

Αλγόριθμος Choleski.

-13-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

B1: Πολλώ 1η γραμμή L με 1η, 2η, 3η στήλη L^T , άρα

$$l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad a_{11} \geq 0$$

$$l_{11} l_{21} = a_{12} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$l_{11} l_{31} = a_{13} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}$$

B2: Πολλώ 2η γραμμή με 2η, 3η στήλη

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22}^2 = a_{22} - l_{21}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{21} l_{31}) / l_{22}$$

B3: Πολλώ 3η γραμμή με 3η στήλη

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \Rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

Συμείωση: Οι τετραγωνικές ρίζες δεν είναι πράξεις ακριβείς

υποδιαστολής και στην πομπλοσύμμετα τις μετράμε χωριστά

Το πρόβλημα είναι ο έλεγχος δεσμεύσεως του υπόρριθου γιατί λόγω αβδόθειας αυτό μπορεί να είναι αρνητικό. Αυτό μπορεί να συμβεί γιατί λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης παρατερέφεται η συμμετρία.

-2β-

Ορισμός: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται θετικά ορισμένος, αν $x^T A x > 0$,
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

Κριτήριο ελέγχου της ιδιότητας "θετικά ορισμένος"

Δοθέντος ενός πίνακα A είναι αδύνατον να αποφανθούμε αν είναι θετικά ορισμένος ακολουθώντας το θεωρητικό ορισμό, ο οποίος μπορεί να φανεί χρήσιμος μόνο για τον εντοπισμό αντιπαράδειγματος το οποίο θα μας οδηγήσει σε απόρριψη της ιδιότητας. Η μέθοδος Choleski παρέχει ένα κριτήριο ελέγχου για το αν ένας πίνακας A είναι ή όχι θετικά ορισμένος.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Choleski, αν ο A είναι θετικά ορισμένος τότε και μόνο τότε υπάρχει πίνακας L κατω τριγωνικός με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, έτσι ώστε $A = LL^T$. Έτσι, για να διαπιστώσουμε αν ένας συμμετρικός πίνακας είναι και θετικά ορισμένος, αρχίζουμε να υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα L (παράγοντας Choleski) του A , και αν κατά τον υπολογισμό των l_{ii} προκύψει αρνητικό υπόρριζο ή μηδέν, τότε ο A ΔΕΝ είναι θετικά ορισμένος.

-3p-

Παράδειγμα: Να εξετάσετε αν είναι θετικά ορισμένος ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη:

Έστω $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ ο παραγοντας Choleski του A

Γίνεται ότι:

$$\begin{aligned} LL^T &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα στοιχεία των LL^T και A έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} l_{11}^2 = 1 \\ l_{11}l_{21} = 2 \\ l_{11}l_{31} = 3 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 10 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} l_{11} = 1 \\ l_{21} = 2 \\ l_{31} = 3 \\ l_{22} = 1 \\ l_{32} = 4 \\ l_{33} = -9 < 0 \rightarrow \text{Άρα, ο πίνακας } A \\ \underline{\text{ΔΕΝ}} \text{ είναι θετικά ορισμένος} \end{array}$$

Θεώρημα: Έστω A ένας πραγματικός $n \times n$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
2. $a_{ii} > 0$, $i=1, 2, \dots, n$
3. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές και θετικές
4. Κάθε υποπίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A με τη διαγραφή οποιωνδήποτε γραμμών του κατώτε και των αντίστοιχων στηλών του είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ειδικότερα, κάθε οδυσός κύριος υποπίνακας (leading principal submatrix) $A(1:k, 1:k)$, $k=1, 2, \dots, n$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος
5. Η ορίζουσα κάθε οδυσού κύριου υποπίνακα του πίνακα A είναι θετική (και προφανώς η ορίζουσα του A είναι θετική)
6. $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj}$, για $i, j=1, 2, \dots, n$, $i \neq j$
7. Το στοιχείο του πίνακα A με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο του A
8. Ο A^{-1} είναι επίσης θετικά ορισμένος.

Για τις ιδιότητες 3 και 5 ισχύουν και οι αντίστροφες προτάσεις, δηλαδή:

- 3'. Αν όλες οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα A είναι θετικές, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος
- 5'. Αν η ορίζουσα κάθε οδυσού κύριου υποπίνακα ενός $n \times n$ πίνακα A είναι θετική, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος.