

Γαυς με ολική οδηγία

Σε μερικές εφαρμογές της επιστήμης δεδομένων το πρώτο οδηγό στοιχείο απαιτείται να είναι το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο του πίνακα. Αυτό εξασφαλίζεται αν εφαρμοσθεί η τεχνική της ολικής οδηγίας. Στην αναδομή Gauss με ολική οδηγία, η αναζήτηση του οδηγού στοιχείου στο k βήμα, γίνεται μεταξύ των εισόδων του υποπίνακα $A(k:n, k:n)$. Έτσι αν το οδηγό στοιχείο είναι το a_{rs} για να το φέρουμε στην (k, k) θέση πρέπει να εναλλάζουμε τις γραφίδες r και k καθώς και τις στήλες k και s . Αυτό ισοδυναμεί με εζ' αριστερών και εκ δεξιών πολλαπλασιασμό του πίνακα $A^{(k-1)}$ με τους μεταθετιμούς πίνακες P_k και Q_k αντίστοιχα. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε στον πίνακα $P_k A^{(k-1)} Q_k$ τη συνήθη αναδομή Gauss, δηλ. υπολογίζουμε ένα στοιχειώδη κάτω τριγωνικό πίνακα M_k έτσι ώστε ο πίνακας

$$A^{(k)} = M_k P_k A^{(k-1)} Q_k$$

να έχει μηδενικά στην k -στήλη κάτω από την (k, k) είσοδο. Στο τέλος του $n-1$ βήματος, ο πίνακας $A^{(n-1)}$ είναι τριγωνικός.

Θέτουμε

$$A^{(n-1)} = U$$

Τότε

$$\begin{aligned} U = A^{(n-1)} &= M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} Q_{n-1} = M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} A^{(n-3)} Q_{n-2} Q_{n-1} = \dots = \\ &= M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 = M, \quad Q_1 \dots Q_{n-1} = Q$$

Τότε έχουμε

$$U = MAQ$$

Θεώρημα: (Παραγοντοποίηση ολικής οδήγησης)

Έστω $n \times n$ πίνακας A . Όταν εφαρμοστεί β' αυτού αναλοική Gauss με ολική οδήγηση προκύπτει ένας άνω τριγωνικός πίνακας U , ένας πίνακας M , ο οποίος με κατάλληλες εναλλαγές γίνεται άνω τριγωνικός, και ένας μεταθετικός πίνακας Q έτσι ώστε

$$MAQ = U$$

όπου

$$U = A^{(n-1)}, \quad M = M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1, \quad Q = Q_1 \dots Q_{n-1}.$$

Πρόβλημα: (Παραγοντοποίηση LU με ολική οδήγηση)

Έστω $n \times n$ πίνακας A . Όταν εφαρμοστεί β' αυτόν αναλοική Gauss με ολική οδήγηση προκύπτει η παραγοντοποίηση:

$$PAQ = LU,$$

όπου P και Q είναι μεταθετικοί πίνακες που δίνονται από τις σχέσεις

$$P = P_{n-1} \dots P_1, \quad Q = Q_1 \dots Q_{n-1}$$

και L είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο που

ισούνται με

$$L = P(M_{n-1}P_{n-1} \dots M_1P_1)^{-1}$$

Η ορίζουσα του A ($\det(A)$) δίνεται από τη σχέση

$$\det(A) = (-1)^s a_{11} \dots a_{nn},$$

όπου s το πλήθος των συνοδισμών εναλλαγών γραμμών και στήλών που χρειάστηκαν κατά την άνω τριγωνοποίηση.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας ολική οδήγηση, να τριγωνοποιήσετε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: $k=1$. Το οδηγό στοιχείο είναι το

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \{ |a_{ij}| \} = a_{23} = 3$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

μεταθετικός πίνακας
για την εναλλαγή της
1ης και 2ης γραμμής

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

μεταθετικός πίνακας
για την εναλλαγή της
1ης και 3ης στήλης

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όρα}$$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2 : $k=2$. Το οδηγό στοιχείο είναι το $a_{33}^{(1)} = 2/3 = \max\{|1/3|, |-1/3|, |1/3|, |2/3|\}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = M_2 P_2 (M_1 P_1 A Q_1) Q_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$