Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (μέθοδος του Thomas)

Έστω το ακόλουθο $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, και $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss

Ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο :

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} & & & & & & \mathbf{d_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} & & & 0 & & \mathbf{d_2} \\ & \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} & & & & \mathbf{d_3} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{c_{n-1}} & & \mathbf{d_{n-1}} \\ & & & & \mathbf{a_n} & \mathbf{b_n} & & \mathbf{d_n} \end{array}\right]$$

1. Τριγωνοποίηση

$\boxed{\textit{1ο βήμα}}$ $\underline{\mathbf{i = 1}}$

$$\mathbf{m_2} = -\frac{\mathbf{a_2}}{\mathbf{b_1}} \quad (\text{αν } \mathbf{b_1} \neq \mathbf{0})$$

<u>Ενημέρωση 2ης γραμμής</u>

$\mathbf{a_2 = 0}$ $\quad \mathbf{b_2 = b_2 + m_2 c_1}$ $\quad \mathbf{d_2 = d_2 + m_2 d_1}$

Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο του Gauss

$\boxed{\textit{2ο βήμα}}$ $\underline{\mathbf{i = 2}}$

$$\mathbf{m_3} = -\frac{\mathbf{a_3}}{\mathbf{b_2}} \quad (\text{ αν } \mathbf{b_2} \neq \mathbf{0}\text{ })$$

<u>Ενημέρωση 3ης γραμμής</u>

$\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{b_3} = \mathbf{b_3} + \mathbf{m_3 c_2}$ $\qquad$ $\mathbf{d_3} = \mathbf{d_3} + \mathbf{m_3 d_2}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$\boxed{\textit{i-οστό βήμα}}$ $\underline{\mathbf{i = i}}$

$$\mathbf{m_{i+1}} = -\frac{\mathbf{a_{i+1}}}{\mathbf{b_i}} \quad (\text{ αν } \mathbf{b_i} \neq \mathbf{0}\text{ })$$

<u>Ενημέρωση i+1 γραμμής</u>

$\mathbf{a_{i+1}} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{b_{i+1}} = \mathbf{b_{i+1}} + \mathbf{m_{i+1} c_i}$ $\qquad$ $\mathbf{d_{i+1}} = \mathbf{d_{i+1}} + \mathbf{m_{i+1} d_i}$

Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο του Gauss

Μετά από $\mathbf{n-1}$ βήματα προκύπτει το ισοδύναμο άνω τριγωνικό σύστημα:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc:c} \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} & & & & & \mathbf{d_1} \\ & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} & & \mathbf{0} & & \mathbf{d_2} \\ & & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} & & & \mathbf{d_3} \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{c_{n-1}} & \mathbf{d_{n-1}} \\ & & & & & \mathbf{b_n} & \mathbf{d_n} \end{array}\right]$$

΄Αρα έχουμε τον αλγόριθμο:

1. Τριγωνοποίηση

for $\mathbf{i = 1}$ **to** $\mathbf{n-1}$ **do**

$\mathbf{m_{i+1} = -a_{i+1}/b_i}$

$\mathbf{b_{i+1} = b_{i+1} + m_{i+1}c_i}$

$\mathbf{d_{i+1} = d_{i+1} + m_{i+1}d_i}$

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα : $\mathbf{n-1}$ διαιρέσεις, $\mathbf{2(n-1)}$ πολ/σμοί, $\mathbf{2(n-1)}$ προσθ/αφαιρ.

Επίλυση ενός άνω διδιαγώνιου γραμμικού συστήματος

Στη συνέχεια επιλύεται το άνω διδιαγώνιο γραμμικό σύστημα με προς τα πίσω αντικατάσταση, οπότε έχουμε τον αλγόριθμο:

$$\mathbf{x_n = d_n / b_n}$$
$$\textbf{for } \mathbf{i = n - 1} \textbf{ to } \mathbf{1} \textbf{ do}$$
$$\quad \mathbf{x_i = (d_i - c_i x_{i+1}) / b_i}$$

<u>*Υπολογιστική Πολυπλοκότητα :*</u> $\mathbf{n-1}$ διαιρέσεις, $\mathbf{n-1}$ πολ/σμοί, $\mathbf{n-1}$ προσθ/αφαιρ.

Block μορφές αμέσων μεθόδων

1.1 Ανάλυση της block μορφής KJI-GJ

n : τάξη πίνακα A

$\mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$

Ο πίνακας **A** διαχωρίζεται σε $\mathbf{q}^2$ υποπίνακες $\mathbf{r} \times \mathbf{r}$

Ακολουθιακή block μορφή KJI-GJ

for $\mathbf{k} = 1$ **to** $\mathbf{q}$ **do**

  for $\mathbf{j} = \mathbf{k} + 1$ **to** $\mathbf{q}$ **do**

    for $\mathbf{i} = 1$ **to** $\mathbf{q}$, $\mathbf{i} \neq \mathbf{k}$ **do**

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{A}_{ik} * \mathbf{A}_{kk}^{-1} * \mathbf{A}_{kj}$$

Οι αντίστροφοι των διαγώνιων υποπινάκων $\mathbf{A}_{kk}$ δεν υπολογίζονται άμεσα, αλλά με τη λύση **r** γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα $\mathbf{A}_{kk}$ με εφαρμογή της σημειακής μεθόδου GJ.

Block μορφή KJI-GJ

$$\text{For } k = 1 \text{ to } q \text{ do}$$

$$\text{for } j = k+1 \text{ to } q \text{ do}$$

$$TB_{kj} : \begin{cases} A_{kj} = A_{kk}^{-1} * A_{kj} \\ \text{for } i := 1 \text{ to } q, \quad i \neq k \text{ do} \\ \qquad\qquad A_{ij} = A_{ij} - A_{ik} * A_{kj} \end{cases}$$

Ορισμός των εργασιών της block μορφής KJI-GJ.

