

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Διδάσκουσα: ΕΔΙΠ Μ. Λουκά

ΕΚΠΑ

8 Ιανουαρίου 2026

Επαναληπτικές Μέθοδοι για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μη ιδιάζων πίνακας και $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Επαναληπτικές Μέθοδοι

Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι :

- Μεγάλης τάξης ($\sim 10^3 - 10^6$)
- Αραιός
- Συγκεκριμένης δομής

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{Gx} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$$

Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathbf{G}_\tau} \mathbf{x}^{(m)} + \underbrace{\tau \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{k}_\tau}$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}_\tau$$

Γραμμική στατική Επαναληπτική μέθοδος 1ου βαθμού

Για $\tau = 1$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

όπου

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{k} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}$$

$\mathbf{x}^{(0)}$ αυθαίρετο,

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \dots$$

Σύγκλιση της Επαναληπτικής Μεθόδου

Θεώρημα 3.1.1

Η επαναληπτική μέθοδος

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

συγκλίνει αν και μόνον αν

$$\rho(\mathbf{G}) < 1 \quad (2)$$

όπου

$$\rho(\mathbf{G}) = \max_i |\lambda_i|, \quad \text{η φασματική ακτίνα}$$

λ_i ιδιοτιμές του $\mathbf{G}$

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{x}$ το όριο της ακολουθίας $\mathbf{x}^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ και $\mathbf{e}^{(m)}$ το διάνυσμα του σφάλματος στην m επανάληψη

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}$$

Αφού

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{k}$$

προκύπτει ότι

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}}_{\mathbf{e}^{(m+1)}} = \mathbf{G} \underbrace{(\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x})}_{\mathbf{e}^{(m)}}$$

$$\mathbf{e}^{(m+1)} = \mathbf{G}\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{G}^2\mathbf{e}^{(m-1)} = \dots = \mathbf{G}^{m+1}\mathbf{e}^{(0)}$$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{G}^m \mathbf{e}^{(0)} \tag{3}$$

Έρα $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{0}$ ή λόγω της (3) αν $\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{G}^m \mathbf{e}^{(0)}) = \mathbf{0}$ για κάθε αυθαίρετο $\mathbf{e}^{(0)}$.

..Απόδειξη

Συνεπώς από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{G}^m = \mathbf{0}$ είναι η $\rho(\mathbf{G}) < 1$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\rho(\mathbf{G}) < 1$, τότε ο $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ είναι μη ιδιάζων και το σύστημα $(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{u} = \mathbf{k}$ έχει μία και μοναδική λύση.

Αν όμως $\rho(\mathbf{G}) < 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}^m = \mathbf{0}$ ή $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}^m\| = 0$.

Επειδή $\|\mathbf{G}^m \mathbf{e}^{(0)}\| \leq \|\mathbf{G}^m\| \|\mathbf{e}^{(0)}\|$ συνεπάγεται ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{G}^m \mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{0}$, οπότε από την (3) προκύπτει ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{0}$ ή $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{u}$, δηλαδή ότι η ε.μ. (26) συγκλίνει.

Σύγκλιση της ε.μ.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathbf{G}) < 1$$

- Ικανή συνθήκη :

$$\|\mathbf{G}\|_{\alpha} < 1$$

Κριτήριο διακοπής της σύγκλισης

m επανάληψη

$m + 1$ επανάληψη

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(m)} \\ \mathbf{x}_2^{(m)} \\ \mathbf{x}_3^{(m)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(m)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(m+1)} \\ \mathbf{x}_2^{(m+1)} \\ \mathbf{x}_3^{(m+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(m+1)}$$

$$\|\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)}\|_{\alpha} < \epsilon, \quad \epsilon = \frac{1}{2} 10^{-d}$$

ή

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)}\|_{\alpha}}{\|\mathbf{x}^{(m+1)}\|_{\alpha}} < \epsilon, \quad \epsilon = \frac{1}{2} 10^{-d}$$

όπου $\alpha = 1$ ή 2 ή ∞ .

Ταχύτητα σύγκλισης μιας επαναληπτικής μεθόδου

Στην πράξη εκτός από την εξασφάλιση της σύγκλισης μιας ε.μ., μας ενδιαφέρει η ταχύτητα με την οποία συγκλίνει η μέθοδος που χρησιμοποιούμε. Με άλλα λόγια επιθυμούμε να μελετήσουμε την ταχύτητα με την οποία $e^{(k)} \rightarrow 0$ για $k \rightarrow \infty$. Από την (::) έχουμε ότι αν $x^{(0)} \neq x$, τότε

$$\|e^{(k)}\| / \|e^{(0)}\| \leq \|G^k\|. \quad (4)$$

Έτσι η $\|G^k\|$ δίνει το μέγεθος με το οποίο η *norm* του σφάλματος έχει ελαττωθεί σε ένα κλάσμα έστω ϱ της $\|e^{(0)}\|$. Η ελάττωση αυτή μπορεί να επιτευχθεί αν διαλέξουμε το k έτσι ώστε

$$\|G^k\| \leq \varrho. \quad (5)$$

Μέση ταχύτητα σύγκλισης

Για όλα λοιπόν τα αρκετά μεγάλα k ώστε

$$\| G^k \| \leq 1$$

η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$k \geq \lceil -\log \varrho / (-\frac{1}{k} \log \| G^k \|) \rceil \quad (6)$$

όπου $\lceil \xi \rceil$ συμβολίζει τον ελάχιστο ακέραιο μεγαλύτερο του ξ . Η (6) δίνει τον ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλιση της (;). Παρατηρούμε δε ότι ο αριθμός αυτός είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την ποσότητα $(-\frac{1}{k} \log \| G^k \|)$. Έτσι οδηγούμαστε στον ορισμό της μέσης ταχύτητας σύγκλισης που είναι η ποσότητα

$$R_k(G) = -\frac{1}{k} \log \| G^k \| . \quad (7)$$

Ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης

Ορίζουμε ως *ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης* ή *ταχύτητα σύγκλισης*, την ποσότητα

$$R(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(G) = -\log \rho(G) \quad (8)$$

καθόσον μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\rho(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|G^k\|^{1/k}).$$

Για να έχουμε μια (όχι και τόσο καλή) προσέγγιση του αριθμού των επαναλήψεων που χρειάζεται η (26) για να συγκλίνει χρησιμοποιούμε, σύμφωνα με την 6, τον τύπο

$$k \simeq \frac{-\log \rho}{R(G)}. \quad (9)$$

Συμπέρασμα

Από τον ανωτέρω τύπο και την (8) συμπεραίνουμε ότι όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα G τόσο ταχύτερα θα συγκλίνει ασυμπτωτικά η επαναληπτική μέθοδος. Ωστόσο για να εκτιμήσουμε την αποτελεσματικότητα μιας επαναληπτικής μεθόδου θα πρέπει να λαβουμε υπόψη τόσο την ταχύτητα σύγκλισής της όσο και την υπολογιστική πολυπλοκότητα που απαιτεί η κάθε επανάληψη.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Βασική διάσπαση του πίνακα **A**

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \vdots & \vdots & \vdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \vdots & \vdots & \vdots & -a_{2n} \\ & & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & -a_{3n} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & & -a_{n-1,n} \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Χρήσιμες μορφές πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα στους τύπους των επαναληπτικών μεθόδων

$$(\mathbf{D} \mathbf{x})_i = \mathbf{a}_{ii} \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(\mathbf{C}_L \mathbf{x})_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(\mathbf{C}_U \mathbf{x})_i = - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Θέτουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_L$$

και

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_U$$

τότε έχουμε

Χρήσιμες μορφές πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα στους τύπους των επαναληπτικών μεθόδων

Θέτουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_L$$

και

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_U$$

τότε έχουμε

$$(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{x})_i = \frac{1}{a_{ii}} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(\mathbf{L} \mathbf{x})_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(\mathbf{U} \mathbf{x})_i = - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Βασικές Επιταχυντικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A})}_{\mathbf{G}_\tau} \mathbf{x}^{(m)} + \underbrace{\tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{k}_\tau} \quad (11)$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}_\tau \quad (12)$$

Παρατήρηση

Για $\tau = 1$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{G} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

όπου

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{k} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}$$

Θεώρημα 3.2.1

Αν οι ιδιοτιμές $r_i, i = 1, 2, \dots, n$ του πίνακα $R^{-1}A$ είναι πραγματικές το επαναληπτικό σχήμα (;;) συγκλίνει αν και μόνον αν

$$r_1 > 0 \quad \text{και} \quad 0 < \tau < 2/r_n \quad (14)$$

ή

$$r_n < 0 \quad \text{και} \quad 2/r_1 < \tau < 0. \quad (15)$$

Απόδειξη

Λόγω της (11) οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ του G_τ και εκείνες του $R^{-1}A$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\lambda_i = 1 - \tau r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της (12) είναι η

$$\rho(G_\tau) < 1 \quad (17)$$

ή

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \tau r_i| < 1 \quad (18)$$

από την οποία εύκολα προκύπτουν οι (14) και (15) (;). $\square$

Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι ενώ το επαναληπτικό σχήμα (12) συγκλίνει αν ισχύουν μία από τις (14), (15), η βασική μέθοδος (13) (για $\tau = 1$) μπορεί να αποκλίνει καθώς είναι δυνατό $\rho(G) > 1$.

Θεώρημα 3.2.2

Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα $R^{-1}A$ είναι πραγματικές και το επαναληπτικό σχήμα (12) συγκλίνει, τότε για

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{r_1 + r_n} \quad (19)$$

η $\rho(G_\tau)$ γίνεται ελάχιστη και η αντίστοιχη τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$\rho(G_{\tau_0}) = \frac{|1 - k(R^{-1}A)|}{1 + k(R^{-1}A)} \quad (20)$$

όπου $k(R^{-1}A) = r_n/r_1$.

Απόδειξη

Αφήνεται σαν άσκηση (βλ. (;)).

Παρατήρηση

Από την (20) παρατηρούμε ότι ο πίνακας R θα πρέπει να εκλεγεί τέτοιος ώστε $k(R^{-1}A) \leq k(A)$ καθώς η ποσότητα $\rho(G_{\tau_0})$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του $k(R^{-1}A)$ όταν $r_1 > 0$ (ανάλογη παρατήρηση ισχύει αν $r_n < 0$). Με άλλα λόγια για επιπλέον ελαχιστοποίηση της $\rho(G_{\tau_0})$ θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $k(R^{-1}A)$.

Θεώρημα 3.2.3

Αν οι ιδιοτιμές $r_i, i = 1, 2, \dots, n$ του πίνακα $R^{-1}A$ είναι πραγματικές το επαναληπτικό σχήμα (13) συγκλίνει αν και μόνον αν

$$0 < r_1 \quad \text{και} \quad r_n < 2. \quad (21)$$

Επιπλέον,

$$\rho(G) = \begin{cases} 1 - r_1, & \text{αν } r_n \leq 1 \\ r_n - 1, & \text{αν } r_1 \geq 1. \end{cases} \quad (22)$$

Απόδειξη

Προκύπτει εύκολα από εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.1. $\square$

Παρατήρηση

Για τη σύγκλιση της βασικής ε.μ. (13) (για $\tau = 1$) θα πρέπει να ισχύει η επιπλέον συνθήκη $r_n < 2$ σε σχέση με τη σύγκλιση της (12). Επίσης είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$\rho(G_{\tau_0}) \leq \rho(G) \quad (23)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η (12) θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης από την (;;) γι' αυτό και θα αναφέρεται σαν η επιταχυντική μορφή της (;;). Στη συνέχεια ο πίνακας R θα λάβει διάφορες μορφές και θα σχηματίσουμε από την (12) τις αντίστοιχες επαναληπτικές μεθόδους.

Επαναληπτική μέθοδος Επιταχυντική Jacobi (Jacobi Overrelaxation (JOR))

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Αν στην (24) διαλέξουμε τον $\mathbf{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{R} = \mathbf{D}$ τότε προκύπτει

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A})}_{\mathbf{B}_\tau} \mathbf{x}^{(m)} + \underbrace{\tau \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{k}_\tau} \quad (25)$$

ή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{B}_\tau \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}_\tau, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Αναλύοντας περισσότερο την (26) λαμβάνουμε

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = [(1 - \tau)\mathbf{I} + \tau \mathbf{B}] \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{c}, \quad (27)$$

όπου

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_L \quad \text{και} \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_U. \quad (28)$$

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi(J)

Αν $\tau = 1$ τότε προκύπτει η ε.μ **Jacobi** η οποία γράφεται:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathcal{B}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

όπου

$$\mathcal{B} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U) = \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_L}_L + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_U}_U = \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ. **Jacobi**.

Σύγκλιση της ε.μ. (J)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathcal{B}) < 1$$

Ικανή συνθήκη :

Επειδή

$$\rho(\mathcal{B}) \leq \|\mathcal{B}\|_{\infty} = \max_{i=1(1)n} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}}$$

Η ε.μ. **(J)** συγκλίνει αν ισχύει

$$\max_{i=1(1)n} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}} < 1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{|a_{ii}|} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|} < 1, \quad \text{για κάθε } i$$

Σύγκλιση της ε.μ. (J)

Αυστηρά διαγωνίως υπερτερών πίνακας

αν ισχύει

$$|a_{ii}| > \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|}, \quad \text{για κάθε } i$$

τότε ο πίνακας **A** λέγεται **αυστηρά διαγωνίως υπερτερών (α.δ.υ)**.

Αρα αν ο **A** είναι **α.δ.υ.** τότε ισχύει

$$\rho(B) \leq \|B\|_{\infty} < 1$$

δηλ. η ε.μ. **J** **συγκλίνει**.

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi(J)

Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_3^{(m)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(m)} \\ x_i^{(m)} \\ x_{i+1}^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(m+1)} \\ x_i^{(m+1)} \\ x_{i+1}^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(m+1)}$$

Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(m+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}$$

Ναδειχθεί ότι η μέθοδος του *Jacobi* συγκλίνει και να βρεθούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις, αν $x^{(0)} = (1, 0, 1)$.

Λύση

Ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου *Jacobi* είναι ο

$$B = I - D^{-1}A = L + U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

Επίσης $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 1$. Οι ιδιοτιμές του B είναι 0 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, επομένως $\rho(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

$$\begin{aligned}x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)}) \\x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(m)} + x_3^{(m)}), \\x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)}).\end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Για $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή για $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$ έχουμε
m = 0

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

m = 1

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

m = 2

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Αλγόριθμος της ε.μ Jacobi(J)

1. Διάβασε **n**, ϵ , **maxiter**
2. Για **i = 1(1)n** επανάλαβε
 Διάβασε **x0_i**
 Διάβασε **b_i**
 για **j = 1(1)n** επανάλαβε
 Διάβασε **a_{ij}**
3. **itcount = 0**
4. Όσο ισχύει **itcount ≤ maxiter** επανάλαβε

4.1 Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

$$x1_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

4.2 **itcount = itcount + 1**

4.3 Αν $\|x1 - x0\|_{\infty} < \epsilon$ τότε

 Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

 Τύπωσε **x1_i**

 Τέλος.

4.4 Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

x0_i = x1_i

5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από *maxiter* επαναλήψεις")
6. Τέλος

Υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου της ε.μ (J)

4.1 Για $i = 1(1)n$ επανάλαβε

$$x1_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

- **A** πυκνός

Στην κάθε επανάληψη απαιτούνται

Διαιρέσεις : $[(i - 1) + (n - i) + 1] * n = n^2$

Πολλαπλασιασμοί : $[(i - 1) + (n - i)] * n = n(n - 1)$

Προσθαιρέσεις : $n(n - 1)$

Αν υποθέσουμε ότι απαιτούνται **k** επαναλήψεις για τη σύγκλιση της μεθόδου J, τότε έχουμε συνολικά :

Διαιρέσεις : kn^2

Πολλαπλασιασμοί : $kn(n - 1) = kn^2 - kn$

Προσθαιρέσεις : $kn(n - 1) = kn^2 - kn$

Επαναληπτική μέθοδος **Επιταχυντική** Gauss-Seidel (GS)

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Αν διαλέξουμε τον $\mathbf{R}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L \quad (30)$$

τότε προκύπτει

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}) \quad (31)$$

ή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathcal{L}_{\tau,1} \mathbf{x}^{(m)} + \tau (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{c} \quad (32)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\tau,1} = \mathbf{I} - \tau (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}. \quad (33)$$

Εκφράζοντας τον $\mathcal{L}_{\tau,1}$ σε όρους των $\mathbf{L}$ και $\mathbf{U}$ έχουμε

$$\mathcal{L}_{\tau,1} = \mathbf{I} - \tau (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{U}) = (\mathbf{I} - \tau) \mathbf{I} + \tau (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}. \quad (34)$$

Οπότε έχουμε

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \tau) \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{L} \mathbf{x}^{(m+1)} + (\tau - 1) \mathbf{L} \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{c}. \quad (35)$$

Η ανωτέρω μέθοδος καλείται **Επιταχυντική Gauss-Seidel (EGS)** και για $\tau = 1$ προκύπτει η γνωστή μέθοδος **Gauss-Seidel (GS)**

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}}_{\mathcal{L}_1} \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{L} \mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_3^{(m)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(m)} \\ x_i^{(m)} \\ x_{i+1}^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(m+1)} \\ x_i^{(m+1)} \\ x_{i+1}^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(m+1)}$$

Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(m+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n$$

Σύγκλιση της ε.μ. Gauss-Seidel

Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathcal{L}_1) < 1$$

Ικανή συνθήκη :

Αν ο **A** είναι α.δ.υ. τότε ισχύει

$$\|\mathcal{L}_1\| \leq \|B\|_\infty < 1$$

δηλ. η ε.μ. GS συγκλίνει.

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel(GS)

Για $\tau = 1$ προκύπτει ο τύπος της ε.μ GS

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{L} \mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}. \quad (36)$$

Επαν. μέθοδοι **EGS** και **GS** υπό μορφή συνιστωσών

- **EGS**

$$x_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} + (1-\tau) x_i^{(m)} + (\tau-1) \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} \right) + \tau \left(\sum_{j=i+1}^v a_{ij} x_j^{(m)} \right) + \tau \hat{b}_i, \quad i = 1(1)n \quad (37)$$

- **GS** για $\tau = 1$ προκύπτει

$$x_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^v a_{ij} x_j^{(m)} + \hat{b}_i, \quad i = 1(1)n. \quad (38)$$

όπου $\hat{a}_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ και $\hat{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$.

Παρατηρήσεις

- Για την ύπαρξη των δύο ανωτέρω μεθόδων θα πρέπει να υπάρχει ο $(\mathbf{D} - \mathbf{C}_L)^{-1}$ ή $\det(\mathbf{D} - \mathbf{C}_L) = \det \mathbf{D} \neq 0$ πράγμα που ισχύει αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ είναι διάφορα του μηδενός.
- Παρατηρούμε ότι στις ε.μ. **EGS** και **GS** οι αριθμητικές πράξεις επηρεάζονται αν εναλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων του συστήματός μας.

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}$$

Ναδειχθεί ότι η μέθοδος του GS συγκλίνει και να βρεθούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις, αν $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 1)$.

Λύση

Ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου GS είναι ο

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Από τη σχέση $(I - L)X = I$ υπολογίζεται εύκολα ο $(I - L)^{-1}$. Επομένως

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_1$ είναι οι $0, 0, 1/2$ επομένως $\rho(\mathcal{L}_1) = 1/2 < 1$ που αποδεικνύει ότι η GS συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι $\rho(\mathcal{L}_1) = [S(\mathcal{B})]^2$ για το παρόν παράδειγμα.

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)}),$$

$$m = 0, 1, 2 \dots$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m+1)}).$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Για $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή για $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$, έχουμε

m = 0

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

m = 1

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{8}\right) = \frac{15}{16}$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

$$m = 2$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{8}\right) = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\right) = \frac{15}{16}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{15}{16}\right) = \frac{31}{32}.$$

Παρατήρηση

Η μέθοδος GS συγκλίνει πολύ γρηγορότερα από τη μέθοδο Jacobi προς την ακριβή λύση $(1, 1, 1)^T$ του συστήματος. Αυτό αναμενόταν αφού $R(\mathcal{L}_1) = 2R(B)$.

Αλγόριθμος της ε.μ Gauss-Seidel(GS)

B1. Διάβασε **n**, **ε**, **maxiter**

B2. Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

για **j = 1(1)n** επανάλαβε

Διάβασε **a_{ij}**

Διάβασε **b_i**

Διάβασε **x0_i**

B3. **itcount = 0**

B4. Όσο ισχύει **itcount ≤ maxiter** επανάλαβε

B4.1 Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

$$x1_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x1_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

B4.2 **itcount = itcount + 1**

B4.3 Αν $\|x1 - x0\|_{\infty} < \epsilon$ τότε

Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

Τύπωσε **x1_i**

Τέλος.

B4.4 Για **i = 1(1)n** επανάλαβε

x0_i = x1_i

B5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από **maxiter** επαναλήψεις")

B6. Τέλος

Επαναληπτική **Επιταχυντική** μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης
(Extrapolated Successive Overrelaxation (ESOR))

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

Είναι δυνατόν να βρεθούν δύο άλλες μέθοδοι αν εισάγουμε μία παράμετρο στη μορφή του $\mathbf{R}$. Έτσι αν θέσουμε

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} - \omega \mathbf{C}_L \quad (40)$$

στην (39), όπου ω είναι ένας πραγματικός αριθμός του οποίου ο ρόλος στη φάση αυτή είναι να διαταράξει τον $\mathbf{R}$ έτσι ώστε να προσεγγίζει καλύτερα τον $\mathbf{A}$ τότε έχουμε

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}), \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

ή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathcal{L}_{\tau, \omega} \mathbf{x}^{(m)} + \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{c} \quad (42)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\tau, \omega} = \mathbf{I} - \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}. \quad (43)$$

Επαναληπτική **Επιταχυντική** μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης (Extrapolated Successive Overrelaxation (ESOR))

Προκειμένου να βρούμε την εξίσωση των συνιστωσών η (41) μπορεί να γραφτεί σαν

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{1} - \tau)\mathbf{x}^{(m)} + \omega \mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} + (\tau - \omega)\mathbf{L}\mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{c} \quad (44)$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} x_i^{(m+1)} = & (\mathbf{1} - \tau)x_i^{(m)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} + (\tau - \omega) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} \\ & + \tau \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)} + \tau b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (45)$$

Κατά την υλοποίηση της *ESOR* είναι δυνατόν να γίνει εξοικονόμηση των υπολογισμών αν αποθηκευτεί η ποσότητα $Lx^{(m)}$ προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη επανάληψη.

Επαναληπτική μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης (Successive Overrelaxation (SOR))

Αν θέσουμε $\tau = \omega$ στην ESOR λαμβάνουμε τη δημοφιλή *Successive Overrelaxation*(SOR) μέθοδο, η οποία δίνεται διαδοχικά από τους τύπους

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(m)}) \quad (46)$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathcal{L}_\omega \mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \quad (47)$$

όπου

$$\mathcal{L}_\omega = \mathbf{I} - \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}. \quad (48)$$

ή

$$\mathcal{L}_\omega = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{U}]$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ. **SOR**.

