

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΠΟΛΥΤΟΝΙΚΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ
(DISCRETE MULTITONE TRANSMISSION – DMT SYSTEMS)

Σε μερικές εφαρμογές ψηφιακών καναλιών με υψηλούς ρυθμούς επικοινωνίας το μήκος της ISI ανέρχεται σε εκατοντάδες σύμβολα και αυτή είναι πλέον αδύνατον να εξουδετερωθεί από εξισωτές.

Μια τεχνική για την εξουδετέρωση της ISI στις περιπτώσεις αυτές είναι η χρήση των συστημάτων Διακριτής Πολυτονικής Εκπομπής (Discrete Multitone Transmission-DMT)

Η τεχνική DMT αποτελεί ένα είδος πολυπλεξίας συχρότητας που μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για τα σήματα Ψηφιακών Καναλιών.

Χαρακτηριστικό στα συστήματα DMT είναι ότι δεν υπάρχουν πλέον τηλεπικοινωνιακά κυκλώματα (Φίλτρο Λήψης και Εκπομπής, ταλαντωτές εξισωτές, αποδιαμορφωτές) αλλά όλες οι λειτουργίες γίνονται αποκλειστικά με αλγόριθμους επεξεργασίας σήματος, με βασικό αλγόριθμο τον Fast Fourier Transform (FFT), δηλαδή την ταχεία εκτέλεση του Discrete Fourier Transform (DFT)

Όταν η DMT εκπομπή εφαρμόζεται στο τηλεφωνικό κανάλι είναι γνωστή ως:
ASYMMETRIC DIGITAL SUBSCRIBER LINE –ADSL
ή γενικότερα σε XDSL.

Όταν η DMT τεχνική εφαρμόζεται σε ασύρματο κανάλι είναι γνωστή ως:
“Orthogonal Frequency Division Multiplexing”- OFDM
Εφαρμόζεται σε Ασύρματα Συστήματα Ευρείας Ζώνης (Broadband Wireless
Access -BWA) σε Ασύρματα Δίκτυα Τοπικής Εμβέλειας (WLAN), σε δίκτυα Wi-
Fi και Wi-Max, στην ασύρματη εκπομπή Ψηφιακού Video (DVB) κ.λ.π.

Τόσο στην περίπτωση του ADSL όσο και στην περίπτωση του OFDM η
πολυπλεξία των σημάτων στηρίζεται στη χρήση ορθογώνιων συχνοτήτων
φέροντος τα οποία στο δέκτη θεωρητικά μπορούν να διαχωριστούν με
σύμφωνη αποδιαμόρφωση από αντίστοιχα φέροντα



ADSL Modem και Wi Fi
(OFDM) πομπός.

Συνδέεται με τηλεφωνική
γραμμή εξασφαλίζοντας
επικοινωνία ADSL και
εκπέμπει ασύρματα τα
δεδομένα σε τοπικό δίκτυο.

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DISCRETE FOURIER TRANSFORM-DFT)

Έστω ακολουθία $\{x_n\} n=0,1,\dots,N-1$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier της $\{x_n\}$ ορίζεται η ακολουθία $\{X_k\} k=0,1,\dots,N-1$

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \exp\left[-j2\pi \frac{k \cdot n}{N}\right]$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER (IDFT)

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\left[j2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right]$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\{x_n\} \longleftrightarrow \{X_k\}$$

ΜΙΑ ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ DFT ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ $\{x_n\}$

Έστω ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\} n=0,1,\dots,N-1$ και έστω $\{X_k\} k=0,1,\dots,N-1$ η αντίστοιχη DFT ακολουθία. Για την $\{X_k\}$ ισχύει η πιο κάτω συμμετρική σχέση.

$$X_k = X_{N-k}^* \quad k = 1, \dots, N-1$$

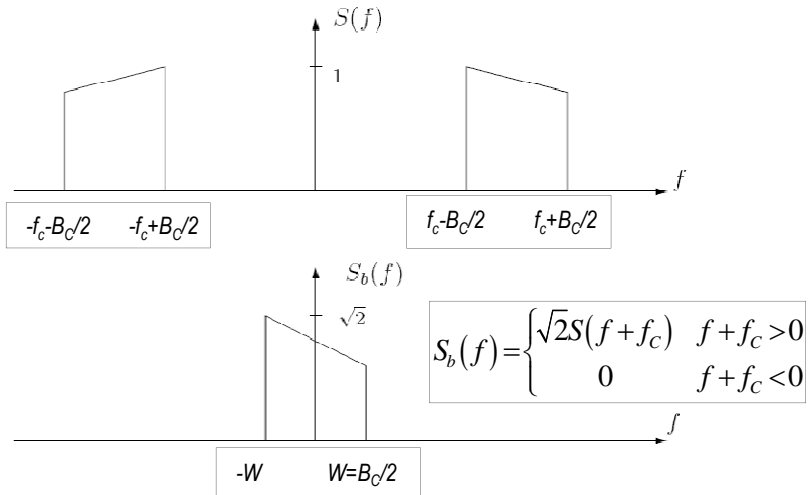
και X_0 =πραγματικός αριθμός

Για παράδειγμα, αν $N=4 \rightarrow$

$$X_0=\text{real}, \quad X_1=X_3^* \text{ και } X_2=X_2^* \text{ (δλδ } X_2 \text{ real)}$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ (BASEBAND
EQUIVALENT MODEL-BEM) ΕΝΟΣ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ

Για ένα πραγματικό ζωνοπερατό σήμα $s(t)$ με Μετ. Fourier $S(f)$ με Hermitian Συμμετρία ορίζεται το ισοδύναμο σήμα βασικής ζώνης $s_b(t)$:



Το ισοδύναμο σήμα βασικής ζώνης :

1. Περιέχει την ίδια πληροφορία με το αρχικό σήμα
2. Έχει την ίδια ενέργεια με το αρχικό σήμα .
3. Εν γένει είναι μιγαδικό. (Προσοχή!! όχι πάντοτε.)

Το ζωνοπερατό σήμα $s(t)$ μπορεί να προκύψει από το ισοδύναμο βασικής ζώνης ως:

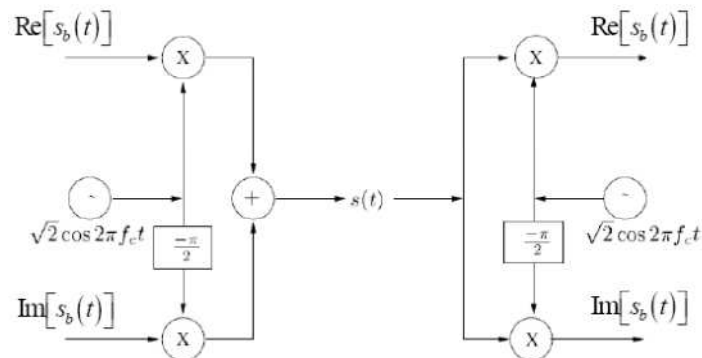
$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [s_b(t) \exp(j2\pi f_c t)]$$

$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [s_b(t)] \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{2} \operatorname{Im} [s_b(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

Το ζωνοπερατό σήμα $s(t)$ μπορεί να προκύψει από το
ισοδύναμο βασικής ζώνης ως:

$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [s_b(t) \exp(j2\pi f_c t)]$$

$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [s_b(t)] \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{2} \operatorname{Im} [s_b(t)] \sin(2\pi f_c t)$$



Παραδείγματα Ισοδύναμου Σήματος Βασικής Ζώνης (BEM)

A. Ζωνοπερατό Σήμα Ορθογώνιας Διαμόρφωσης, QAM

Εξίσωση του σήματος QAM

$$u(t) = v_c(t) \cos 2\pi f_c t \quad \square \quad v_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\text{όπου} \quad v_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nc} g_T(t - nT)$$

$$v_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ns} g_T(t - nT)$$

και

$$\alpha_{nc} = m_c A, \alpha_{ns} = m_s A, m_c, m_s = -(M-1), \dots, -1, 1, \dots, (M-1)$$

