

2.4 Μέθοδος Τριγωνικής Διαχώρισης LU (I)κατά γραμμές και (II) κατά στήλες

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

και έστω ότι διαχωρίζεται στους παρακάτω τριγωνικούς πίνακες L και U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

(I) Υπολογισμός των στοιχείων κατά γραμμές

Βήμα $\boxed{r=1}$ Πολ/σμός 1ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U :

$$u_{11} = a_{11} = 2, \quad u_{12} = a_{12} = 3, \quad u_{13} = a_{13} = 4$$

Βήμα $\boxed{r=2}$ Πολ/σμός 2ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U , οπότε προκύπτει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό γρ. σύστημα:

$$\begin{cases} l_{21}u_{11} &= a_{21} &\Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} &\Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = (6 - 3 \cdot 3) = -3 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} &\Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \Rightarrow u_{23} = -5 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{r=3}$. Πολ/σμός 3ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U , οπότε προκύπτει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό γρ. σύστημα:

$$\begin{cases} l_{31}u_{11} &= a_{31} &\Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{8}{2} = 4 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= a_{32} &\Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (9 - 12)/-3 = 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= a_{33} &\Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \Rightarrow u_{33} = -1 \end{cases}$$

(II) Υπολογισμός των στοιχείων κατά στήλες

Βήμα $\boxed{r=1}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 1η στήλη του U :

$$\begin{cases} u_{11} &= a_{11} &\Rightarrow u_{11} = 2 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} &\Rightarrow l_{21} = \frac{6}{2} = 3 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} &\Rightarrow l_{31} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{r=2}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 2η στήλη του U :

$$\begin{cases} u_{12} &= a_{12} &\Rightarrow u_{12} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} &\Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 6 - 9 = -3 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= a_{32} &\Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (9 - 4 \cdot 3)/(-3) = 1 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{3}}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 3η στήλη του U :

$$\begin{cases} u_{13} & = a_{13} & \Rightarrow u_{13} = 4 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} & = a_{23} & \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 7 - 12 = -5 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & = a_{33} & \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 10 - 4 \cdot 4 - 1 \cdot (-5) = -1 \end{cases}$$

Άρα τελικά οι τριγωνικοί πίνακες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.5 Μέθοδος Τριγωνικής Διαχώρισης LU με μερική οδήγηση

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο της Τριγωνικής Διαχώρισης LU (μορφή Doolittle) με μερική οδήγηση.

Τριγωνική Διαχώριση

Εύρεση των πινάκων L και U τέτοιων ώστε

$$P \cdot A = L \cdot U$$

ή

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Βήμα $r = 1$

$$p = 1 \quad s_1 = a_{11} = 2$$

$$p = 2 \quad s_2 = a_{21} = 3$$

$$p = 3 \quad s_3 = a_{31} = 1$$

Έστω

$$A^{(1)} = [A:s] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 2 \\ 3 & 1 & 2 & : & 3 \\ 1 & 2 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_2| = \max\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\} = \max\{|2|, |3|, |1|\} = |3|$$

άρα $i_1 = 2$, οπότε εναλλάσσεται η 1η με τη 2η γραμμή, δηλαδή

$$I_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(1)} = I_{12} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & : & 3 \\ 2 & 1 & 1 & : & 2 \\ 1 & 2 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός της 1ης γραμμής του U και της 1ης στήλης του L

$$u_{11} = s_1 = 3, \quad u_{12} = a_{12} = 1, \quad u_{13} = a_{13} = 2$$

$$l_{21} = s_2/u_{11} = 2/3, \quad l_{31} = s_3/u_{11} = 1/3$$

Άρα τελικά

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 2/3 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & \vdots & s_2 \\ l_{31} = 1/3 & a_{32} = 2 & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 \end{array} \right]$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r} = 2}$

$$p = 2 \quad s_2 = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - 2/3 \cdot 1 = 1/3$$

$$p = 3 \quad s_3 = a_{32} - l_{31}u_{12} = 2 - 1/3 \cdot 1 = 5/3$$

Άρα

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 2/3 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & \vdots & s_2 = 1/3 \\ l_{31} = 1/3 & a_{32} = 2 & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 = 5/3 \end{array} \right]$$

επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_3| = \max\{|s_2|, |s_3|\} = \max\{|1/3|, |5/3|\} = 5/3$$

άρα $i_2 = 3$ οπότε εναλλάσσεται η 2η με την 3η γραμμή, δηλαδή

$$I_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(2)} = I_{23}A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1/3 & 2 & 1 & \vdots & 5/3 \\ 2/3 & 1 & 1 & \vdots & 1/3 \end{array} \right]$$

Υπολογισμός της 2ης γραμμής του U και της 2ης στήλης του L

$$u_{22} = s_2 = 5/3, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - 1/3 \cdot 2 = 1/3$$

$$l_{32} = s_3/u_{22} = 1/5$$

Άρα τελικά

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 1/3 & u_{22} = 5/3 & u_{23} = 1/3 & \vdots & s_2 = 5/3 \\ l_{31} = 2/3 & l_{32} = 1/5 & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 \end{array} \right]$$

Βήμα $\mathbf{r} = 3$

$$p = 3 \quad s_3 = a_{33} - l_{31} * u_{13} - l_{32} * u_{23} = 1 - 2/3 \cdot 2 - 1/5 \cdot 1/3 = -2/5$$

Υπολογισμός της 3ης γραμμής του U

$$u_{33} = s_3 = -2/5$$

Άρα τελικά

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 1/3 & u_{22} = 5/3 & u_{23} = 1/3 & \vdots & s_2 = 5/3 \\ l_{31} = 2/3 & l_{32} = 1/5 & \underline{u_{33} = -2/5} & \vdots & s_3 = -2/5 \end{bmatrix}$$

οπότε είναι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix}$$

και ισχύει

$$LU = P_2 P_1 A.$$

Πράγματι

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς ισχύει

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$$

όπου

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b' = Pb = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Αφού $PA = LU$ έχουμε ισοδύναμα ότι $LUx = Pb (= b')$ ή ισοδύναμα

$$1. \quad Ly = b' \quad \text{και} \quad 2. \quad Ux = y.$$

1. Επίλυση του κάτω τριγωνικού συστήματος $Ly = b'$
(με προς τα εμπρός αντικατάσταση)

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 &&= 12 \\ y_2 &= b_2 - l_{12}y_1 &&= 3 - 1/3 \cdot 12 &&= -1 \\ y_3 &= b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 &&= 7 - 2/3 \cdot 12 - 1/5 \cdot (-1) &&= -4/5 \end{aligned}$$

ή

$$y = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

2. Επίλυση του άνω τριγωνικού γραμμικού συστήματος $Ux = y$
(με προς τα πίσω αντικατάσταση)

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3/u_{33} &&= 2 \\ x_2 &= (y_2 - u_{23}x_3)/u_{22} &&= (-1 - 1/3 \cdot 2)/5/3 &&= -1 \\ x_1 &= (y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3)/u_{11} &&= (12 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)/3 &&= 3 \end{aligned}$$

ή

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$