ΦΩΡΑΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ (ML SEQUENCE DETECTION)

Σε ένα δυαδικό σύστημα μερικής απόκρισης ισχύει:

$$y_m = a_m + a_{m-1} + v_m$$

Όπου η ακολουθία $\{\alpha_m\}$ είναι η ακολουθία πλατών ενός PAM που αντιστοιχεί στα δυαδικά δεδομένα $\{d_m\}$.

$$a_m = \begin{cases} A & \text{για } d_m = 1 \\ -A & \text{για } d_m = -1 \end{cases}$$

Η ανακατασκευή της $\{d_m\}$ από την $\{y_m\}$, αν γίνει σύμβολο προς σύμβολο παρουσιάζει τα προβλήματα που περιγράψαμε στα προηγούμενα.

Ένας πιο αποδοτικός τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία δειγμάτων του δέκτη $\{y_n\}=y_1,y_2,...,y_K$ μήκους K και να αναζητήσουμε τη βέλτιστη ακολουθία δυαδικών δεδομένων $\{d_n\}=d_1,d_2,...,d_K$ που για δεδομένη την $\{y_n\}$ θα δημιουργηθούν τα λιγότερα λάθη.

Έστω $$\mathbf{d}^{(\mu)} = \left(d_1^{(\mu)}, d_2^{(\mu)}, ..., d_K^{(\mu)}\right)^T, \mu = 1,2,...,Q = 2^K$$

είναι όλα τα δυνατά διανύσματα δεδομένων με K συνιστώσες εισόδου και έστω ότι αυτά είναι ισοπίθανα μεταξύ τους, και

$$\mathbf{b}^{(\mu)} = \left(b_1^{(\mu)}, b_2^{(\mu)}, ..., b_K^{(\mu)}\right)^T, \mu = 1,2,...,Q = 2^K$$

τα αντίστοιχα διανύσματα λήψης του δέκτη (για μηδενικό θόρυβο), και έστω

$$\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_K\right)^T$$

το ενθόρυβο διάνυσμα λήψης στο δέκτη.

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = \left(v_1, v_2, ..., v_K\right)$$

με τα v_i iid Gaussian μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ^2. Για το δεδομένο **y** ζητείται το βέλτιστο **b** που εξασφαλίζει ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος. Η βέλτιστη τιμή του **b**, έστω $\mathbf{b}^{(m)}$, πρέπει να εξασφαλίζει:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})>p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$, για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

Από $\mathbf{b}^{(m)}$ προσδιορίζεται αμέσως το αντίστοιχο $\mathbf{d}^{(m)}$.

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})>p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

$$p\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = p\left(\left(y_1, y_2, ..., y_K\right)^T \mid \left(b_1^\mu, b_2^\mu, ..., b_K^\mu\right)^T\right)$$

$$p\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = \prod_{\iota=1}^{K} p\left(y_i \mid b_i^\mu\right) =$$

$$= \prod_{\iota=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y_i - b_i^\mu\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^K e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\iota=1}^{K}\left(y_i - b_i^\mu\right)^2}$$

Θέτοντας $D\left(\mathbf{y}, \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = \| \mathbf{y} - \mathbf{b}^{(\mu)} \|^2 = \sum_{\iota=1}^{K}\left(y_i - b_i^\mu\right)^2$

$$p\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} D\left(\mathbf{y}, \mathbf{b}^{(\mu)}\right)}$$

Για τη σύγκριση

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)}) > p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu \neq m$.

Ισοδύναμα:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow \ln\{p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})\} > \ln\{p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})\}$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu \neq m$.

Ισοδύναμα:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow D(\mathbf{y},\mathbf{b}^{(m)}) < D(\mathbf{y},\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu \neq m$.

Διπλοδυαδικό: Υποτίθεται ότι $d_0=0$ και A=1 Διάνυσμα Λήψης $y=(1.5\ 0.5\ -1.5)^T$			
i	**Data Sequence $d^{(i)T}$ i=1,2,…,8**	**Sample Sequence $b^{(i)T}$ i=1,2,…,8**	**Αποστάσεις $\|y- b^{(i)}\|^2$ i=1,…,8**
1	**000**	**-2 -2 -2**	**18.75**
2	**001**	**-2 -2 0**	**20.75**
3	**010**	**-2 0 0**	**14.75**
4	**011**	**-2 0 2**	**24.75**
5	**100**	**0 0 -2**	**2.75**
6	**101**	**0 0 0**	**4.75**
7	**110**	**0 2 0**	**6.75**
8	**111**	**0 2 2**	**16.75**
➔ Η πλέον πιθανή λύση: Έχει αποσταλεί το $d=(1\ 0\ 0)^T$			

Μεγάλη Πολυπλοκότητα!!