Εξίσωση του QAM

$$u(t) = v_c(t) \cos(2\pi f_c t) - v_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$v_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nc} g_T(t - nT) \quad a_{nc} = m_c A, \quad a_{ns} = m_s A,$$

$$v_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ns} g_T(t - nT) \quad m_c, m_s = -(M-1), \dots, -1, 1, \dots, (M-1)$$

Εξίσωση του BEM

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v_c(t) + jv_s(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT), \quad a_n = a_{nc} + ja_{ns}$$

Εξίσωση του Ζωνοπερατού
QAM

$$u(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [v(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

Discrete Multitone Transmission –DMT

Διακριτή Πολυτονική Εκπομπή

Εφαρμόζεται για τη δημιουργία Ψηφιακών Καναλιών που χρησιμοποιούν μεγάλο εύρος ζώνης επιτυγχάνοντας υψηλούς ρυθμούς διαβίβασης χωρίς ανάγκη χρήσης Εξισωτών.

Όταν η DMT τεχνική εφαρμόζεται στο τηλεφωνικό κανάλι είναι γνωστή ως:
ASYMMETRIC DIGITAL SUBSCRIBER LINE –ADSL
ή γενικότερα σε XDSL

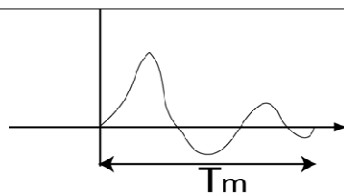
Όταν η DMT τεχνική εφαρμόζεται σε ασύρματο κανάλι είναι γνωστή ως:
“Orthogonal Frequency Division Multiplexing”- OFDM
Εφαρμόζεται σε Ασύρματα Συστήματα Ευρείας Ζώνης (Broadband Wireless Access -BWA) σε Ασύρματα Δίκτυα Τοπικής Εμβέλειας (WLAN), σε δίκτυα Wi-Fi και Wi-Max, στην ασύρματη εκπομπή Ψηφιακού Video (DVB) κ.λ.π.

Οι βασικές λειτουργίες της DMT διαφοροποιούνται σε κάθε μια από τις πιο πάνω εφαρμογές και προσαρμόζονται στις ιδιομορφίες της εφαρμογής. Επίσης οι λειτουργίες αυτές εκσυγχρονίζονται συνεχώς όταν εφαρμόζονται σε πιο σύγχρονες εφαρμογές.

Στην παρουσίαση αυτή προσπαθούμε να δώσουμε τη βασική αρχή λειτουργίας της DMT, που είναι κοινή για όλες τις εφαρμογές. Για την πλήρη μελέτη ο αναγνώστης πρέπει να ανατρέξει στις επί μέρους ασύρματους τύπους επικοινωνιών και δικτύων.

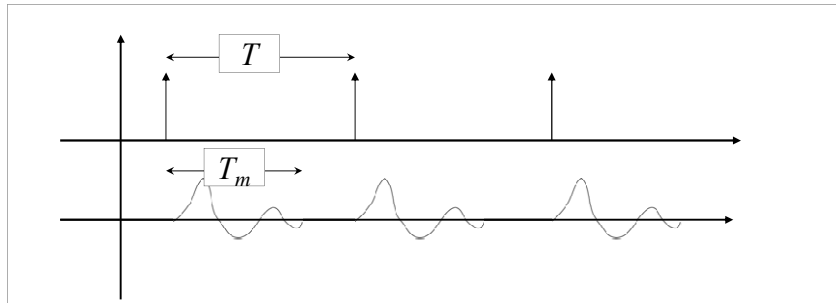
ΓΙΑΤΙ ΜΕ ΤΗΝ DMT ΔΕΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙΤΑΙ ISI

Κρουστική Απόκριση, T_m : (Χρονική Διάχυση Καναλιού)

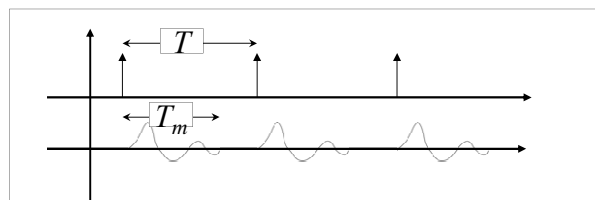


$$T_m = 1/W$$

Αν επιλεγεί να στέλνονται τα σύμβολα ενός Συστήματος με χρονική απόσταση $T \gg T_m$ τότε δεν θα δημιουργείται ISI!



Διαβίβαση Διακριτών Δεδομένων Χωρίς ISI.



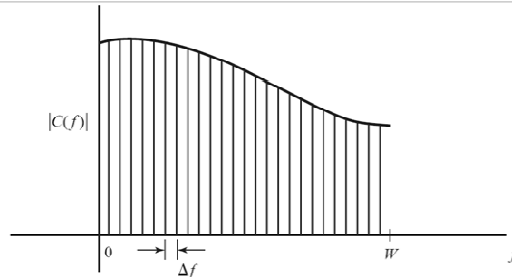
Στο πιο πάνω Σύστημα η Διαβίβαση Δεδομένων γίνεται χωρίς ISI αλλά με πολύ μικρότερο ρυθμό από ότι στα γνωστά Συστήματα.

Πράγματι: Ισχύει $T_m = 1/W \rightarrow T \gg 1/W \rightarrow R \ll W$.

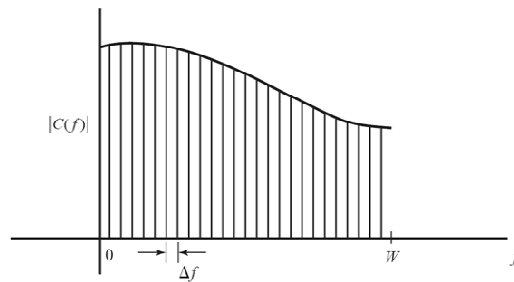
Η Κατάσταση βελτιώνεται σημαντικά αν κατασκευαστεί εξαιρετικά μεγάλο αλφάβητο συμβόλων. Τότε με κάθε σύμβολο θα μεταδίδεται μεγάλος αριθμός bits, έστω l . Έτσι ο ρυθμός $R_b = lR$ αυξάνει σημαντικά και το R_b/W γίνεται τελικά μεγαλύτερο από 1.

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα κανάλι βασικής ζώνης με εύρος ζώνης W .

Η τεχνική που ακολουθείται για την αύξηση του l είναι η ακόλουθη:

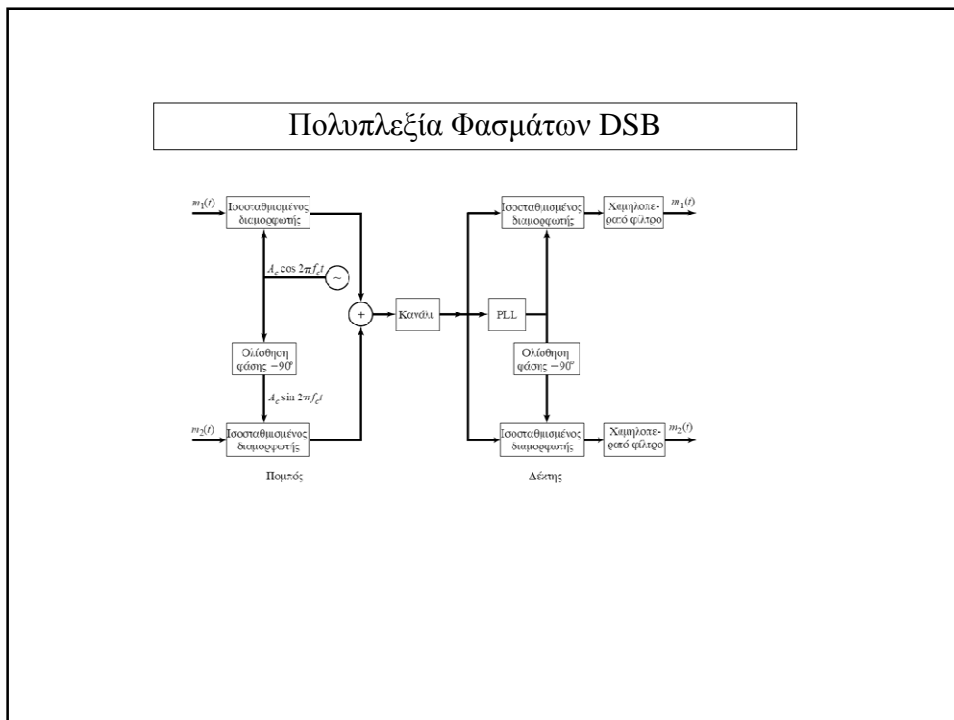
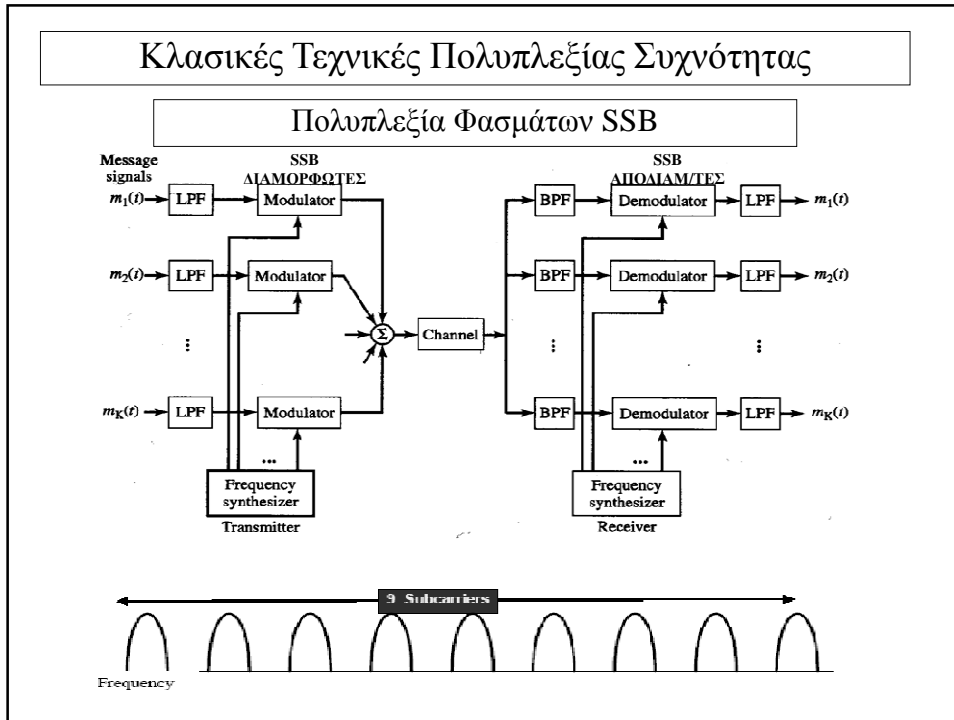


1. Διαχωρίζεται το διαθέσιμο εύρος W σε K υποζώνες εύρους $\Delta f = W/K$.
2. Για κάθε υποζώνη (θεωρητικά) μπορεί να κατασκευαστεί ένα Τηλεπικοινωνιακό Σύστημα (Ψηφιακό Κανάλι) με ρυθμό $R = \Delta f = 1/T \rightarrow T = K/W$. Επιλέγοντας αρκετά μεγάλο $K \rightarrow T = K/W \gg T_m$.
3. Τα K κανάλια αποτελούν καταρχήν ένα σύστημα πολυπλεξίας συχνότητας δημιουργώντας ένα σύνθετο σύμβολο διάρκειας $T \gg T_m$.

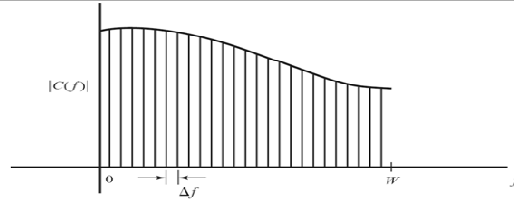


Παρατηρείστε ότι κάθε μια από τις ζώνες στις οποίες διαχωρίστηκε το κανάλι μοιάζει με ένα υποκανάλι μη επιλεκτικό σε συχνότητα. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα αν το αρχικό κανάλι είναι επιλεκτικό. Επίσης αν η απόκριση του καναλιού αλλάζει με το χρόνο για κάθε υποκανάλι αλλάζει μόνο η σταθερή απόκριση του.

Πώς όμως θα γίνει η πολυπλεξία;



**Μία Νέα Τεχνική Πολυπλεξίας Συχνότητας!
Χρησιμοποιείστε ορθογώνια Φέροντα!**



Οι φέρουσες στα Ψηφ. Κανάλια που δημιουργήθηκαν επιλέγονται έτσι ώστε να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Για να επιτευχθεί αυτό γενικά αρκεί κάθε φέρουσα f_i να ισούται με

$$f_i = f_1 + (i-1)\Delta f, \quad i=1,2,\dots,K, \quad \Delta f=1/T$$

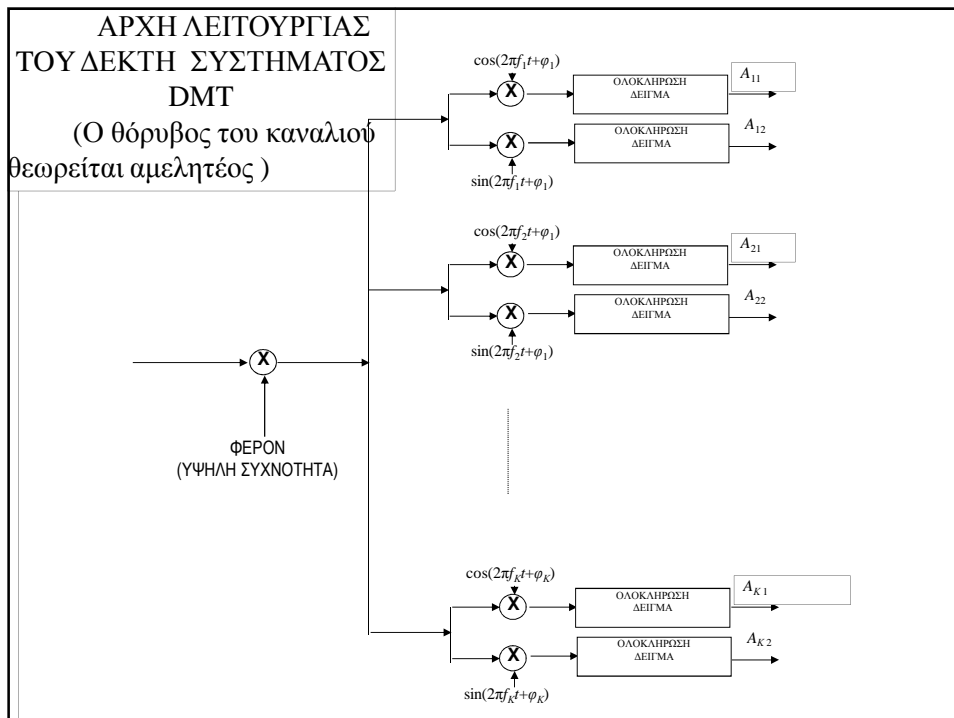
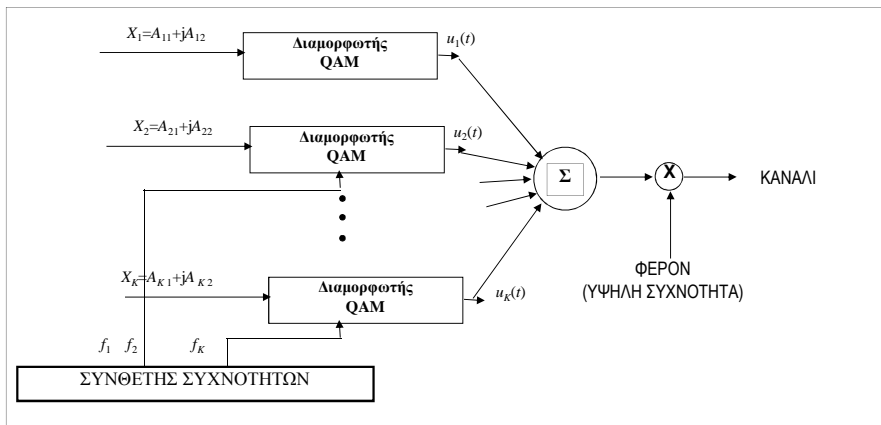
Αν τηρηθεί ο κανόνας αυτός αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^T \sin(2\pi f_k t + \phi_k) \sin(2\pi f_j t + \phi_j) dt = 0 \quad \text{για } k \neq j$$

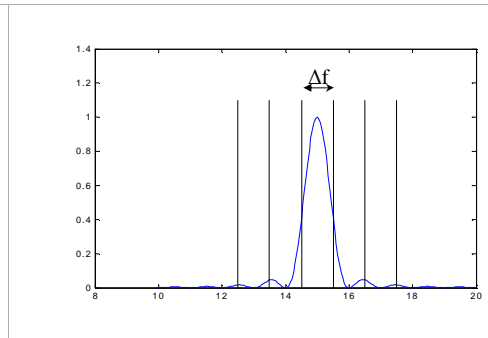
Η ορθογωνιότητα των φερουσών εξασφαλίζει ότι τα διαβιβαζόμενα σύμβολα θα διαχωριστούν στο δέκτη κατά την σύμφωνη αποδιαμόρφωση και δεν χρειάζεται κανένας διαχωρισμός των φασμάτων των κυματοσειρών των υποκαναλιών.

Αντίθετα δεν χρειάζεται καν περιορισμός στο εύρος ζώνης ούτε φίλτρο εκπομπής ώστε να επιτευχθεί μορφοποίηση των λαμβανόμενων παλμών, αλλά αφήνεται το φάσμα του κάθε υποκαναλιού να εισχωρήσει στα γειτονικά του κανάλια.

Η νέα αυτή τεχνική εκπομπής δεδομένων καλείται:
**Διακριτή Πολυτονική Εκπομπή (Discrete Multitone
 Transmission-DMT)**

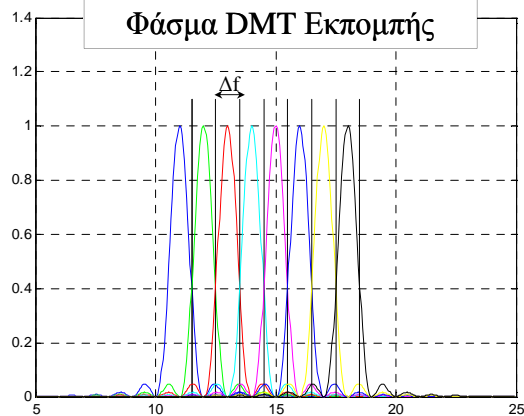


Φάσμα Εκπομπής ενός Συστήματος Ψηφιακής Διαμόρφωσης



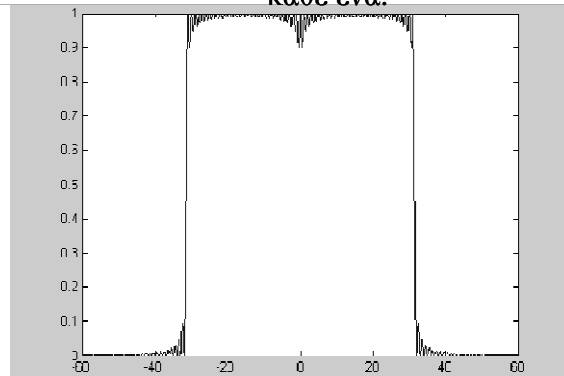
Το φάσμα εκπομπής ενός ζωνοπερατού συστήματος Ψηφ. Διαμόρφωσης με ρυθμό $R = \Delta f$ και χωρίς μορφοποιημένες κυματομορφές, εκτείνεται σε μια φασματική ζώνη πολλαπλάσια του Δf !

Φάσμα DMT Εκπομπής



Το φάσμα ισχύος, λοιπόν, ενός υποκαναλιού εισχωρεί και παρεμβάλλεται με τα γειτονικά του κανάλια. Εν τούτοις αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αφού ο διαχωρισμός των συμβόλων εξασφαλίζεται στον δέκτη λόγω της ορθογωνιότητας των φερουσών.

Ολικό Φάσμα Εκπομπής DMT με 32 Κανάλια Εύρους $\Delta f=1$ Hz το κάθε ένα.



Όπως προκύπτει από το πιο πάνω διάγραμμα σε ένα DMT Σύστημα σχεδόν το σύνολο του φάσματος ισχύος περιορίζεται στη φασματική ζώνη $W=K\Delta f$ και μόνο αμελητέα ισχύς αυτού βρίσκεται εκτός ζώνης. Με τον τρόπο αυτό τελικά διαβιβάζονται περίπου 1σύμβολο/sec/Hz.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ DMT ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΜΕΣΩ DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)

Όπως είδαμε πιο πάνω ένα σύστημα με DMT χρησιμοποιείται χωρίς μορφοποίηση παλμών και δεν απαιτεί Εξισωτές. Από την περιγραφή φαίνεται να απαιτούνται μόνο οι ταλαντωτές των φερουσών στον πομπό και οι ολοκληρωτές με τους τοπικούς ταλαντωτές στον δέκτη. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την τεχνική, με την οποία και αυτή η σκευή απαλείφεται και η όλη λειτουργία γίνεται τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη μόνο με επεξεργασία σήματος, χρησιμοποιώντας DFT (Discrete Fourier Transform) και IDFT (Inverse DFT).

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ DMT ΜΕΣΩ DFT

Ζωνοπερατό DMT (OFDM)

Έστω ότι έχει προσδιοριστεί ο αριθμός των υποκαναλιών, K , και έστω $B_c=2W$ το εύρος ζώνης ενός διατιθέμενου ζωνοπερατού καναλιού. Τότε το εύρος ζώνης, Δf , κάθε υποκαναλιού είναι:

$$\Delta f = B_c / K$$

Η κεντρική συχνότητα f_k κάθε υποκαναλιού ισούται με $f_k + f_c$

$$f_k + f_c = f_c - W + k\Delta f - \Delta f/2, \quad k=1,2,\dots,K$$

$$f_k = f_0 + k\Delta f, \quad f_0 = -W - \Delta f/2, \quad k=1,2,\dots,K$$

Από την ακολουθία δυαδικών δεδομένων διαχωρίζονται:

B_f bits που χωρίζονται σε K ομάδες με πλήθος b_k bits η κάθε μία, $k=1,2,\dots,K$.

Ας είναι X_1, X_2, \dots, X_K τα αντίστοιχα σύμβολα .