Επαναληπτική μέθοδος (Successive Overrelaxation (SOR))

Επίσης η SOR γράφεται και σαν

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega \mathbf{U}]\mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \quad (49)$$

ή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(m)} + \omega[\mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}]. \quad (50)$$

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα της αγκύλης είναι η GS μέθοδος, συνεπώς η (50) λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(m)} + \omega\mathbf{x}_{GS}^{(m+1)} \quad (51)$$

όπου $\mathbf{x}_{GS}^{(m+1)}$ συμβολίζει την $m + 1$ επανάληψη της GS μεθόδου. Η (51) υπήρξε η αφετηρία της ανακάλυψης της SOR μεθόδου. Τέλος, υπό μορφή συνιστωσών η SOR δίνεται από τους τύπους

$$x_i^{(m+1)} = (1 - \omega)x_i^{(m)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} + \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)} + \omega b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Σύγκλιση της ε.μ. SOR

Αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$, τότε

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Αλλά

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \det \{ (I - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega U] \}$$

$$\det \{ (I - \omega L)^{-1} \} \cdot \det \{ (1 - \omega)I + \omega U \}$$

$$= 1 \cdot (1 - \omega)^n = (1 - \omega)^n$$

$$[\mathbf{s}(\mathcal{L}_\omega)]^n \geq \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right| = |(1 - \omega)^n| = |1 - \omega|^n$$

Αρα

$$|1 - \omega| \leq \mathbf{s}(\mathcal{L}_\omega)$$

Σύγκλιση της ε.μ. SOR

Για να συγκλίνει η ε.μ. **SOR** θα πρέπει να ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$$

Αρα

$$|1 - \omega| < 1$$

ή

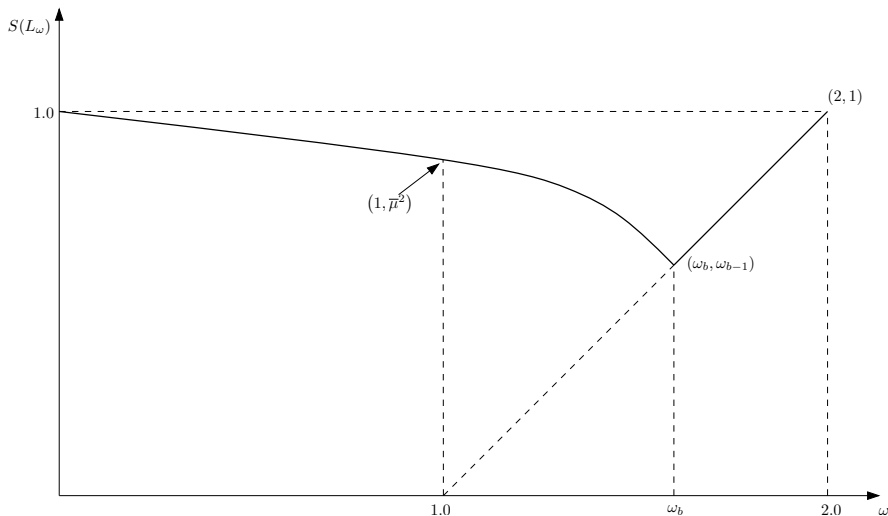
$$0 < \omega < 2$$

Επομένως, αν η ε.μ. **SOR** συγκλίνει τότε $0 < \omega < 2$.

Η βέλτιστη τιμή ω_b της παραμέτρου ω προσδιορίζεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η φασματική ακτίνα $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ του επαναληπτικού πίνακα της ε.μ. **SOR**.

Η μελέτη της $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ σαν συνάρτηση της ω φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Μελέτη της φασματικής ακτίνας $\rho(\mathcal{L}_\omega)$



$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mathbf{s}(\mathbf{B})^2}}, \quad \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1$$

- Υπό μορφή πινάκων

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(m)} + \omega\mathbf{x}_{GS}^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ή

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- Υπό μορφή συντεταγμένων

$$x_i^{(m+1)} = (1 - \omega)x_i^{(m)} + \omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{ii}}\right)$$

$$i = 1(1)n$$

Επαναληπτική μέθοδος SOR

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -x_2 & & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & & = 1 \end{array}$$

Ναδειχθεί ότι η μέθοδος του SOR συγκλίνει και να βρεθούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις, αν $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 1)$.

Λύση

Η μέθοδος SOR δίνεται από το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα :

$$x^{(m+1)} = (1 - \omega)x^{(m)} + \omega x_{GS}^{(m+1)},$$

όπου $x_{GS}^{(m+1)}$ είναι το επαναληπτικό διάνυσμα που προκύπτει από την εφαρμογή της Gauss-Seidel μεθόδου. Επομένως, για το τριδιαγώνιο σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος, η SOR παράγει το επαναληπτικό σχήμα :

Επαναληπτική μέθοδος SOR

$$x_1^{(m+1)} = (1 - \omega)x_1^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = (1 - \omega)x_2^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$x_3^{(m+1)} = (1 - \omega)x_3^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m+1)}).$$

Η βέλτιστη τιμή του ω δίνεται από τον τύπο (Θεώρημα 1.4.16)

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - S(B)^2}}$$

ή

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \simeq 1.1716.$$

ενώ

$$S(\omega_b) = \omega_b - 1 \simeq 0.1716.$$

Επαναληπτική μέθοδος SOR

Λαμβάνοντας, $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή, $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$ έχουμε για $\mathbf{m} = \mathbf{0}$

$$x_1^{(1)} = \left(1 - \frac{4}{2 + \sqrt{2}}\right) \cdot 1 + \frac{2}{2 + \sqrt{2}}(1 + 0) = 1 - \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \simeq 0.4142$$

$$x_2^{(1)} = \left(1 - \frac{4}{2 + \sqrt{2}}\right) \cdot 0 + \frac{2}{2 + \sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + 1\right) = \frac{4(1 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})^2} \simeq 0.8984$$

$$x_3^{(1)} = \left(1 - \frac{4}{2 + \sqrt{2}}\right) \cdot 1 + \frac{2}{2 + \sqrt{2}}\left(1 + \frac{4(1 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})^2}\right) = 1 - \frac{4}{(2 + \sqrt{2})^3} \simeq 0.8995$$

Αλγόριθμος της ε.μ SOR

B1. Διάβασε n , ω , ϵ , **maxiter**

B2. Για $i = 1(1)n$ επανάλαβε

για $j = 1(1)n + 1$ επανάλαβε

Διάβασε a_{ij}

Διάβασε $x0_i$

B3. **itcount** = 0

B4. Όσο ισχύει **itcount** $\leq$ **maxiter** επανάλαβε

B4.1 Για $i = 1(1)n$ επανάλαβε

$$x1_i = (1 - \omega)x0_i + \omega \left(- \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x1_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \right)$$

B4.2 **itcount** = **itcount** + 1

B4.3 Αν $\|x1 - x0\|_{\infty} < \epsilon$ τότε

Για $i = 1(1)n$ επανάλαβε

Τύπωσε $x1_i$

Τέλος.

B4.4 Για $i = 1(1)n$ επανάλαβε

$x0_i = x1_i$

B5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από **maxiter** επαναλήψεις")

B6. Τέλος

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -k & 0 \\ -k & 2 & -k \\ 0 & -k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - k \\ 2 - 2k \\ 2 - k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- 2.1** Να δοθούν οι εξισώσεις υπο μορφή συνιστωσών της επαναληπτικής μεθόδου **Gauss-Seidel(GS)** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.
- 2.2** Να βρεθεί **ικανή** και **αναγκαία** συνθήκη έτσι ώστε η ε.μ. **(GS)** να συγκλίνει.
- 2.3** Για $k = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{x}^{(2)}$ της ε.μ.
- α) GS**
- β) SOR** για $\omega = 1/2$.

