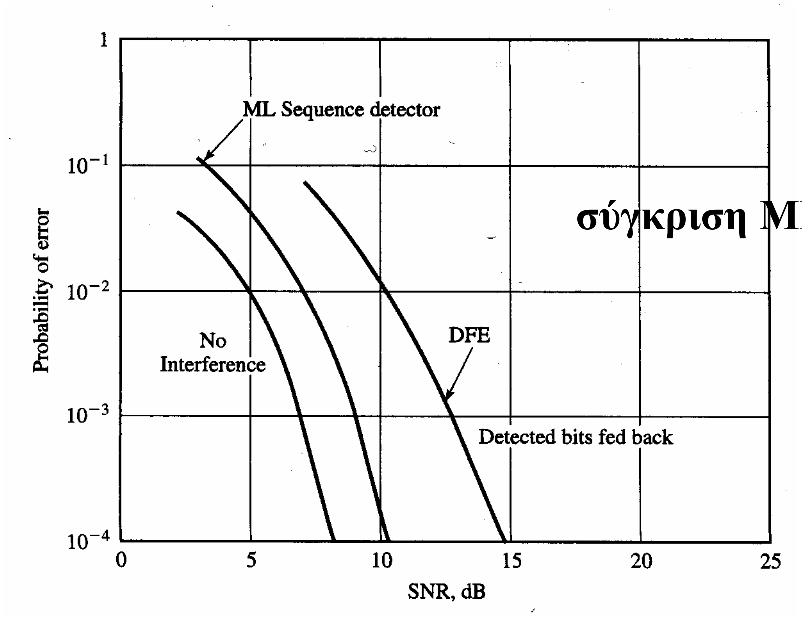


Οι τιμές των προηγούμενων συμβόλων επιστρέφουν για να διορθώσουν την ISI που αυτά τα ίδια δημιούργησαν!

ανατροφοδότηση: ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΥΜΒΟΛΟΥ (Symbol Spaced Equalizer)
πρόσθια τροφοδότηση: ΕΞΙΣΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΛΑΣΜΑ ΣΥΜΒΟΛΟΥ ((Fractionally Spaced Equalizer)

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ DFE



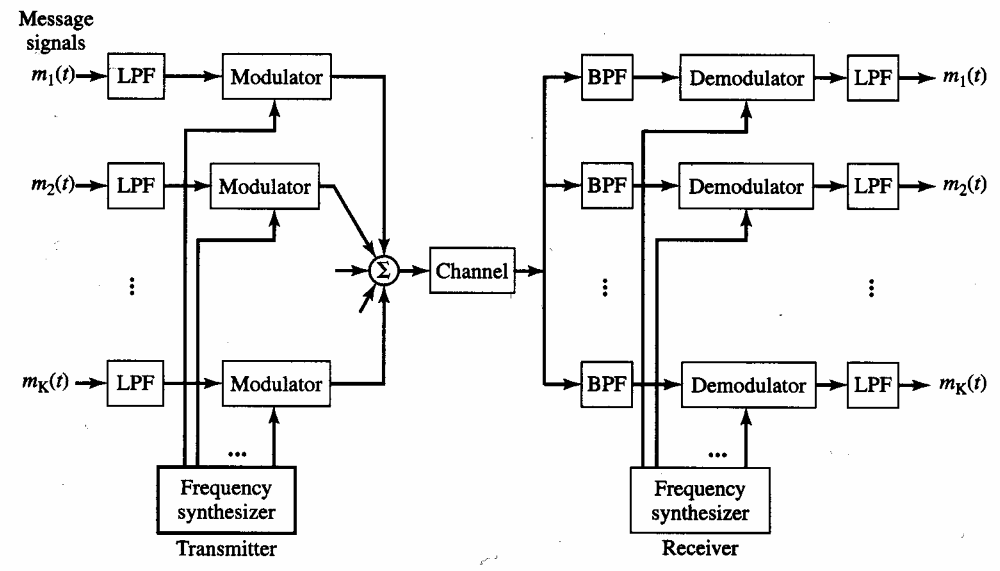


σύγκριση ML και DFE

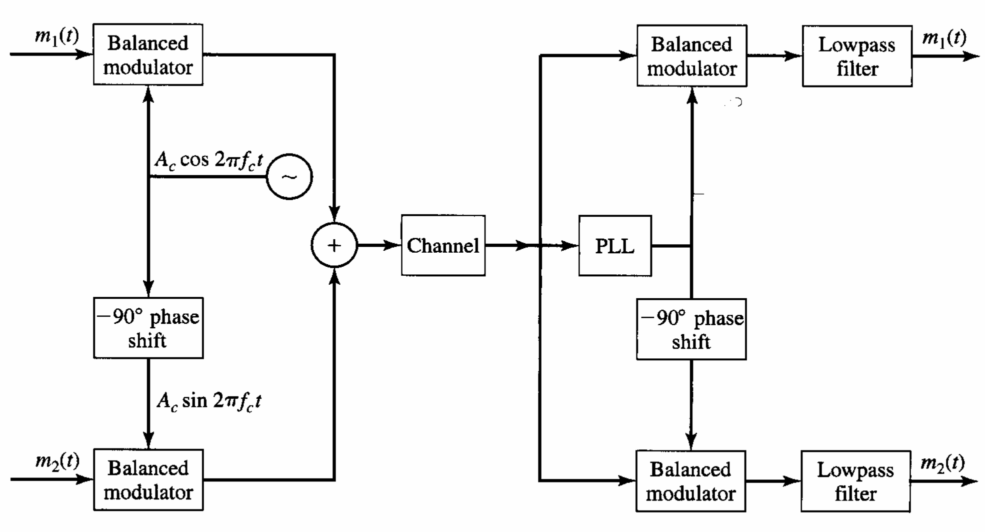
ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