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} [X_k \exp(j2\pi(f_k + f_c)t)] \quad 0 \leq t < T \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^K [X_k \exp(j2\pi f_k t) \exp(j2\pi f_c t)] \quad 0 \leq t < T \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[\left[\sum_{k=1}^K X_k \exp(j2\pi f_k t) \right] \exp(j2\pi f_c t) \right] \quad 0 \leq t < T \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

και προκύπτει ότι το σήμα βασικής ζώνης είναι:

$$x_b(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^K [X_k \exp(j2\pi f_k t)] \quad 0 \leq t \leq T \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

Καθώς το σήμα $x_b(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης $W=B_c/2$ το στιγμιότυπο $0 < t < T$ μπορεί να κατασκευαστεί από δείγματά του με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > = 2W$

Καθώς το σήμα $x_b(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης $W=B_c/2$ μπορεί αυτό να κατασκευαστεί από δείγματά του με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$

Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε $N > K$ με N δύναμη του 2, τέτοιο ώστε $f_s = N\Delta f$ και θέτουμε $t = n/f_s = n/(N\Delta f)$ υπολογίζοντας το $x_b(n)$ για N δείγματα, τα $n=0,1,\dots,N-1$

$$x_b(n) = x_b(nT_s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^K \left[X_k \exp\left(j2\pi f_k \frac{n}{N \times \Delta f} \right) \right] \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

Η πιο πάνω σειρά αθροισμάτων μπορεί να υπολογιστεί με τον αντίστροφο DFT μέσω ενός IFFT ελαττώνοντας σημαντικά το πλήθος των πράξεων Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την ακολουθία

$$Y_n :$$

Η πιο πάνω σειρά αθροισμάτων μπορεί να υπολογιστεί με τον αντίστροφο DFT μέσω ενός IFFT ελαττώνοντας σημαντικά το πλήθος των πράξεων Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την ακολουθία

$$Y_n :$$

$$Y_0 = 0$$

$$Y_k = X_k, \quad k=1,2,\dots,K$$

$$Y_k = 0 \quad k=K+1,\dots,N-1$$

$$x_b(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[Y_k \exp\left(j2\pi f_k \frac{n}{N \times \Delta f} \right) \right] \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

$$x_b(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(j2\pi \frac{f_0 n}{N \times \Delta f} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \left[Y_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{N} \right) \right] \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad f_k = f_0 + k\Delta f$$

$$x_b(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(j2\pi \frac{f_0 n}{N \times \Delta f}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \left[Y_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{N}\right) \right] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_b(n) = \frac{\sqrt{2N}}{2} \exp\left(j2\pi \frac{f_0 n}{N \times \Delta f}\right) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left[Y_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{N}\right) \right] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_b(n) = c_n \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left[Y_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{N}\right) \right], c_n = \frac{\sqrt{2N}}{2} \exp\left(j2\pi \frac{f_0 n}{N \times \Delta f}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$[x_b(0), x_b(1), \dots, x_b(N-1)]^T = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T \times \text{IDFT}([Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}])$$

Όπου ο πιο πάνω πολλαπλασιασμός γίνεται στοιχείο προς στοιχείο μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Από τον τελευταίο τύπο προκύπτει ότι τα δείγματα του ισοδύναμου βασικής ζώνης σήματος $x_b(t)$ με διάρκεια ενός συμβόλου OFDM που θα μεταφέρει K σύμβολα θα υπολογιστεί με $M \log_2(N) + N = M \log_2(2N)$ πράξεις.

Εδώ πρέπει να προσθέσουμε ότι για διευκόλυνση της φώρασης στο δέκτη, πρέπει στα στοιχεία της ακολουθίας $\{x_{bn}\}$ να προσαρτηθεί στην αρχή της ακολουθίας ένα “κυκλικό πρόθεμα” (*cyclic prefix*), δηλαδή να επαναληφθούν στην αρχή τα L τελευταία δείγματα της $\{x_{bn}\}$. Το L επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει:

$$LT_s > \max(T_m)$$

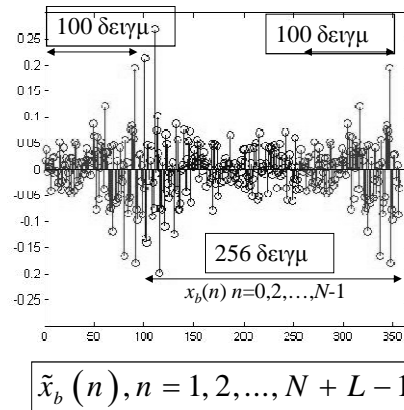
Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται η ακολουθία

$$\tilde{x}_b(n), n = 0, 1, \dots, N + L - 1$$

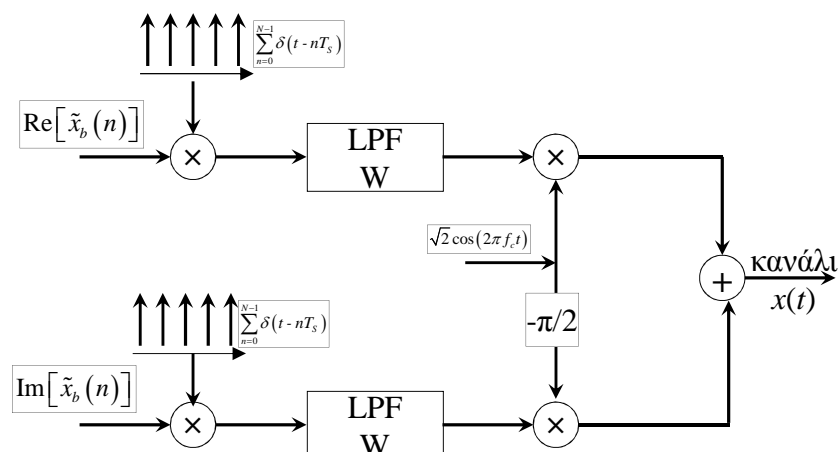
Η οποία αντιστοιχεί πλέον σε σήμα διάρκειας $T + LT_s$, δηλ κάθε σύμβολο DMT αυξάνει συνήθως τη διάρκειά του περίπου κατά 10%-15%

Κυκλικό Πρόθεμα στη Βασική στο OFDM

Παράδειγμα συμβόλου DMT που περιλαμβάνει και το κυκλικό πρόθεμα, ήτοι $N+L$ δείγματα συνολικά.



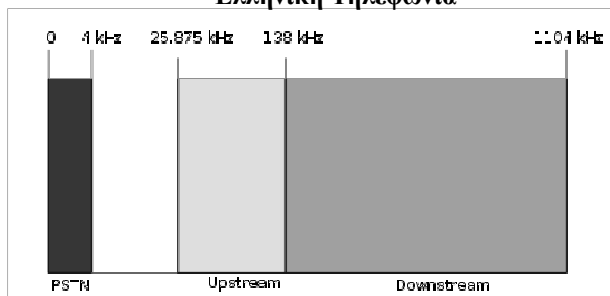
Βαθμίδα εξόδου του Πομπού OFDM



ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ DMT ΜΕΣΩ DFT

DMT Βασικής Ζώνης (ADSL)

Τυπικές Συχνότητες που Χρησιμοποιούνται για Ομιλία και ADSL στην Ελληνική Τηλεφωνία



Χρησιμοποιούνται ζώνες με εύρος ζώνης $\Delta f = 4.3125$ kHz που αντιστοιχούν σε $K=26$ κανάλια για το upstream και 224 κανάλια για το downstream. Όταν δεν υπάρχει ανάγκη για την αποστολή δεδομένων χρησιμοποιούνται όλα τα 250 κανάλια για λήψη.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ DMT ΜΕΣΩ DFT

DMT Βασικής Ζώνης (ADSL)

Έστω ότι έχει προσδιοριστεί ο αριθμός των υποκαναλιών, K , και έστω W το εύρος ζώνης του διατιθέμενου καναλιού. Τότε το εύρος ζώνης, Δf , κάθε υποκαναλιού είναι:

$$\Delta f = W/K$$

Η κεντρική συχνότητα του κάθε υποκαναλιού $f_k = k\Delta f$ $k=0,1,\dots,K-1$.

Το ADSL δεν χρησιμοποιεί τα υποκανάλια 0 και 1 με συχνότητες στην περιοχή 0-6 KHz αφήνοντάς αυτά κενά ώστε οι αντίστοιχες συχνότητες να χρησιμοποιούνται για την ομιλία.

Από την ακολουθία δυαδικών δεδομένων διαχωρίζονται:

B_f bits που χωρίζονται σε $K-2$ ομάδες με πλήθος b_k bits η κάθε μία, $k=2,\dots,K-1$.

Ας είναι X_2, \dots, X_{K-1} τα αντίστοιχα σύμβολα .

Το σήμα, λοιπόν, $x(t)$ που θα κατασκευάσουμε για το πρώτο ADSL σύμβολο:

$$x(t) = \sum_{k=2}^{K-1} \operatorname{Re} \left[X_k \exp(j2\pi f_k t) \right] \quad 0 \leq t < T \quad f_k = k\Delta f$$

Καθώς το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης W μπορεί αυτό να κατασκευαστεί από δείγματά του με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s >= 2f_{max}$ όπου f_{max} η μεγαλύτερη συχνότητα του καναλιού.

Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε $N > K$ με N δύναμη του 2, τέτοιο ώστε $f_s = 2N\Delta f > 2f_{max}$ και θέτουμε $t = n/f_s = n/(2N\Delta f)$ υπολογίζοντας το $x(n)$ για $n=0,1,\dots,2N-1$

$$x(nT_s) = x(n) = \sum_{k=2}^{K-1} \operatorname{Re} \left[X_k \exp(j2\pi f_k nT_s) \right] \quad 0 \leq t < T \quad f_k = k\Delta f$$

$$n = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^{K-1} X_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{2N}\right) + \sum_{k=2}^{K-1} X_k^* \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{2N}\right) \right], n = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Θέτοντας στο δεύτερο άθροισμα $k = 2N - \lambda$

$$x(n) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^{K-1} X_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{2N}\right) + \sum_{\lambda=2N-2}^{2N-K+1} X_{2N-\lambda}^* \exp\left(-j2\pi \frac{(2N-\lambda)n}{2N}\right) \right]$$

$$, n = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Παρατηρείστε ότι ισχύει:

$$\exp\left(-j2\pi \frac{(2N-\lambda)n}{2N}\right) = \exp\left(j2\pi \frac{\lambda n}{2N}\right)$$

οπότε

$$x(n) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^{K-1} X_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{2N}\right) + \sum_{\lambda=2N-K+1}^{2N-2} X_{2N-\lambda}^* \exp\left(j2\pi \frac{\lambda n}{2N}\right) \right]$$

$$, n = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Ορίζουμε την ακολουθία:

$$Y_0=0, Y_L=0 \quad Y_k=0.5X_k \text{ για } 2 \leq k \leq K-1, \quad Y_k=0 \text{ για } K \leq k \leq 2N-K, \\ Y_k=0.5X_{2N-k}^* \text{ για } 2N-K+1 \leq k \leq 2N-1$$

$$x(n) = \left[\sum_{k=0}^{2N-1} Y_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{2N}\right) \right], 0 \leq n < 2N-1$$

$$x(n) = \sqrt{2N} \left[\text{IDFT}[Y_k, k=0,1,\dots,2N-1] \right], 0 \leq n < 2N-1$$

Όπως και στο ζωνοπερατό κανάλι έτσι και εδώ πρέπει να προσαρτηθεί κυκλικό πρόθεμα από L δείγματα από το τέλος της ακολουθίας στην αρχή.

$$LT_s > \max(T_m)$$

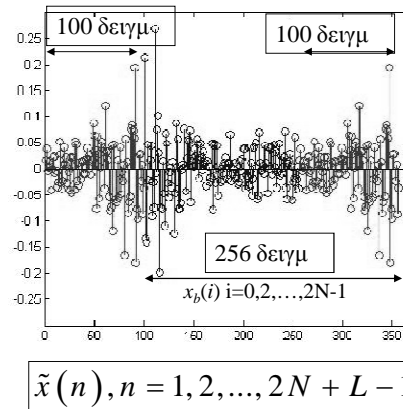
Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται η ακολουθία

$$\tilde{x}(n), n = 0, 1, \dots, 2N + L - 1$$

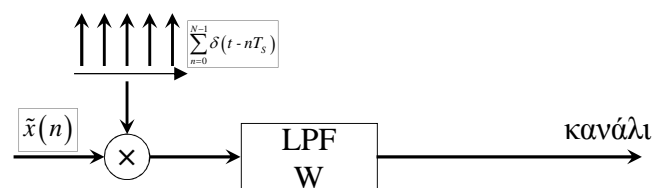
Η οποία αντιστοιχεί πλέον σε σήμα διάρκειας $T + LT_s$, δηλ κάθε σύμβολο DMT αυξάνει συνήθως τη διάρκειά του περίπου κατά 10%-15%

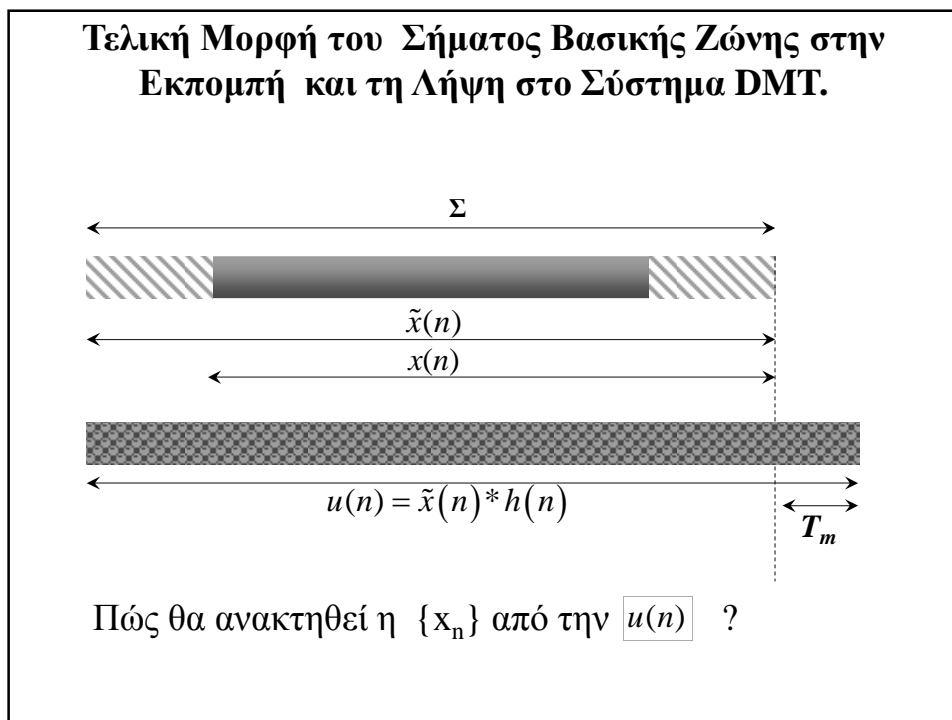
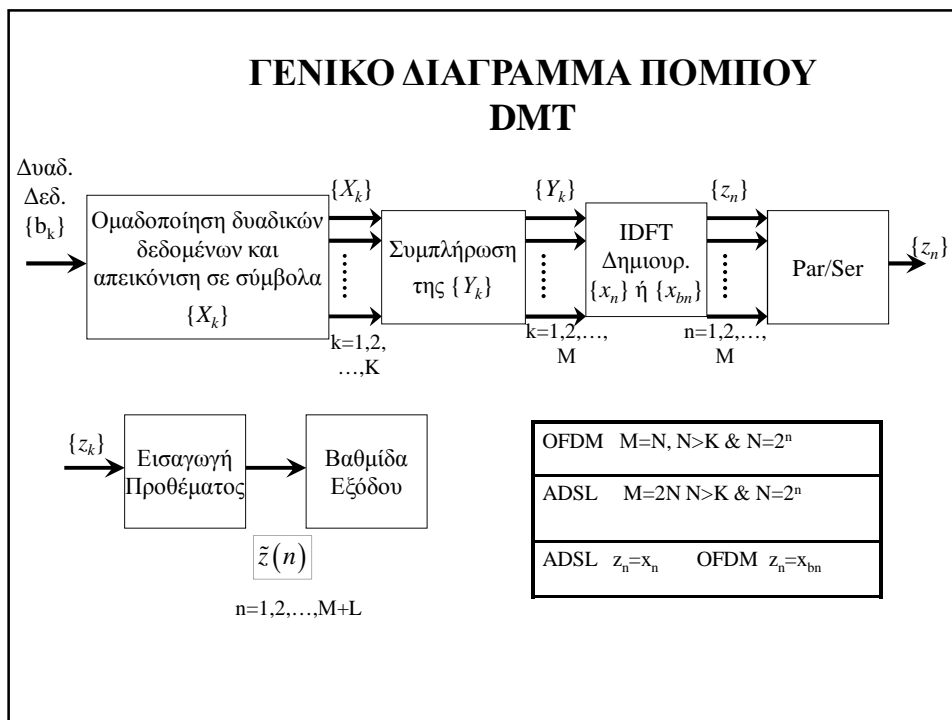
Κυκλικό Πρόθεμα στη Βασική στο ADSL