Είναι: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -k & 0 \\ -k & 2 & -k \\ 0 & -k & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 - k \\ 2 - 2k \\ 2 - k \end{bmatrix}$

Η βασική διάσπαση του $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U$$

όπου

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_U = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

όπου

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & k/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_U = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

- Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{L} \mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{U} \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$$

- Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(m+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)3$$

2.1 Οι εξισώσεις υπο μορφή συνιστωσών της ε.μ. **GS** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος είναι οι :

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{k}{2} x_2^{(m)} + \frac{2-k}{2} \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{k}{2} x_1^{(m+1)} + \frac{k}{2} x_3^{(m)} + \frac{2-2k}{2}, \quad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{k}{2} x_2^{(m+1)} + \frac{2-k}{2} \end{aligned}$$

2.2 Επαναληπτικός πίνακας της ε.μ GS

Ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ GS είναι ο

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

Είναι:

$$\mathbf{I} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{k}/2 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{k}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του $(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & 0 \\ \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L})(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} = \mathbf{I}$$

$$(I - L)(I - L)^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k/2 & 1 & 0 \\ 0 & -k/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ (-k/2)x_1 + y_1 & y_2 & 0 \\ (-k/2)y_1 + z_1 & (-k/2)y_2 + z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = k/2, \quad y_2 = 1$$

$$z_1 = k^2/4, \quad z_2 = k/2, \quad z_3 = 1$$

ρα

$$(I - L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/2 & 1 & 0 \\ k^2/4 & k/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k}/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^2/4 & \mathbf{k}/2 \\ 0 & \mathbf{k}^3/8 & \mathbf{k}^2/4 \end{bmatrix}$$

Ικανή και **αναγκαία** συνθήκη σύγκλισης της ε.μ. **GS**

Η ε.μ **GS** συγκλίνει $\iff \rho(\mathcal{L}_1) < 1$

Εύρεση των ιδιοτιμών του $\mathcal{L}_1$

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda \mathbf{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{k}/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^2/4 - \lambda & \mathbf{k}/2 \\ 0 & \mathbf{k}^3/8 & \mathbf{k}^2/4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Εύρεση των ιδιοτιμών του $\mathcal{L}_1$

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & k/2 & 0 \\ 0 & k^2/4 - \lambda & k/2 \\ 0 & k^3/8 & k^2/4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ρίζες : $\lambda = 0, 0, k^2/2$

- Αν $k = 0$ τότε $\rho(\mathcal{L}_1) = 0 < 1$, οπότε η ε.μ. **GS** συγκλίνει.
- Αν $k \neq 0$ τότε $\rho(\mathcal{L}_1) = |k^2/2|$, οπότε πρέπει :

$$|k^2/2| < 1 \iff -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

‘ρα $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2.3 Υπολογισμός της προσεγγιστικής τιμής $x^{(2)}$

Για $\mathbf{k} = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$ έχουμε :

α) ε.μ. GS

$$\underline{\mathbf{m} = 0}$$

$$\underline{\mathbf{i} = 1}$$

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\mathbf{i} = 2}$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{0} + \mathbf{x}_1^{(1)} + \mathbf{x}_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{0} + 1/2 + 1) = \frac{3}{4}$$

$$\underline{\mathbf{i} = 3}$$

$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 3/4) = \frac{7}{8}$$

$$\underline{m = 1}$$

$$\underline{i = 1}$$

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{x}_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{0}) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{i = 2}$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{0} + \mathbf{x}_1^{(1)} + \mathbf{x}_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{0} + 1/2 + \mathbf{1}) = \frac{3}{4}$$

$$\underline{i = 3}$$

$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{x}_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + 3/4) = \frac{7}{8}$$

β) ε.μ SOR

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= (1 - \omega)x_1^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(2 - k + kx_2^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} &= (1 - \omega)x_2^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(2 - 2k + kx_1^{(m+1)} + kx_3^{(m)}) , \quad m = 0, 1, \dots \\ x_3^{(m+1)} &= (1 - \omega)x_3^{(m)} + \omega \frac{1}{2}(2 - k + kx_2^{(m+1)}) \end{aligned}$$

Για $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ και $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$

και για $\omega = 1/2$ έχουμε :

$$\underline{\mathbf{m} = \mathbf{0}}$$

$$\underline{i = 1}$$

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}_2^{(0)}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}(1 + 0) = \frac{3}{4}$$

$$\underline{i = 2}$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(0 + \mathbf{x}_1^{(1)} + \mathbf{x}_3^{(0)}) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}(3/4 + 1) = \frac{7}{16}$$

$$\underline{i = 3}$$

$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_3^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}_2^{(1)}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}(1 + 7/16) = \frac{55}{64}$$

$$\underline{m = 1}$$

$$\underline{i = 1}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}x_1^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 + 7/16) = \frac{47}{64}$$

$$\underline{i = 2}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(0 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4}(47/64 + 55/64) = \frac{158}{256}$$

$$\underline{i = 3}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{53}{64} + \frac{1}{4}(1 + 158/256) = \frac{854}{1024}$$

Επαναληπτικές μέθοδοι δύο επιπέδων :

1. Symmetric SOR(**SSOR**) και
2. Preconditioned Simultaneous Displacement(**PSD**)

Η μέθοδος **SSOR**

Κάθε επανάληψη της SSOR αποτελείται από δύο ημιεπαναλήψεις. Η πρώτη είναι μία **προς τα εμπρός SOR** που υπολογίζει τους αγνώστους με τη διάταξη $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ και η άλλη είναι μία **προς τα πίσω SOR** υπολογίζοντας τους αγνώστους με αντίθετη διάταξη δηλαδή $x_i, i = n, n-1, \dots, 1$. Υπό μορφή πινάκων η SSOR είναι το επαναληπτικό σχήμα

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = (1 - \omega)x^{(m)} + \omega(Lx^{(m+\frac{1}{2})} + Ux^{(m)} + c)$$

και

(53)

$$x^{(m+1)} = (1 - \omega)x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega(Lx^{(m+\frac{1}{2})} + Ux^{(m+1)} + c)$$

όπου $\omega \neq 0$ είναι μία πραγματική παράμετρος και $x^{(m+\frac{1}{2})}$ είναι μια ενδιάμεση προσέγγιση της λύσης του συστήματος.

Η μέθοδος **SSOR** (υπό μορφή συνιστωσών)

$$x_i^{(m+\frac{1}{2})} = (1-\omega)x_i^{(m)} + \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}x_j^{(m+\frac{1}{2})} + \sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij}x_j^{(m)} + \hat{b}_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

και

$$x_i^{(m+1)} = (1-\omega)x_i^{(m+\frac{1}{2})} + \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}x_j^{(m+\frac{1}{2})} + \sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij}x_j^{(m+1)} + \hat{b}_i\right),$$
$$i = n, n-1, \dots, 1.$$

Από τις (53) έχουμε ότι

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = \mathcal{L}_\omega x^{(m)} + \omega(I - \omega L)^{-1}c$$

και (54)

$$x^{(m+1)} = \mathcal{U}_\omega x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega(I - \omega U)^{-1}c$$

όπου

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$$

(55)

και

$$\mathcal{U}_\omega = (I - \omega U)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega L].$$

Απαλείφοντας τον όρο $x^{(m+\frac{1}{2})}$ από τις (54) η SSOR γίνεται

$$x^{(m+1)} = \mathcal{F}_\omega x^{(m)} + c_\omega$$

(56)

όπου

$$\mathcal{F}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega = I - \omega(2 - \omega)(I - \omega U)^{-1}(I - \omega L)^{-1}D^{-1}A$$

(57)

