

Λύση του $A^k x = b$ (1) - '18

όπου k πολύ μεγάλο, πχ $k=1000$, A γνωστός πίνακας.

- Θέχουμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό του A^k με τη μέθοδο Gauss γιατί έχει μεγάλη πολυπλοκότητα, δηλ. αφού ο υπολογισμός του A^k έχει $k-1$ γινόμενα θα έχει πολυπλοκότητα $O((k-1)n^3)$. Η επίλυση του συστήματος με τη μέθοδο Gauss έχει πολυπλοκότητα $O(n^3/3)$.

Αρα, συνολικά η πολυπλοκότητα για τη λύση του (1) είναι

$$O\left(\left(k-1+\frac{1}{3}\right)n^3\right) = O\left(\left(k-\frac{2}{3}\right)n^3\right)$$

Επομένως με τη μέθοδο αναλοφής του Gauss δεν μπορεί να λυθεί αυτό το σύστημα.

- Λύση του (1) με τη μέθοδο LU.

Ο υπολογισμός των L, U έχει πολυπλοκότητα $O(n^3/3)$, οπότε υπολογίζουμε μία φορά τα L, U και στη συνέχεια επιλύουμε αλυσιδωτά συστήματα κρατώντας την LU διάσπαση, δηλ.

$(LU)^n x = b$, κι έτσι αν για το (1) υπολογίσουμε το A^k , τώρα θα χρειαστεί να λύσουμε n τριγωνικά συστήματα, δηλ.

$$L^n U^n x = b \Leftrightarrow \begin{cases} L^n y = b \\ U^n x = y \end{cases} \text{ το οποίο έχει πολυπλοκότητα } 2n \left\{ O\left(\frac{n^2}{2}\right) + O\left(\frac{n^2}{2}\right) \right\} =$$

οπότε τελικά θα έχω $\frac{n^3}{3} + n^3 = \frac{4n^3}{3}$ πράξεις, δηλ. το ίδιο με τη μέθοδο αναλοφής Gauss για τη λύση του $Ax = b$.

-28-

Οποιοι αλγοριθμοί για την επίλυση του έχω:

$$\underbrace{(LU)(LU)(LU) \dots (LU)}_{n \text{ φορές}} x = b$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{L U L U L U \dots L U}_y x = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \rightarrow O(n^2/2) \\ U \underbrace{L U L U \dots L U}_{\bar{x}} x = y \Leftrightarrow U \bar{x} = y \text{ και} \end{cases}$$

συνεχίζουμε πάλι την ίδια διαδικασία και τελικά φτάνουμε στο (1).

Ασταθή Γραμμικά Συστήματα

$$Ax = b, A = [A : b]$$

Ευσταθές αν "μικρές" μεταβολές στον πίνακα A προκαλούν "μικρές" μεταβολές στο διάνυσμα της λύσης x

Ασταθές αν μη ευσταθές

Έστω $\delta A, \delta b, \delta x$ οι διαταράξεις των A, b, x.

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

Έστω ο μη ιδιάζων πίνακας A με ($\det A \neq 0$) με $\ A^{-1}\ \ \delta A\ < 1$				
τότε ισχύει	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$	$< \frac{k}{1 - \ \delta A\ \ A^{-1}\ }$	$\cdot \frac{\ \delta A\ }{\ A\ } + \frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	$, k = \underbrace{\text{cond}(A)}_{\substack{\text{Αριθμός συνθήκης} \\ \text{ή δείκτης κατάστασης}}} = \ A\ \ A^{-1}\ $
	Απόλυτο σχετικό σφάλμα		Σχετική μεταβολή A Σχετική μεταβολή b	

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \Leftrightarrow 1 \leq \text{cond}(A)$$

Αριθμός συνθήκης και ακρίβεια λύσης

$$\text{cond}(A) := \text{cond}_2(a) \quad (\text{δηλ. } \text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2)$$

$$\text{cond}_p(A), p = 1, 2, \dots, \infty$$

Ιδιότητες του cond(A)	
1.	$\text{cond}(A) \geq 1$
2.	Αν A ορθογώνιος ^(ερμιτιανός) $\Rightarrow \text{cond}_2 A = 1$ (Αν A ορθογώνιος $\Leftrightarrow AA^{T(\text{ή } A^H A)} = I$)
3.	$\text{cond}(A^T A) = (\text{cond}(A))^2$
4.	$\text{cond}(A) = \text{cond}(A^T)$
5.	$\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \text{cond}(B)$
6.	$\text{cond}(aA) = \text{cond}(A), a \neq 0$
7.	$\text{cond}(A) \geq \frac{ \lambda_1 }{ \lambda_n }$, όπου $ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n $, με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές
8.	$\text{cond}_2 A = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, με $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ιδιάζουσες τιμές ($A\lambda = \lambda x$)
9.	Αν A πραγματικός και συμμετρικός τότε $\text{cond}(A) = \frac{ \lambda_1 }{ \lambda_n }$

Παρατηρήσεις (conditioning σε σχέση με διάφορες norms) :

$$\text{Αν } A \text{ nxn πίνακας} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{\text{cond}_2(A)}{\text{cond}_\infty(A)} \leq n$$

–Γενικά αν ένας πίνακας είναι well conditioned ή ill conditioned σχετικά με μια norm, τότε θα είναι το ίδιο σχετικά και με κάποιες άλλες norms.