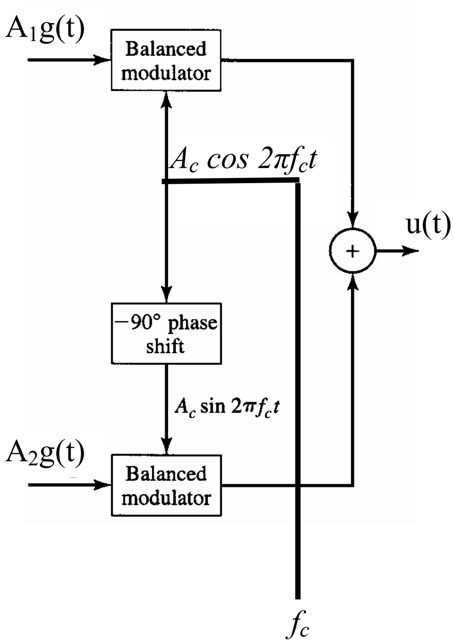
ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEXING (OFDM)

(ΣΥΝΗΘΗΣ) ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ



ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ-ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ QAM ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΒΙΒΑ-ΣΗ 2 ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ $m_1(t),m_2(t)$





$$u(t)=A_1g(t)A_C\cos(2\pi f_C t)+A_2g(t)A_C\sin(2\pi f_C t)$$

$$0<=t<=T$$

όπου

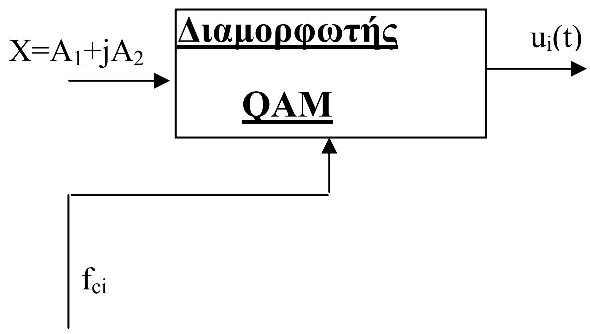
$A_1=-2M_1+1, -2M_1+3,\ldots,-1,1,\ldots,2M_1-3, 2M_1-1$

$A_2=-2M_2+1, -2M_2+3,\ldots,-1,1,\ldots,2M_2-3, 2M_2-1$

ή

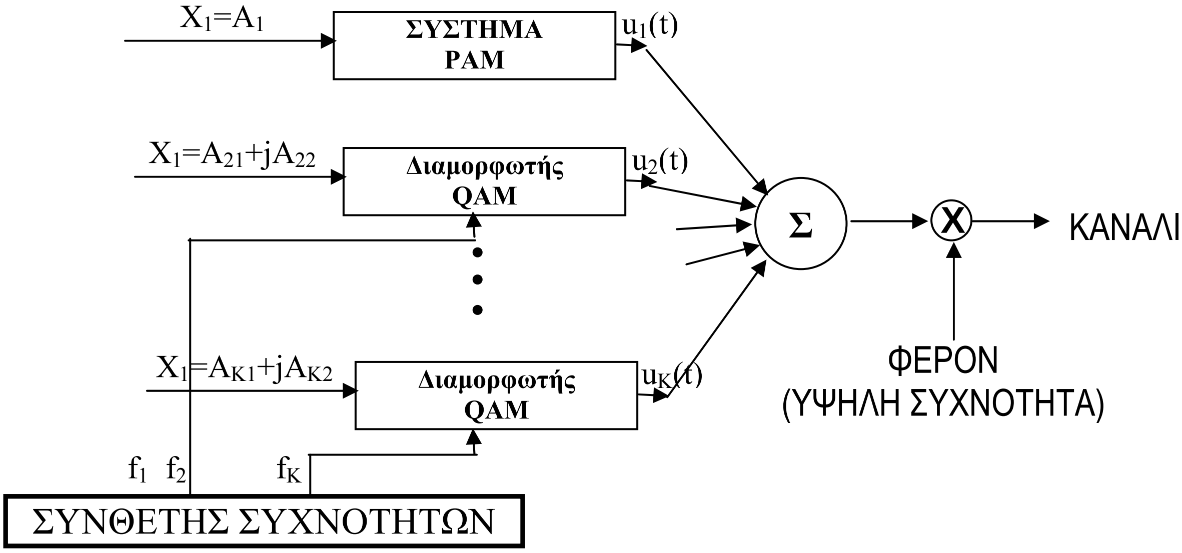
$u(t)=\mathrm{Real}\{x(t)e^{j2\pi fct}\}$, $x(t)=XA_Cg(t)$ όπου $X=A_1+jA_2$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ-ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ QAM ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΒΙΒΑ-ΣΗ 2 ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.



ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ QAM ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΦΕΡΟΥΣΕΣ

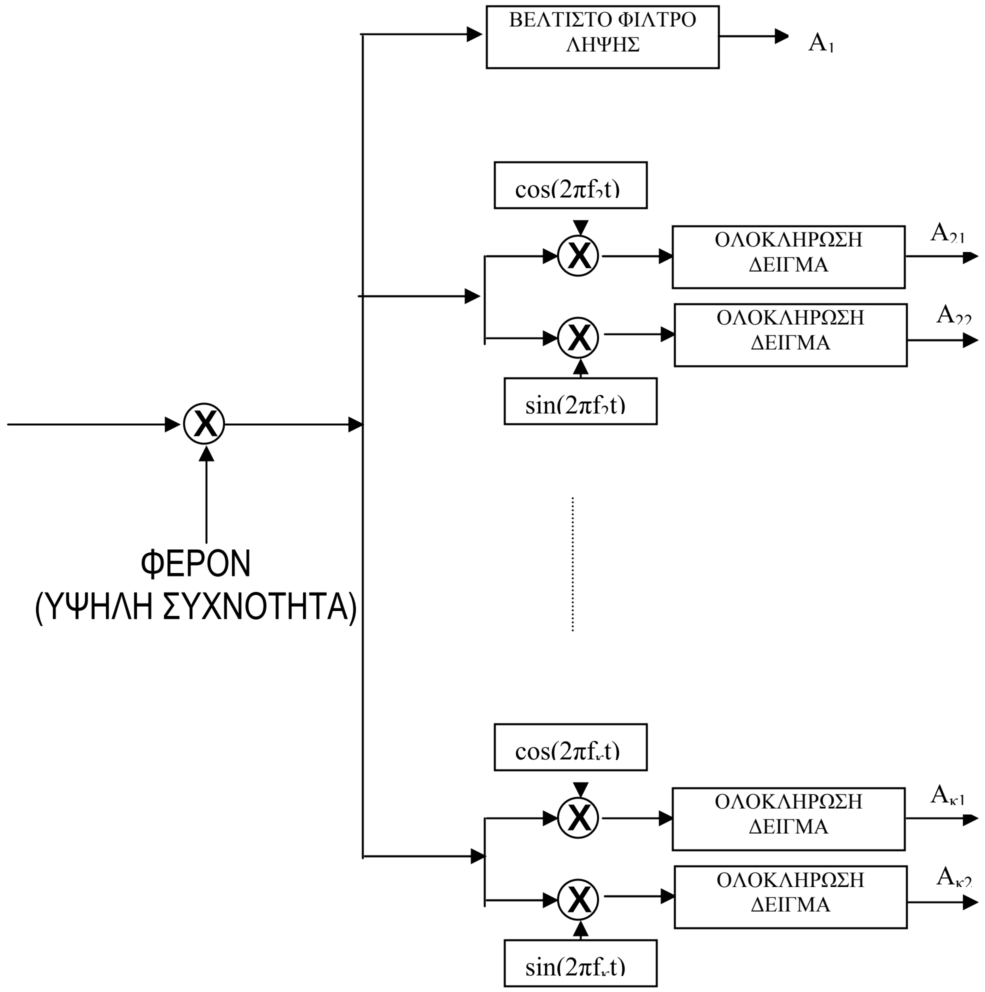
Επιλέγοντας συχνότητες $f_{Ci}=f_i=i\cdot\Delta f$ μπορούμε να λάβουμε g(t)=1 0<=t<=T και να δημιουργήσουμε το πιο κάτω σύστημα:



Ισχύει:

$$\int_0^T \cos(2\pi f_i t+\varphi_i)\cos(2\pi f_j t+\varphi_j)\,dt=\begin{cases}1/2 & \text{όταν } i=j \text{ και } \varphi_i=\varphi_j\\ 0 & \text{όταν } i\neq j\end{cases}$$

Με βάση την πιο πάνω σχέση τα πολυπλεγμένα συστήματα QAM μπορούν να διαχωριστούν στον δέκτη με ένα σύστημα όπως το ακόλουθο:


ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΦΙΛΤΡΟ ΛΗΨΗΣ
A1
cos(2πf2t)
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΕΙΓΜΑ
A21
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΕΙΓΜΑ
A22
sin(2πf2t)
X
ΦΕΡΟΝ
(ΥΨΗΛΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ)
cos(2πfκt)
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΕΙΓΜΑ
Aκ1
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΕΙΓΜΑ
Aκ2
sin(2πfκt)