και

$$c_\omega = \omega(2 - \omega)(I - \omega U)^{-1}(I - \omega L)^{-1}c.$$

(58)

Παρατηρήσεις

- Από τις (57) και (58) παρατηρούμε ότι $\omega \neq 0, 2$.
- Επειδή η SSOR είναι ο συνδυασμός δύο SOR επαναλήψεων, οι υπολογισμοί εξαρτώνται από τη διάταξη των εξισώσεων.
- Επίσης η SSOR απαιτεί διπλάσια υπολογιστική εργασία από την SOR. Ωστόσο είναι δυνατόν να μειωθεί η υπολογιστική εργασία για κάθε SSOR επανάληψη με τη διάθεση ενός επιπλέον n -διάστατου διανύσματος. Η τεχνική αυτή (γνωστή σαν το σχήμα του Niethammer) είναι δυνατή καθόσον ορισμένα διανύσματα επαναλαμβάνονται μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων και δεν χρειάζεται να υπολογιστούν πάλι όπως υποδηλώνεται παρακάτω

Το σχήμα του Niethammer

$$\begin{cases} x^{(m+\frac{1}{2})} = \omega(\mathbf{L}x^{(m+\frac{1}{2})} + Ux^{(m)} + c) + (1 - \omega)x^{(m)} \\ x^{(m+1)} = \omega(\mathbf{L}x^{(m+\frac{1}{2})} + \mathbf{U}x^{(m+1)} + c) + (1 - \omega)x^{(m+\frac{1}{2})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(m+\frac{3}{2})} = \omega(\mathbf{L}x^{(m+\frac{3}{2})} + \mathbf{U}x^{(m+1)} + c) + (1 - \omega)x^{(m+1)} \\ x^{(m+2)} = \omega(\mathbf{L}x^{(m+\frac{3}{2})} + Ux^{(m+2)} + c) + (1 - \omega)x^{(m+\frac{3}{2})}. \end{cases}$$

Η μέθοδος **PSD**

Τέλος, αν ο R λάβει τη μορφή

$$R = (D - \omega C_L)D^{-1}(D - \omega C_U) \quad (59)$$

όπου ω πραγματική παράμετρος, τότε έχουμε

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} + \tau(I - \omega U)^{-1}(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Ax^{(m)}). \quad (60)$$

Η ανωτέρω μέθοδος είναι γνωστή ως η Preconditioned Simultaneous Displacement (PSD) μέθοδος. Η PSD είναι μια γενίκευση της SSOR αφού η τελευταία λαμβάνεται για $\tau = \omega(2 - \omega)$.

Από την (60) έχουμε

$$x^{(m+1)} - \omega Ux^{(m+1)} + \omega Ux^{(m)} = x^{(m)} + \tau(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Ax^{(m)}),$$

η οποία μπορεί να διασπασθεί στο ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα δύο επιπέδων

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = x^{(m)} + \tau(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Ax^{(m)})$$

και

$$x^{(m+1)} = x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega Ux^{(m+1)} - \omega Ux^{(m)}. \quad (61)$$

Είναι φανερό ότι η πρώτη των (61) είναι η ESOR μέθοδος, άρα έχουμε

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = (1 - \tau)x^{(m)} + \omega Lx^{(m+\frac{1}{2})} + (\tau - \omega)Lx^{(m)} + \tau(Ux^{(m)} + c)$$

και

$$x^{(m+1)} = x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega Ux^{(m+1)} - \omega Ux^{(m)}. \quad (62)$$

Από την (62) παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $Ux^{(k)}$ επαναλαμβάνεται και στη δεύτερη ημιεπανάληψη οπότε είναι δυνατόν να εφαρμοστεί και εδώ το σχήμα του Niehammer.

Η μέθοδος **PSD** (υπό μορφή συνιστωσών)

$$\begin{aligned}x_i^{(m+\frac{1}{2})} &= (1 - \tau)x_i^{(m)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}x_j^{(m+\frac{1}{2})} + (\tau - \omega) \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}x_j^{(m)} \\&\quad + \tau \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij}x_j^{(m)} + \hat{b}_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (63)$$

και

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m+\frac{1}{2})} + \omega \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij}x_j^{(m)} \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Η μέθοδος **PSD** (υπό μορφή πινάκων)

Τέλος, υπό μορφή πινάκων η PSD μέθοδος έχει τη μορφή

$$x^{(m+1)} = \mathcal{D}_{\tau,\omega} x^{(m)} + \delta_{\tau,\omega}, \quad (64)$$

όπου

$$\mathcal{D}_{\tau,\omega} = I - \tau \mathcal{B}_\omega, \quad \mathcal{B}_\omega = (I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} D^{-1} A \quad (65)$$

και

$$\delta_{\tau,\omega} = \tau (I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} D^{-1} b.$$

Σύγκλιση των βασικών επαναληπτικών μεθόδων

- Ένα βασικό ερώτημα που αφορά όλες τις επαναληπτικές μεθόδους είναι: Ποιές είναι οι συνθήκες εκείνες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση μίας επαναληπτικής μεθόδου;
- Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένα θεωρήματα σύγκλισης (βλ. (;), (;)) για τις επαναληπτικές μεθόδους της παραγράφου 3.2.
- Καταρχήν όμως ορίζουμε δύο μεγάλες κλάσεις πινάκων στις οποίες αν ανήκει κάποιος πίνακας, τότε ο πίνακας αυτός είναι μη ιδιάζων, πράγμα που εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης του συστήματός μας, αποφεύγοντας έτσι το κριτήριο της ορίζουσας.

Ορισμός

Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης n είναι *αδιάσπαστος* (irreducible) αν $n = 1$ ή αν $n > 1$ και για οποιαδήποτε δεδομένα μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα S και T του συνόλου W των πρώτων n θετικών ακεραίων αριθμών τέτοια ώστε $S \cup T = W$, υπάρχει $i \in S$ και $j \in T$ τέτοια ώστε $a_{ij} \neq 0$.

Θεώρημα 3.4.1

Ο πίνακας A είναι αδιάσπαστος αν και μόνον αν δεν υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να έχει τη μορφή

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} F & O \\ G & H \end{bmatrix} \quad (66)$$

όπου F και H είναι τετραγωνικοί πίνακες και O είναι ο μηδενικός πίνακας.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση όπου υπάρχει ο P , τότε ο A καλείται **διασπάσιμος** (reducible) και το αρχικό σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί στο $Ax = k$, όπου ο $A = P^{-1}AP$ είναι της μορφής (66). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned}Fx_1 &= k_1 \\ Gx_1 + Hx_2 &= k_2\end{aligned}$$

οπότε υποβιβάστηκε το αρχικό σύστημα σε δύο μικρότερης τάξης συστήματα. Μία χρήσιμη μέθοδος για να διαπιστωθεί αν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος στην πράξη δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2

Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης n είναι αδιάσπαστος αν και μόνον αν $n=1$ ή δοθέντων δύο οποιονδήποτε διακεκριμένων ακεραίων i και j με $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, τότε $a_{ij} \neq 0$ ή υπάρχουν φυσικοί $i_1, i_2, \dots, i_s$ τέτοιοι ώστε $a_{i_1 i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_s j} \neq 0$.

Απόδειξη

Αν δοθεί ο πίνακας A τάξης n , τότε θεωρούμε τα διακεκριμένα σημεία $P_1, P_2, \dots, P_n$ και κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph) του A , σχεδιάζοντας ένα τόξο από το P_i προς το P_j για κάθε $a_{ij} \neq 0$. Αν $a_{ii} \neq 0$, τότε απλά σχεδιάζουμε ένα κυκλικό τόξο, το οποίο περιέχει το P_i . Ο πίνακας είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν $n = 1$ ή υπάρχει μία αλυσίδα από τόξα από το P_i στο P_{i_1} , από το P_{i_1} στο P_{i_2} ... από το P_{i_2} στο P_j (συνεκτικό γράφημα). $\square$

Παράδειγμα

Έστω ο τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Το κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα δίνεται στο σχήμα 1. Από το σχήμα 1 εύκολα παρατηρούμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό συνεπώς οι τριδιαγώνιοι πίνακες είναι αδιάσπαστοι.

Σχήμα: Κατευθυνόμενο γράφημα ενός τριδιαγώνιου πίνακα

Η κλάση των διαγώνια υπέρτερων πινάκων

Ορισμός. Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης n καλείται **ασθενά διαγώνιος υπέρτερος** αν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (67)$$

και για τουλάχιστον ένα i

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|. \quad (68)$$

Στην περίπτωση όπου η (68) ισχύει για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$ τότε ο A καλείται **αυστηρά διαγώνιος υπέρτερος**. Επειδή είναι αρκετά δύσκολο να διαπιστωθεί αν $\det A \neq 0$ προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο A είναι μη ιδιάζων, γιαυτό συνήθως καταφεύγουμε στο κριτήριο που δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.3

Αν ο A είναι αδιάσπαστος πίνακας και ασθενά διαγώνιος υπέρτερος, τότε $\det A \neq 0$ και όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διάφορα του μηδενός.

Πόρισμα 3.4.1

Αν ο A είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος, τότε $\det A \neq 0$.

Στη συνέχεια δίνεται μία ικανή συνθήκη για να είναι θετικά ορισμένος ένας Ερμιτιανός πίνακας, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες (αδιάσπαστος και ασθενά διαγώνιος υπέρτερος).

Θεώρημα 3.4.4

Αν ο A είναι ένας Ερμιτιανός πίνακας με μη αρνητικά διαγώνια στοιχεία και επιπλέον είναι ασθενά διαγώνια υπέρτερος, τότε ο A είναι μη αρνητικά ορισμένος. Αν ο A είναι και αδιάσπαστος ή μη ιδιάζων, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του A τότε

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (69)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\lambda < 0$, τότε ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και λόγω του Πορίσματος 3.4.1, $\det(A - \lambda I) \neq 0$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (69). Συνεπώς όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές και ο A είναι μη αρνητικά ορισμένος. Αν ο A είναι και αδιάσπαστος, τότε λόγω του Θεωρήματος 3.4.3, το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του. Έρα όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και ο A είναι θετικά ορισμένος. $\square$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένα θεωρήματα, συχνά χωρίς απόδειξη, τα οποία εξασφαλίζουν τη σύγκλιση των βασικών επαναληπτικών μεθόδων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Θεώρημα 3.4.5

Αν η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει, τότε η JOR μέθοδος συγκλίνει για $0 < \tau \leq 1$.

Απόδειξη

Από την (27) οι ιδιοτιμές λ_i του πίνακα B_τ δίνονται από τη σχέση

$$\lambda_i = \tau \mu_i + 1 - \tau \quad (70)$$

όπου μ_i είναι οι ιδιοτιμές του B. Αν $\mu_i = re^{i\theta}$, $r < 1$ και $0 < \tau \leq 1$, τότε η (70) δίνει διαδοχικά

$$|\lambda_i|^2 = \tau^2 r^2 + 2\tau r(1 - \tau) \cos \theta + (1 - \tau)^2 \leq (\tau r + 1 - \tau)^2 < 1.$$

Από την οποία έχουμε ότι $\rho(B_\tau) < 1$. $\square$

Θεώρημα 3.4.6

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|. \quad (71)$$

Επίσης αν η SOR συγκλίνει, τότε

$$0 < \omega < 2. \quad (72)$$

Απόδειξη

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών λ_i του $\mathcal{L}_\omega$ θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{L}_\omega$, $\phi(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega)$. Λόγω της (48) έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \det(I - \omega L)^{-1} \det[(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U] \\ &= \det[(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U]. \end{aligned}$$

Ο σταθερός όρος σ του $\phi(\lambda)$, ο οποίος είναι ίσος με το γινόμενο των ιδιοτιμών του $\mathcal{L}_\omega$, λαμβάνεται αν τεθεί $\lambda = 0$ στην έκφραση της $\phi(\lambda)$. Συνεπώς

$$\sigma = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i) = \det[(\omega - 1)I - \omega U] = (\omega - 1)^n$$

και

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \geq (|\omega - 1|^n)^{1/n} = |\omega - 1|.$$

Τέλος, αν $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$, τότε και $|\omega - 1| < 1$, οπότε λαμβάνεται η (72). $\square$

Αν στη συνέχεια απαιτήσουμε ο πίνακας A να είναι μη ιδιάζων, θα πρέπει λόγω του Θεωρήματος 3.4.3 να υποθέσουμε ότι ο A είναι αδιάσπαστος και ασθενά διαγώνια υπέρτερος. Κάτω από αυτές τις συνθήκες έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.7

Έστω ότι ο A είναι ένας αδιάσπαστος και ασθενά διαγώνιος υπέρτερος πίνακας. Τότε

- (a) Η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει και η JOR συγκλίνει για $0 < \tau \leq 1$.
- (b) Η μέθοδος GS συγκλίνει και η EGS συγκλίνει για $0 < \tau \leq 1$.
- (c) Η μέθοδος SOR συγκλίνει για $0 < \omega \leq 1$ και η ESOR συγκλίνει για $0 \leq \omega \leq \tau \leq 1, \tau \neq 0$.

Απόδειξη

Αν $\rho(B) \geq 1$, τότε υπάρχει μία ιδιοτιμή μ του B τέτοια ώστε $|\mu| \geq 1$. Αλλά $\det(B - \mu I) = 0$ και $\det(I - \mu^{-1}B) = 0$. Είναι φανερό ότι αφού ο A είναι αδιάσπαστος θα είναι και ο $Q = I - \mu^{-1}B$, ο οποίος είναι και ασθενά διαγώνια υπέρτερος επειδή $|\mu^{-1}| \leq 1$. Αλλά από το Θεώρημα 3.4.3 συνεπάγεται ότι $\det Q \neq 0$ και έχουμε αντίφαση. Συνεπώς $\rho(B) < 1$ και η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει. Έτσι λόγω του Θεωρήματος 3.4.5 η (α) ισχύει. Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq 1$, τότε για κάποια ιδιοτιμή λ του $\mathcal{L}_{\tau,\omega}$ έχουμε $|\lambda| \geq 1$.

Επιπλέον, $\det(\mathcal{L}_{\tau,\omega} - \lambda I) = \det(H) = 0$, όπου

$$H = I - \left(\frac{\tau - \omega + \omega\lambda}{\lambda + \tau - 1} \right) L - \frac{\tau}{\lambda + \tau - 1} U.$$

Θέτοντας $\lambda^{-1} = qe^{i\theta}$ με q και θ πραγματικούς έχουμε

$$\left| \frac{\tau - \omega + \omega\lambda}{\lambda + \tau - 1} \right| = \left[\frac{(\tau - \omega)^2 q^2 + 2\omega q(\tau - \omega) \cos \theta + \omega^2}{1 - 2q(1 - \tau) \cos \theta + q^2(1 - \tau)^2} \right]^{1/2} \leq \frac{\omega + q(\tau - \omega)}{1 - q(1 - \tau)}$$

καθόσον $q \leq 1, 0 \leq \omega \leq \tau$ και $\tau \leq 1$. Αλλά

$$1 - \frac{\omega + q(\tau - \omega)}{1 - q(1 - \tau)} = \frac{(1 - q)(1 - \omega)}{1 - q(1 - \tau)} \geq 0$$

συνεπώς

$$\left| \frac{\tau}{\lambda + \tau - 1} \right| \leq \left| \frac{\tau + \omega(\lambda - 1)}{\lambda + \tau - 1} \right| \leq 1.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει ότι ο H είναι ασθενά διαγώνια υπέρτερος. Αλλά αφού ο A είναι αδιάσπαστος, άρα $\det H \neq 0$ και έχουμε αντίφαση. Συνεπώς, $\rho(\mathcal{L}_{\tau,\omega}) < 1$ οπότε ισχύει η (c) και για $\tau = \omega$ εύκολα λαμβάνεται η (b). $\square$

Πόρισμα 3.4.2

Αν ο A είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος, τότε ισχύουν τα (a), (b), και (c) του προηγούμενου θεωρήματος.