Παράδειγμα συμβόλου ADSL που περιλαμβάνει και το πρόθεμα (2N+L δείγματα συνολικά).



Βαθμίδα εξόδου του Πομπού ADSL





Κυκλική Συνέλιξη (Cyclic Convolution)

Θεωρείστε 2 ακολουθίες $\{x(n)\}$ και $\{h(n)\}$ με μήκη N και J , αντίστοιχα, $N \geq J$.

Καλούμε Κυκλική συνέλιξη των $\{x(n)\}$ και $\{h(n)\}$ την ακολουθία $\{u(n)\}$ που ορίζεται ως:

$$u(n) = h(n) \odot x(n) = \sum_{k=0}^{J-1} h(k)x((n-k)_N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

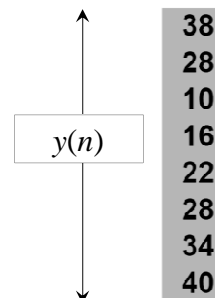
όπου $(n-k)_N$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων $n-k:N$.

Στην περίπτωση της κυκλικής συνέλιξης ισχύει:
 $\text{DFT}\{y(n)\} = \text{DFT}\{h(n)\} \cdot \text{DFT}\{x(n)\}$

Παράδειγμα Κυκλικής Συνέλιξης: Δεχθείτε $h(i) = 1, 2, 3$ και $x(i) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Υπολογίστε την κυκλική συνέλιξη

$$u = h \odot x$$

								1	2	3							
8	7	6	5	4	3	2	1	8	7								
	8	7	6	5	4	3	2	1	8								
		8	7	6	5	4	3	2	1								
			8	7	6	5	4	3	2	1							
				8	7	6	5	4	3	2	1						
					8	7	6	5	4	3	2	1					
						8	7	6	5	4	3	2	1				
							8	7	6	5	4	3	2	1			



$$u(n) = h(n) \odot x(n) = \sum_{k=0}^2 h(k)x((n-k)_8) \quad n = 0, 1, \dots, 7$$

Απάντηση

$h(i) = 1, 2, 3$ και $x(i) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. $\tilde{x}(i) = 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$u(n) = h(n) * \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^2 h(k) \tilde{x}(n-k) \quad n = 0, 1, \dots, 10, 11$$

$h(i) =$ 1 2 3
 $\tilde{x}(i) =$ 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8

												1	2	3													$u(n)$																						
8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																																						
	8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																									5												
		8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								16												
			8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								34											
				8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								40										
					8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								38									
						8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								28								
							8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								10							
								8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								16						
									8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								22					
										8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								28				
											8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								34			
												8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								40		
													8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								37	
														8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5																								24

Δημιουργία Κυκλικής Συνέλιξης Μέσω Γραμμικής Συνέλιξης

Έστω διακριτή ακολουθία $\{x_n\}$ μήκους N και διακριτό κανάλι με απόκριση $\{h_n\}$ μήκους J .

Για να δημιουργήσουμε μέσα από γραμμικό κανάλι την

$$w(n) = h(n) \odot x(n)$$

1. Κατασκευάζεται η ακολουθία $\{\tilde{x}_n\}$ προσαρτώντας ως κυκλικό πρόθεμα στην αρχή της $x(n)$ τα τελευταία L στοιχεία της. $L \geq J$, J μήκος της ακολουθίας $h(n)$.

2. Αποστέλλεται στο κανάλι η $\{\tilde{x}_n\}$ και λαμβάνεται σην έξοδο

$$u(n) = h(n) * \tilde{x}(n)$$

3. Απαλείφουμε τα L πρώτα από τα στοιχεία της $u(n)$. Τα N επόμενα αποτελούν την ακολουθία $w(n)$

$$w(n) = h(n) \odot x(n)$$

Συνοψίζουμε :

Στο πομπό, λοιπόν, στην ακολουθία $x(n)$, πριν αυτή μετατραπεί σε συνεχές σήμα $x(t)$, προσαρτώνται ως πρόθεμα τα L τελευταία στοιχεία της. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται η ακολουθία δειγμάτων:

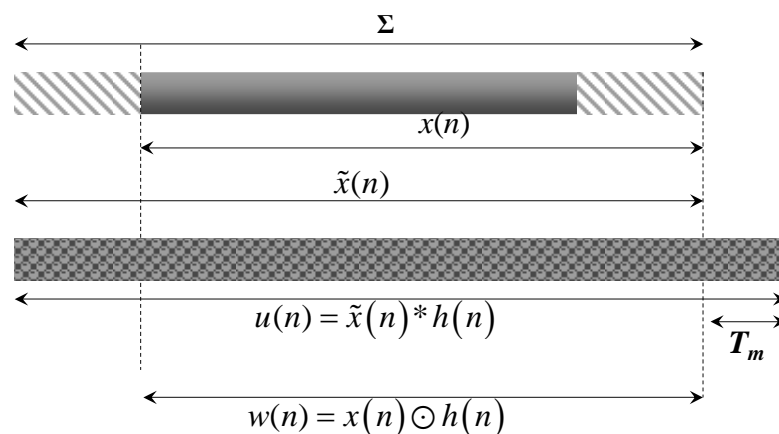
$$\tilde{x}(i), i = 0, 1, 2, \dots, N + L - 1$$

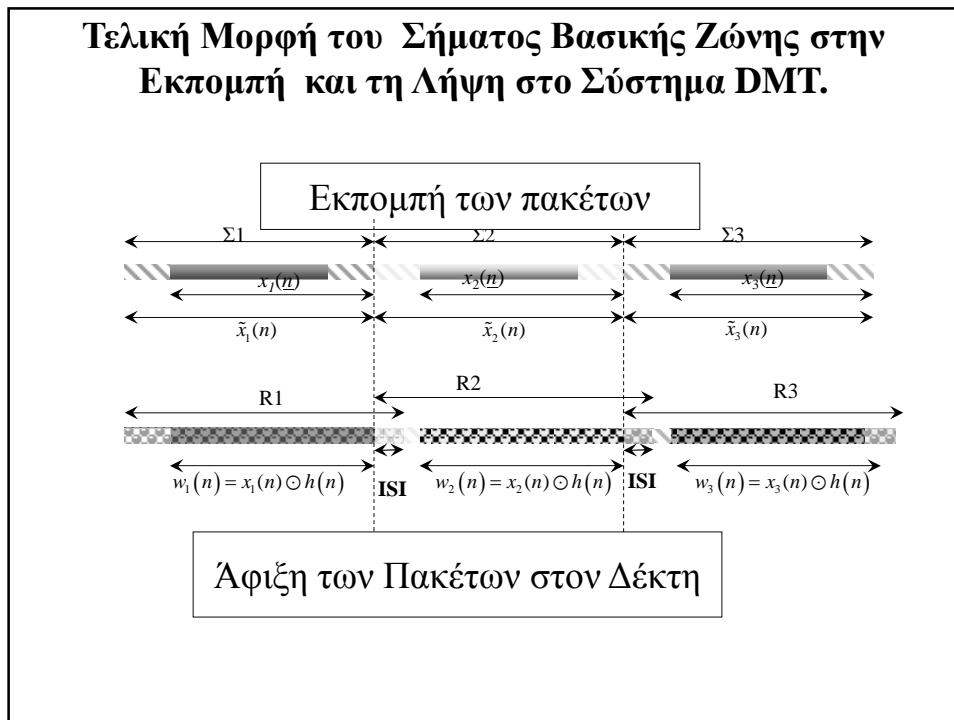
και μετατρέποντάς την σε συνεχές σήμα

$$\tilde{x}(t), 0 \leq t \leq T + LT_s$$

Στο δέκτη μετά την αποδιαμόρφωση (αν πρόκειται για OFDM) και τη δειγματοληψία

Τελική Μορφή του Σήματος Βασικής Ζώνης στην Εκπομπή και τη Λήψη στο Σύστημα DMT.





Διαδικασία Ανάκτησης της Ακολουθίας Δεδομένων $\{X_n\}$ στο Δέκτη.

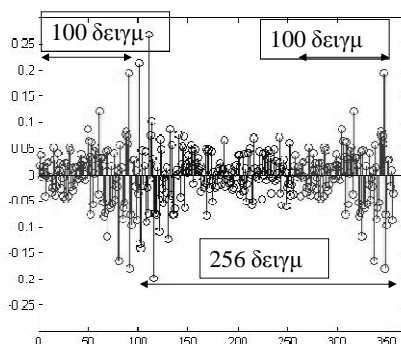
1. Στο δέκτη (μετά την απομάκρυνση φέροντος αν πρόκειται για OFDM) δειγματοληπτείται το σήμα βασικής ζώνης $u(t)$ με περίοδο T_s οπότε προκύπτει η ακολουθία $\{u(n) \ n=0,1,\dots,N+L-1\}$.
2. Από την $\{u(n)\}$ παραλείπονται τα πρώτα L δείγματα και λαμβάνονται τα επόμενα N δείγματα κατασκευάζοντας έτσι την $\{w(n)\}$, $i=0,1,\dots,N-1$.
3. Από όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα η $\{w(n)\}$ είναι η κυκλική συνέλιξη της $\{h(n)\}$ και της $\{x(n)\}$.
4. Από τη σχέση $DFT(\{w(n)\})=DFT(\{h(n)\}) \cdot DFT(\{x(n)\})$ έπεται $DFT(\{w(n)\})=DFT(\{h(n)\}) \cdot \{Y(n)\}$.

Διαδικασία Ανάκτησης της Ακολουθίας Δεδομένων $\{X_n\}$ στο Δέκτη. (Συνέχεια)

5. Από μια γνωστή ακολουθία $\{X(n)\}$ και επομένως γνωστή $\{Y(n)\}$ και την αντίστοιχη $DFT(\{x(n)\})$ προσδιορίζεται η $DFT(\{h(n)\})$. (Frequency Equalization)
6. Για όσο διάστημα μπορεί η $\{h(n)\}$ να θεωρηθεί χωρίς σημαντικές αλλαγές υπολογίζεται η $\{Y(n)\} = DFT(\{y(n)\} / DFT(\{h(n)\})$ και στη συνέχεια η $\{X(n)\}$.
7. Η διαδικασία συνεχίζεται με την αποστολή γνωστής ακολουθία $\{X(n)\}$ κ.ο.κ.

Απόδειξη του Θεωρήματος Υπολογισμού της Κ.Σ από Γ.Σ.

Παράδειγμα σήματος συμβόλου, $\tilde{x}(i)$ $i=0,1,..N+L-1$
(N δείγματα + πρόθεμα L δειγμάτων).



$$\tilde{x}(i) = \begin{cases} 0 \leq i \leq L-1 & x(N-L+i) \\ L \leq i \leq N+L-1 & x(i-L) \end{cases}$$

Δηλαδή

$$\tilde{x}(i) = x((N-L+i)_N) \\ \Leftrightarrow \\ \tilde{x}(i) = x((i-L)_N)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος (Συνέχεια)

Το δειγματοληπτημένο σήμα στην είσοδο του δέκτη, $u(n)$, για το τμήμα που αντιστοιχεί στο τρέχον σύμβολο, μπορεί να υπολογιστεί ως η διακριτή συνέλιξη της $\{\tilde{x}(n)\}$ και της $\{h(n)\}$

Επειδή γνωρίζουμε ότι η $h(n)$ έχει το πολύ L μη μηδενικά στοιχεία, για $\{\tilde{y}(L+n)\}$ ισχύει: \rightarrow

$$\tilde{y}(L+n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)\tilde{x}(L+n-k) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Απόδειξη του Θεωρήματος (Συνέχεια)

$$\tilde{y}(L+n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)\tilde{x}(L+n-k) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= x((N-L+k)_N) \\ &\Leftrightarrow \\ \tilde{x}(k) &= x((k-L)_N) \end{aligned}$$

προκύπτει

$$\tilde{y}(L+n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x((n-k)_N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Και θέτοντας $y(n) = \tilde{y}(L+n)$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x((n-k)_N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Απόδειξη του Θεωρήματος (Συνέχεια)

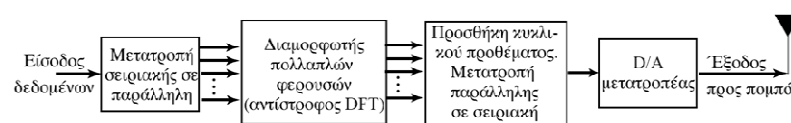
$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x((n-k)_N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι το σήμα $y(n)$ στο δέκτη είναι η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $\{h(n)\}$ και $\{x(n)\}$ επομένως ισχύει:

$$\text{IDFT}(y(n)) = \text{IDFT}(h(n)) \cdot \text{IDFT}(x(n)) \rightarrow Y(n) = H(n) \cdot X(n)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Γενικό Διάγραμμα Συστήματος OFDM



(α) Πομπός



(β) Δέκτης

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ OFDM

Μεγάλο πρόβλημα αποτελεί η υψηλή τιμή που μπορεί να φθάσει η τιμή του πλάτους λόγω της επιπρόσθεσης των πολλαπλών σημάτων
(μεγάλος λόγος PEAK/AVERAGE POWER) Απαίτηση ενισχυτού με πολύ μεγάλη δυναμική περιοχή

Ανάγκη καλού συγχρονισμού στον δέκτη για τον ακριβή προσδιορισμό του προθέματος που πρέπει να απομακρυνθεί καθώς και της συχνότητας των τοπικών ταλαντωτών. Σφάλματα στο συγχρονισμό και στις συχνότητες δημιουργεί την Intecarier Interference (ICI). Απαιτεί περιορισμένη Dopler ολίσθηση