

Gauss-Huard

Η αναλοική γίνεται εναλλακτικά σε γραμμή-στήλη.
Αναδεικνύουμε τα στοιχεία στη γραμμή κριτική του
διαγωνίου και τις στήλες πάνω από τη διαγώνιο.

Χωρίς μερική οδηγία

Πρώτα κάνουμε scaling στην 1η γραμμή, ώστε $a_{11} = 1$
 (ω αναδεικνύουμε το στοιχείο (2,1) στη 2η γραμμή).

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 2 & 10 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 9.6 & 2.2 & 0.6 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι το κάτω μέρος του πίνακα (δηλ. οι δύο τελευταίες γραμμές) δεν αλλάζει. Έπειτα κάνουμε scale
 τη 2η γραμμή (ω αναδεικνύουμε το στοιχείο (1,2), χρησιμοποιώντας
 το 2×2 πάνω δεξιά block

- 2 - Gauss Huard

$$\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{9.6} \Gamma_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.2292 & 0.0625 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right)^{-0.2} \quad \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 0.2 \Gamma_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.3542 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 0.2292 & 0.0625 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right) \quad (2)$$

και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, με την 3η γραμμή @ 3η στήλη

$$(2) \quad \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.3542 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 0.2292 & 0.0625 \\ 0 & 4 & 7.6458 & 1.8125 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.3542 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 0.2292 & 0.0625 \\ 0 & 0 & 6.729 & 1.563 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{6.729} \Gamma_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.3542 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 0.2292 & 0.0625 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 0.3542\Gamma_3$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 0.2292\Gamma_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1053 \\ 0 & 1 & 0 & 0.00928 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 6 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

και συνεχίζουμε ομοίως με 4η γραμμή και 4η στήλη.

$$\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 6\Gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1053 \\ 0 & 1 & 0 & 0.00928 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 0 & 2 & 4 & 19.3682 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 2\Gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1053 \\ 0 & 1 & 0 & 0.00928 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 0 & 0 & 4 & 19.3496 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 4\Gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1053 \\ 0 & 1 & 0 & 0.00928 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 0 & 0 & 0 & 18.4208 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{18.4208} \Gamma_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1053 \\ 0 & 1 & 0 & 0.00928 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2322 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-4-

Gauss-Huard

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\rightarrow \Gamma_1 - 0.1053 \Gamma_4 \\ \Gamma_2 &\rightarrow \Gamma_2 - 0.00928 \Gamma_4 \\ \Gamma_3 &\rightarrow \Gamma_3 - 0.2322 \Gamma_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς στο δεξί μέλος
χύνουμε το $Ax=b$.

Οι στοιχειώδεις πίνακες που λαμβάνουν χώρα σε αυτή τη διαδικασία
είναι οι ακόλουθοι

• Στο 1ο βήμα, ο E_1 scales την 1η γραμμή και ο H_1 απαλείφει το
στοιχείο (2,1).

$$H_1 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Στο 2ο βήμα έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.02083 = \frac{0.2}{9.6} & 0 & 0 \\ 0 & 0.1042 = \frac{1}{9.6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -0.02083 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1042 & 0 & 0 \\ -1 & -0.3958 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και στο 3ο βήμα είναι: -S-

Gauss - Hvard

$$H_3 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.05263 = \frac{-0.3542}{6.729} & 0 \\ 0 & 1 & -0.03406 = \frac{-0.2292}{6.729} & 0 \\ 0 & 0 & 0.1486 = \frac{1}{6.729} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.05263 & 0 \\ 0 & 1 & -0.03406 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1486 & 0 \\ -6 & -2 & -0.2105 & 1 \end{pmatrix}$$

Το τελευταίο βήμα που αναλείπει τα στοιχεία στην τελευταία στήλη είναι το

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.005714 = \frac{-0.1053}{18.4208} \\ 0 & 1 & 0 & -0.0005042 = \frac{-0.00928}{18.4208} \\ 0 & 0 & 1 & -0.01261 = \frac{-0.2322}{18.4208} \\ 0 & 0 & 0 & 0.05429 = \frac{1}{18.4208} \end{pmatrix}$$

και $H_4 = 1$. Το γινόμενο όλων αυτών των μετασχηματισμών

$H_4 E_4 H_3 E_3 H_2 E_2 H_1 E_1$ είναι ένας πυκνός πίνακας (ο οποίος είναι ο αντίστροφος του A , δηλ. A^{-1}) και παρατηρούμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες δεν αναμειγνύονται.

Το βασικό πλεονέκτημα της Hvard μεθόδου, συγκρινόμενης με την Gauss Jordan, είναι ότι χρειάζεται τον ίδιο αριθμό πράξεων με την Gauss Jordan. Και οι δύο μετατρέπουν τον πίνακα σε διαγώνιο μορφή, αλλά η GT απαιτεί 50% περισσότερες πράξεις.