Απόδειξη

Προκύπτει εύκολα από το Πόρισμα 3.4.1. $\square$

Στην περίπτωση όπου ο A έχει διάφορες ιδιότητες π.χ. θετικά ορισμένος κ.ά. είναι δυνατόν να βρεθούν θεωρήματα σύγκλισης των βασικών επαναληπτικών μεθόδων. Ωστόσο θα περιοριστούμε σε δύο μόνο θεωρήματα, τα οποία είναι χαρακτηριστικά για τις SOR και SSOR μεθόδους.

Θεώρημα 3.4.8

Αν ο A είναι ένας συμμετρικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία, τότε η SOR μέθοδος συγκλίνει αν και μόνο αν ο A είναι θετικά ορισμένος και $0 < \omega < 2$.

Απόδειξη

(βλ.(;) σελ. 113-114). $\square$

Θεώρημα 3.4.9

Αν ο A είναι συμμετρικός με θετικά διαγώνια στοιχεία, τότε οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$ είναι πραγματικές και μη αρνητικές για κάθε πραγματικό ω . Επίσης, αν ο A είναι θετικά ορισμένος και αν $0 < \omega < 2$, τότε

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1.$$

Απόδειξη

(βλ.(;) σελ. 463). $\square$

Προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων ω, τ

Θεώρημα 3.4.10

Αν ο A είναι ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, τότε η JOR μέθοδος συγκλίνει αν και μόνον αν

$$0 < \tau < \frac{2}{M(\hat{A})}, \quad (73)$$

όπου

$$\hat{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2}.$$

Επιπλέον, η $\rho(B_\tau)$ ελαχιστοποιείται για

$$\tau_0 = \frac{2}{M(\hat{A}) + m(\hat{A})} \quad (74)$$

και η αντίστοιχη τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$\rho(B_{\tau_0}) = \frac{P(\hat{A}) - 1}{P(\hat{A}) + 1} \quad (75)$$

Απόδειξη

- Λόγω της υπόθεσης, ο A έχει πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές, επιπλέον τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά και συνεπώς υπάρχει ο $D^{1/2}$.
- Είναι φανερό τώρα ότι ο $D^{-1}A$ είναι όμοιος με τον $\hat{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}$ πράγμα που σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
- Επίσης ο $\hat{A}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (γιατί;). Έρα λόγω του Θεωρήματος ;; λαμβάνουμε την (73) σαν ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης, ενώ εφαρμόζοντας το θεώρημα ;; λαμβάνουμε τις (74) και (75).



- Από τον ορισμό της ταχύτητας σύγκλισης έχουμε ότι

$$R(B_{\tau_0}) = -\log \rho(B_{\tau_0}) = -\log \frac{P(\hat{A}) - 1}{P(\hat{A}) + 1} \simeq \frac{2}{P(\hat{A})} \quad (76)$$

για $P(\hat{A}) \gg 1$.

- Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο αριθμός των επαναλήψεων για τη σύγκλιση της JOR είναι ανάλογος του αριθμού συνθήκης του $\hat{A}$. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει το βαθμό εξάρτησης της αποτελεσματικότητας της JOR από τον αριθμό συνθήκης του πίνακα $\hat{A}$.
- Προκειμένου όμως να μελετήσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υπολοίπων επαναληπτικών μεθόδων θα πρέπει προηγουμένα να ορίσουμε την κλάση των διατεταγμένων πινάκων με συνέπεια.
- Για τους πίνακες αυτούς η ταχύτητα σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων E(GS) και E(SOR) παραμένει σταθερή.

Αν ένας πίνακας έχει την κατά ομάδες (block) τριδιαγώνια μορφή

$$\begin{bmatrix} D_1 & F_1 & & & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & E_{m-1} & D_{m-1} & F_{m-1} \\ 0 & & & E_m & D_m \end{bmatrix}$$

όπου D_i είναι τετραγωνικοί πίνακες, τότε ο πίνακας αυτός είναι *διατεταγμένος με συνέπεια* (consistently ordered).

Είναι δυνατόν όμως να ορίσουμε και μία γενικότερη κλάση πινάκων από την προηγούμενη. Οι πίνακες που ανήκουν στην κλάση αυτή θα λέμε ότι έχουν την Ιδιότητα A.

Θεώρημα 3.4.11

Ένας πίνακας A έχει την Ιδιότητα A αν και μόνον αν ο A είναι ένας διαγώνιος πίνακας ή υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP$ να έχει τη μορφή

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

όπου οι D_1 και D_2 είναι τετραγωνικοί διαγώνιοι πίνακες,

Θεώρημα 3.4.12

Αν ο πίνακας A είναι διατεταγμένος με συνέπεια, ο A έχει την Ιδιότητα A.

Θεώρημα 3.4.13

Ένας πίνακας A έχει την Ιδιότητα A αν και μόνον αν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε ο $A' = P^{-1}AP$ να είναι διατεταγμένος με συνέπεια.

Θεώρημα 3.4.14

Αν ο πίνακας A είναι διατεταγμένος με συνέπεια, τότε



$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \quad (78)$$

όπου λ είναι μία ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$ και μ μία ιδιοτιμή του B και

- Αν μ είναι μία ιδιοτιμή του B με πολλαπλότητα p , τότε η $-\mu$ είναι επίσης ιδιοτιμή του B με πολλαπλότητα p .

Πόρισμα 3.4.3

Αν ο πίνακας A είναι διατεταγμένος με συνέπεια, τότε

$$\lambda = \mu^2, \quad (79)$$

όπου λ είναι μία ιδιοτιμή του $\mathcal{L}$. Επιπλέον,

$$\rho(\mathcal{L}) = [\rho(B)]^2 \quad \text{και} \quad R(\mathcal{L}) = 2R(B). \quad (80)$$

Από το Πόρισμα 3.4.3 παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας A είναι διατεταγμένος με συνέπεια, τότε η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Seidel είναι διπλάσια από εκείνη της μεθόδου Jacobi. Στη συνέχεια δίνονται δύο θεωρήματα τα οποία αποτελούν τη βάση της θεωρίας της SOR μεθόδου.

Θεώρημα 3.4.15

Αν ο A είναι ένας διατεταγμένος με συνέπεια πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, τέτοιος ώστε ο B να έχει πραγματικές ιδιοτιμές, τότε

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \quad (81)$$

αν και μόνον αν $0 < \omega < 2$ και $\rho(B) < 1$.

Απόδειξη

(βλ. (;), (;)). $\square$

Ο προσδιορισμός της βέλτιστης τιμής της ω στην SOR μέθοδο δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.16

Έστω ότι ο A είναι ένας διατεταγμένος με συνέπεια πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε ο πίνακας B να έχει πραγματικές ιδιοτιμές και $\bar{\mu} = \rho(B) < 1$. Αν ω_b ορίζεται από τον τύπο

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}, \quad (82)$$

τότε

$$\min_{0 < \omega < 2} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \omega_b - 1. \quad (83)$$

Απόδειξη

(βλ. (;)). $\square$

Η μελέτη της $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ σαν συνάρτηση της ω φαίνεται στο σχήμα 3.2.