Ill conditioned πίνακες:

π.χ.

1)Πίνακας του Hilbert

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Για n=10 έχουμε

$$\begin{aligned} \text{cond}_2(A) &= 1.0625 \cdot 10^{13} \\ \text{cond}_\infty(A) &= 3.5353 \cdot 10^{13} \\ \text{cond}_1(A) &= 3.5353 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

2)Πίνακας του Pie

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{cases} \alpha, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$$

είναι ill conditioned για α "πολύ κοντά" στο 1 ή στο n-1, π.χ.

$$\text{για } \alpha=0.9999 \text{ και } n=5 \Rightarrow \text{cond}(A)=5 \cdot 10^4$$

3)Πίνακας διδιαγώνιος του Wilkinson (π.χ. n=20)

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & & 0 \\ & 19 & 20 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 19 & 20 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ιδιοτιμές } 1, 2, 3, \dots, 20)$$

Επίδραση του αριθμού συνθήκης στην ακρίβεια της υπολογιζόμενης λύσης

Έστω $\hat{x}$ η υπολογισθείσα λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$.

–Αν η ακριβής λύση x είναι γνωστή τότε υπολογίζουμε:

$$\text{το απόλυτο σχετικό σφάλμα } \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$$

–Αν η ακριβής λύση x δεν είναι γνωστή τότε υπολογίζουμε το υπόλοιπο $r=b-A\hat{x}$

$$\text{και παρατηρούμε πόσο μικρό είναι το σχετικό υπόλοιπο } \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Παρατήρηση: Η λύση x που προκύπτει από τη μέθοδο GE γενικά παράγει μικρό υπόλοιπο.

Όμως ένα μικρό σχετικό υπόλοιπο δεν εγγυάται την ακρίβεια της λύσης.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ακριβής λύση}$$

$$\text{Έστω } \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ τότε } r = b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ "μικρό"}$$

$$\text{Θεώρημα: } \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad \text{Το σχετικό σφάλμα της λύσης } \hat{x}$$

εξαρτάται όχι μόνο από το σχετικό υπόλοιπο αλλά και από τον αριθμό συνθήκης $\text{cond}(A)$.

Στο παράδειγμα $\text{cond}(A) = 4.0002 \cdot 10^4$, "μεγάλο"

Μέγεθος του αριθμού συνθήκης ώστε ο πίνακας A να είναι ill conditioned:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) \quad \text{ισοδύναμο με τον ορισμό που δόθηκε πριν}$$

$$\varphi(k) = \frac{k}{1-k}, \varphi'(k) \geq 0, \text{ άρα } \varphi(k) \uparrow$$

Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 10^{-d} \text{ και } \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \ll 1$$

$$\text{Τότε } \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 2 \text{cond}(A) \cdot 10^{-d} \Leftrightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} \frac{10^{-t}}{10^{-d}}$$

Άρα αν τα δεδομένα έχουν ένα σχετικό σφάλμα 10^{-d} και το σχετικό σφάλμα λύσης

για να εγγυάται τη λύση πρέπει να είναι $\leq 10^{-t}$, τότε το $\text{cond}(A)$ είναι $\leq \frac{1}{2} 10^{d-t}$

π.χ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{σχετικό σφάλμα δεδομένων} = 10^{-5} \\ \text{Απαιτούμενη ακρίβεια} = 10^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} 10^{5-3} = 50$$

$$\text{Αν απαιτούμενη ακρίβεια} = 10^{-2} \Rightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} 10^{5-2} = 500$$

Εκτίμηση της ακρίβειας λύσης από τον αριθμό συνθήκης:

Αν τα δεδομένα είναι προσεγγιστικά ακριβή και αν $\text{cond}(A) = 10^s$ τότε με ακρίβεια t σημαντικών ψηφίων η υπολογιζόμενη λύση $\hat{x}$ θα έχει ακρίβεια περίπου $t - s$ σημαντικά ψηφία

Conditioning και οδήγηση

Συμπτώματα για ill conditioning:

1. Ένα "μικρό" οδηγό στοιχείο
2. Μια μεγάλη υπολογισθείσα λύση
3. Ένα μεγάλο διάνυσμα υπόλοιπο r

Υπάρχουν πίνακες που δεν παρουσιάζουν κανένα από τα παραπάνω συμπτώματα, αλλά είναι ill conditioned. (π.χ. Wilkinson)

Επαναληπτικές μέθοδοι

$$Ax = b \rightarrow x = Gx + k$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (\text{ ή } x = A^{-1}b)$$

$$R^{-1}Ax = R^{-1}b$$

$$x = x + \tau R^{-1}(b - Ax) \rightarrow x^{(m+1)} = x^{(m)} + \tau R^{-1}(b - Ax^{(m)}) \rightarrow$$

Στατική επιταχυντική επαναληπτική μέθοδος 1ου βαθμού

$$x^{(m+1)} = \underbrace{(I - \tau R^{-1}A)}_{G_\tau} x^{(m)} + \underbrace{\tau R^{-1}b}_{k_\tau}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Στατική αν το τ είναι σταθερό σε κάθε επανάληψη.

Αν $\tau = \tau(m)$ η μέθοδος είναι μη στατική

Συνθήκη σύγκλισης: $\rho(G) < 1$

Ο πίνακας R ονομάζεται preconditioned (πίνακας προρύθμισης)