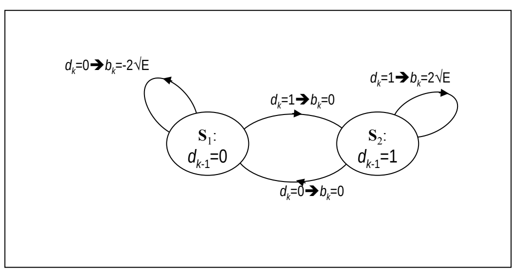
Αλγόριθμος Viterbi

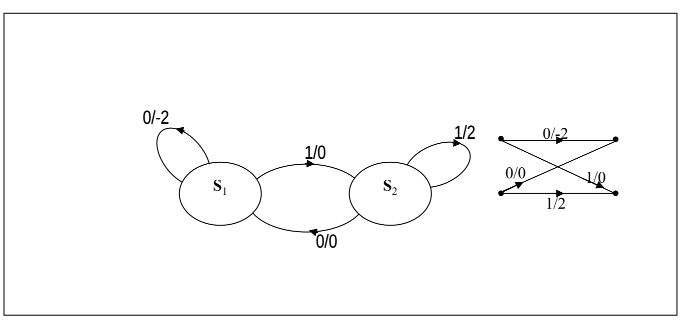
Στο Διπλοδυαδικό που έχουμε αναφέρει:

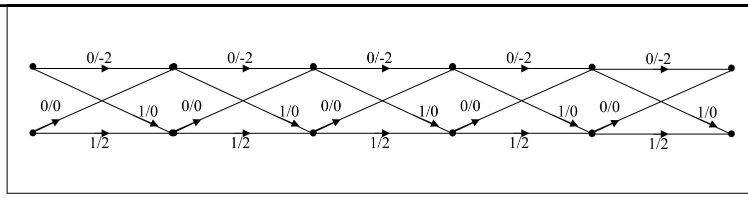
$$y_m = a_m + a_{m-1} + v_m$$

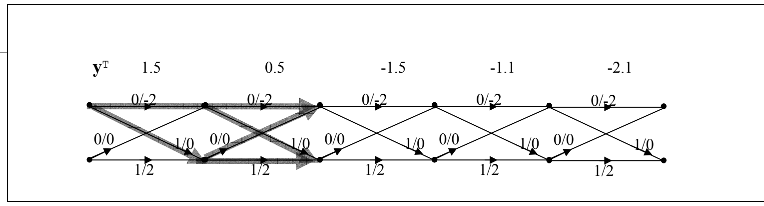
$\mathbf{y}$=(1.5, 0.5, -1.5, -1.1, -2.1 $)^T$

Να υπολογιστεί η πιο πιθανή ακολουθία (d_1,d_2,...,d_5)

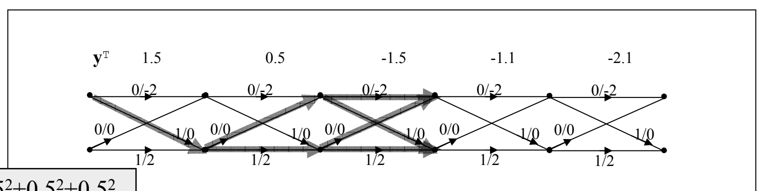




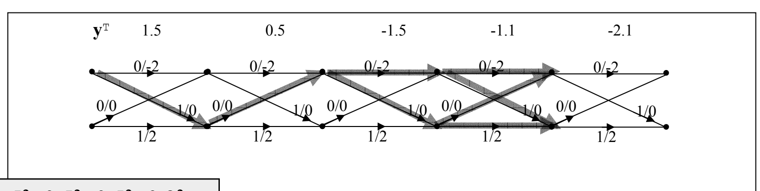




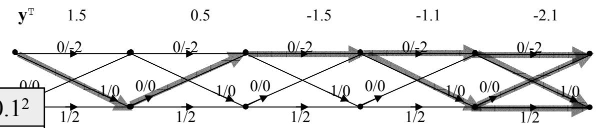
$\mu(0,0)=3.5^2+2.5^2$
$\mu(1,0)=1.5^2+0.5^2$
$\mu(0,1)=3.5^2+0.5^2$
$\mu(1,1)=1.5^2+1.5^2$



$\mu(1,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2$
$\mu(1,1,0)=1.5^2+1.5^2+1.5^2$
$\mu(1,0,1)=1.5^2+0.5^2+1.5^2$
$\mu(1,1,1)=1.5^2+1.5^2+3.5^2$



$\mu(1,0,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2$
$\mu(1,0,1,0)=1.5^2+0.5^2+1.5^2+1.1^2$
$\mu(1,0,1,1)=1.5^2+0.5^2+1.5^2+3.1^2$
$\mu(1,0,0,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2$

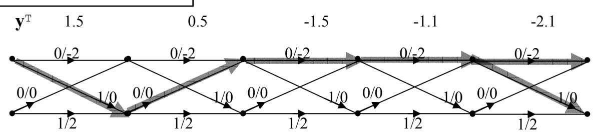


$\mu(1,0,0,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2+0.1^2$

$\mu(1,0,0,1,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2+2.1^2$

$\mu(1,0,0,0,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2+2.1^2$

$\mu(1,0,0,1,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2+4.1^2$



Η πιο πιθανή ακολουθία που έχει σταλεί είναι: 1,0,0,0. Η θεωρία ορίζει ότι μόνο το πρώτο bit είναι σίγουρο ενώ τα υπόλοιπα πιθανόν να αλλάξουν με τις μελλοντικές τιμές του y.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος προτείνει απάντηση μόνο για το d_1! Για να υπάρχει η απαιτούμενη βεβαιότητα για τις επόμενες τιμές d_2, d_3, d_4 έπρεπε να είχαμε άλλες τρεις τιμές του y_k, τις y_6, y_7, y_8 .

Για να αξιοποιήσουμε όσο γίνεται καλύτερα τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των στοιχείων της ακολουθίας λήψης $\{y_n\}$, η απόφασή μας (φώραση) για κάποιο δεδομένο d_k πρέπει να γίνεται αφού προηγουμένως προχωρήσει ο αλγόριθμος 5Λ βήματα (πεταλούδες) από τό αντίστοιχο στοιχείο λήψης. Το Λ είναι το μήκος εξαναγκασμού (constrained length), δηλαδή το πλήθος των στοιχείων της ακολουθίας λήψης που επηρεάζονται από το σύμβολο αυτό. Για παράδειγμα στα συστήματα μερικής απόκρισης Λ=1 και για να βγάλουμε απόφαση για τη τιμή του d_1 κανονικά πρέπει να προχωρήσουμε 5 βήματα (πεταλούδες) στο trellis από το $y_1=1.5$ του προηγούμενου παραδείγματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σε ένα Σύστημα μερικής απόκρισης με αστερισμό τεσσάρων συμβόλων θα υπάρχουν 4 καταστάσεις, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 4 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 4 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.
2. Σε ένα σύστημα δυαδικό με $y_m=a_m+0.5a_{m-1}+0.2a_{m+1}+n_m$ οι καταστάσεις της πηγής θα είναι 4 (2^L, L μήκος της ISI), σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 2 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 4 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.
3. Σε ένα σύστημα 4δικό με $y_m=a_m+0.5a_{m-1}+0.2a_{m+1}+n_m$ οι καταστάσεις της πηγής θα είναι $4^2=16$, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 4 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 16 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (συνέχεια)

4.Σε ένα Σύστημα με αστερισμό M συμβόλων και μήκος ISI L θα υπάρχουν M^L καταστάσεις, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν M μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι M^L μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.

Αν οι πιο πάνω παρατηρήσεις δεν σας φαίνονται προφανείς μη διστάσετε να φέρετε ερωτήσεις στο μάθημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η ύλη αυτού του PDF καλύπτεται από τις πιο κάτω παραγράφους του ¨ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ¨

$8.5.2 και 8.5.3