Πολυπλοκότητα της block μορφής KJI-GJ

1. Υπολογισμός των

$$\mathbf{A_{kj} = A_{kk}^{-1} * A_{kj}}$$

είναι ισοδύναμος με τη λύση **r** συστημάτων τάξης **r** με τον ίδιο πίνακα, οπότε απαιτούνται

$$\mathbf{4r^3/3}$$

αριθμητικές πράξεις.

2. Υπολογισμός των

$$\mathbf{A_{ij} = A_{ik} - A_{ik} * A_{kj}}$$

αντιστοιχεί σε $\mathbf{q-1}$ πολλαπλασιασμούς πινάκων και προσθέσεις πινάκων, οπότε απαιτούνται

$$\mathbf{r^3(q-1)}$$

αριθμητικές πράξεις.

Επομένως η εκτέλεση της εργασίας

$$\mathbf{TB_{kj}}$$

Block τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα

1.1 Block μορφή της LU παραγοντοποίησης

Εστω το ακόλουθο $\mathbf{q} \times \mathbf{q}$ block τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{F_1} & & & & & \\ \mathbf{E_2} & \mathbf{D_2} & \mathbf{F_2} & & & 0 & \\ & \mathbf{E_3} & \mathbf{D_3} & \mathbf{F_3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \mathbf{E_{q-1}} & \mathbf{D_{q-1}} & \mathbf{F_{q-1}} \\ & & & & \mathbf{E_q} & \mathbf{D_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \\ \vdots \\ \mathbf{x_{q-1}} \\ \mathbf{x_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \\ \vdots \\ \mathbf{b_{q-1}} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbf{R^{n \times n}}$, $\mathbf{n} = \mathbf{qr}$, $\mathbf{D_i}$, $\mathbf{E_i}$, $\mathbf{F_i} \in \mathbf{R^{r \times r}}$ και $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{x_i} \in \mathbf{R^r}$.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαχωρίζεται σε $\mathbf{3q - 2}$ υποπίνακες $\mathbf{r} \times \mathbf{r}$ και το διάνυσμα στήλη $\mathbf{b}$ σε $\mathbf{q}$ υποδιανύσματα στήλες $\mathbf{r} \times \mathbf{1}$.

Block μορφή LU

Θεωρούμε την block LU παραγοντοποίηση $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{F}_1 & & & & & \\ \mathbf{E}_2 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{F}_2 & & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{E}_3 & \mathbf{D}_3 & \mathbf{F}_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{E}_{q-1} & \mathbf{D}_{q-1} & \mathbf{F}_{q-1} & \\ & & & & \mathbf{E}_q & \mathbf{D}_q & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{I} & & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{L}_3 & \mathbf{I} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{L}_{q-1} & \mathbf{I} & \\ & & & & \mathbf{L}_q & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{F}_1 & & & & \\ & \mathbf{U}_2 & \mathbf{F}_2 & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{U}_3 & \mathbf{F}_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{U}_{q-1} & \mathbf{F}_{q-1} \\ & & & & & \mathbf{U}_q \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για την block μορφή της μεθόδου **LU**

Αλγόριθμος της Block μορφής LU

/* Παραγοντοποίηση */

$\mathbf{U_1 = D_1}$

For $\mathbf{i = 2}$ to $\mathbf{q}$ do

/* Επίλυση ως προς $\mathbf{L_i}$ */

$\mathbf{L_i U_{i-1} = E_i}$

/* Υπολογισμός $\mathbf{U_i}$ */

$\mathbf{U_i = D_i - L_i F_{i-1}}$

Επίλυση Block τριγωνικών συστημάτων

/* Επίλυση block κάτω τριγωνικού συστήματος $Ly = b$ */

θέσε $L_1 y_0 \equiv 0$

For $i = 1$ to q do

$y_i = b_i - L_i y_{i-1}$

/* Επίλυση block άνω τριγωνικού συστήματος $Ux = y$ */

θέσε $F_q x_{q+1} \equiv 0$

For $i = q$ to 1 do

/* Επίλυση ως προς x_i */

$U_i x_i = y_i - F_i x_{i+1}$

Αλγόριθμος της block μορφής LU

/* Παραγοντοποίηση */

$\mathbf{U_1} = \mathbf{D_1}$

For $\mathbf{i} = \mathbf{2}$ to $\mathbf{q}$ do

/* Επίλυση ως προς $\mathbf{L_i}$ */

$\mathbf{L_i U_{i-1}} = \mathbf{E_i}$

/* Υπολογισμός $\mathbf{U_i}$ */

$\mathbf{U_i} = \mathbf{D_i} - \mathbf{L_i F_{i-1}}$

/* Επίλυση Block τριγωνικών συστημάτων */

/* Επίλυση block κάτω τριγωνικού συστήματος $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ */

θέσε $\mathbf{L_1 y_0} \equiv \mathbf{0}$

For $\mathbf{i} = \mathbf{1}$ to $\mathbf{q}$ do

$\mathbf{y_i} = \mathbf{b_i} - \mathbf{L_i y_{i-1}}$

/* Επίλυση block άνω τριγωνικού συστήματος $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ */

θέσε $\mathbf{F_q x_{q+1}} \equiv \mathbf{0}$

For $\mathbf{i} = \mathbf{q}$ to $\mathbf{1}$ do

/* Επίλυση ως προς $\mathbf{x_i}$ */

$\mathbf{U_i x_i} = \mathbf{y_i} - \mathbf{F_i x_{i+1}}$