

2.2 Μέθοδος Απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγησηση

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$A \cdot x = b$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον επαύξημένο πίνακα του συστήματος :

$$A^{(1)} = [A : b]$$

A) Τριγωνοποίηση

Βήμα $r = 1$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 17 & 10 & 30 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & 18 & -12 & 12 \end{array} \right]$$

Θεωρούμε το μέγιστο κατα απόλυτο τιμή στοιχείο της πρώτης στήλης:

$$|a_{31}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{|3|, |2|, |6|\} = |6|.$$

Εναλλάσσουμε τις γραμμές 1 και $i_1 = 3$. Άρα

$$I_{1,i_1} = I_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{1,3}A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 17 & 10 & 30 \end{array} \right]$$

Επίσης έχουμε ότι

$$m_{21} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}, \quad \text{και} \quad m_{31} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

άρα

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(2)} = M^{(1)}I_{1,3}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 17 & 10 & 30 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{array} \right]$$

Βήμα **r = 2**

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{array} \right]$$

$$|a_{32}| = \max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = \max\{|-2|, |8|\} = |8|.$$

Εναλλάσσουμε τις γραμμές 2 και $i_2 = 3$. Άρα

$$I_{2,i_2} = I_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{2,3}A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Επίσης έχουμε ότι

$$m_{32} = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$$

άρα

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(3)} = M^{(2)}I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right]$$

B) Επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος

$$A^{(3)}x = b^{(3)}$$

και ο επαυξημένος πίνακας $A^{(3)}$ είναι ο ακόλουθος:

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right]$$

οπότε με προς τα πίσω αντικατάσταση προκύπτει:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6/6 = 1 \\ x_2 &= (24 - 16x_3)/8 = (24 - 16)/8 = 1 \\ x_1 &= (12 - 18x_2 + 12x_3)/6 = (12 - 18 + 12)/6 = 1 \end{aligned}$$

2.3 Μέθοδος Απαλοιφής Gauss – Jordan με μερική οδήγηση

Άσκηση 2

Δίνεται το ίδιο γραμμικό σύστημα με την Άσκηση 1

$$A \cdot x = b$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$A^{(1)} = [A : b]$$

A) Διαγωνοποίηση

Βήμα $r = 1$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 17 & 10 & 30 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & 18 & -12 & 12 \end{array} \right]$$

Θεωρούμε το μέγιστο κατά απόλυτο τιμή στοιχείο της πρώτης στήλης:

$$|a_{31}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{|3|, |2|, |6|\} = |6|.$$

Εναλλάσσουμε τις γραμμές 1 και $i_1 = 3$. Άρα

$$I_{1,i_1} = I_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{1,3}A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 17 & 10 & 30 \end{array} \right]$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{11} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{6} \\ \mu_{21} = -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \mu_{31} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

άρα

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(2)} = M^{(1)}I_{1,3}A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 18 & -12 & 12 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 17 & 10 & 30 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{array} \right]$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r} = 2}$

$$|a_{32}| = \max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = \max\{|-2|, |8|\} = |8|.$$

Εναλλάσσουμε τις γραμμές 2 και $i_2 = 3$. Άρα

$$I_{2,i_2} = I_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 : & 2 \\ 0 & 8 & 16 : & 24 \\ 0 & -2 & 2 : & 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{12} = -\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{3}{8} \\ \mu_{22} = \frac{1}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1}{8} \\ \mu_{32} = -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

άρα

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(3)} = M^{(2)}I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 : & 2 \\ 0 & 8 & 16 : & 24 \\ 0 & -2 & 2 : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 : & -7 \\ 0 & 1 & 2 : & 3 \\ 0 & 0 & 6 : & 6 \end{bmatrix}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r} = 3}$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 : & -7 \\ 0 & 1 & 2 : & 3 \\ 0 & 0 & 6 : & 6 \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{13} = -\frac{a_{13}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{4}{3} \\ \mu_{23} = -\frac{a_{23}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = -\frac{1}{3} \\ \mu_{33} = -\frac{1}{a_{33}^{(3)}} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Επομένως

$$M^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = M^{(3)}A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 : & -7 \\ 0 & 1 & 2 : & 3 \\ 0 & 0 & 6 : & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 : & 1 \\ 0 & 1 & 0 : & 1 \\ 0 & 0 & 1 : & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$