

Κεφάλαιο 3

Επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.1 Στατικές και μη-στατικές επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, είναι μη ιδιάζων πίνακας, $\mathbf{u}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι :

- Μεγάλης τάξης ($\sim 10^3 - 10^6$)
- Αραιός
- Συγκεκριμένης δομής

Βασικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}^{(m)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(m)} \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^{(m)}$$

όπου ο $\mathbf{R}$ λέγεται πίνακας προρύθμισης (*preconditioning*)

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A})}_{\mathbf{G}_\tau} \mathbf{u}^{(m)} + \underbrace{\tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{k}_\tau}$$

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau(\mathbf{R})}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{u}^{(m+1)} + \mathbf{k}_\tau$$

Επιταχυντικές Επαναληπτικές μέθοδοι 1ου βαθμού

- Στατική επαναληπτική μέθοδος Richardson

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- Μη-Στατική επαναληπτική μέθοδος Richardson

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau_m \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ο επαναληπτικός πίνακας στην m επανάληψη είναι ο

$$\mathbf{G}(\tau_m) = \mathbf{I} - \tau_m \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}$$

Παρατηρήσεις

- Αν $\tau_m = \tau \Rightarrow$ στατική ε.μ.
- Αν $\mathbf{R} = \mathbf{I} \Rightarrow$ μη-προβλέψιμη(non-predictioned) ε.μ.
- Αν $\tau = 1, \quad \mathbf{R} = \mathbf{D} \Rightarrow$ ε.μ. Jacobi
- Αν $\tau = 1, \quad \mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L \Rightarrow$ ε.μ. Gauss-Seidel

Αλγόριθμος ε.μ. Richardson

Συμβ.:

$$\mathbf{r}^{(m)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)} \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$\mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^{(m)} \quad \text{υπόλοιπο με προρύθμιση (preconditioned residual)}$$

Για την υλοποίηση της μεθόδου Richardson εφαρμόζεται ο ακόλουθος αλγόριθμος:

Για $m = 0, 1, 2, \dots$

1. Επίλυση του γρ. συστήματος $\mathbf{R} \mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{r}^{(m)}$
2. Υπολογισμός της παραμέτρου επιτάχυνσης τ_m
3. Ενημέρωση της λύσης $\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau_m \mathbf{z}^{(m)}$
4. Ενημέρωση του υπολοίπου $\mathbf{r}^{(m+1)} = \mathbf{r}^{(m)} - \tau_m \mathbf{A} \mathbf{z}^{(m)}$

Μελέτη σύγκλισης της ε.μ. Richardson

Θεώρημα 1: Αν $\mathbf{R}$ είναι $n \times n$ μη ιδιάζων πίνακας τότε

$$\text{η στατική ε.μ. Richardson συγκλίνει} \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\tau|\lambda_i|^2} > 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

όπου $\lambda_i \in \mathbf{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$.

Θεώρημα 2: Αν $\mathbf{R}$ είναι $n \times n$ μη ιδιάζων πίνακας και ο $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$ έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ τότε

$$\text{η στατική ε.μ. Richardson συγκλίνει} \Leftrightarrow 0 < \tau < 2/\lambda_1.$$

Επίσης η φασματική ακτίνα $\mathbf{S}(\mathbf{G}_\tau)$ ελαχιστοποιείται για

$$\tau_o = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

και η αντίστοιχη τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{S}(\mathbf{G}_{\tau_o}) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

3.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{u} = \mathbf{k}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & & & \\ 0 & a & 0 & b & & \\ b & 0 & a & 0 & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & b & 0 & a & 0 & b \\ 0 & & & b & 0 & a & 0 \\ & & & & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

όπου $A \in (R)^{n \times n}$, $a \neq 0$, $\mathbf{u} = (u_i) \in R^n$ και $\mathbf{k} = (k_i) \in R^n$. Έστω $A = D - C_L - C_U$, όπου $D = \text{diag}(A)$, $-C_L, -C_U$ αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A αντίστοιχα.

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της ε. μ.:

$$\mathbf{u}^{m+1} = [I - \tau(D - C_L)^{-1}A]\mathbf{u}^{(m)} + \tau(D - C_L)^{-1}\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in R.$$

β) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{u}^{(2)}$ της παραπάνω επαναληπτικής μεθόδου για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου: $n = 5$, $a = 2$, $b = -1$, $\mathbf{k} = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = 1$.

Λύση

α) Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά και τα δύο μέλη του επαναληπτικού τύπου με τον πίνακα $D - C_L$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}(D - C_L)\mathbf{u}^{(m+1)} &= (D - C_L)\mathbf{u}^{(m)} - \tau A\mathbf{u}^{(m)} + \tau \mathbf{k} \Rightarrow \\ D\mathbf{u}^{(m+1)} &= C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + D\mathbf{u}^{(m)} - C_L\mathbf{u}^{(m)} - \tau(D - C_L - C_U)\mathbf{u}^{(m)} + \tau \mathbf{k} \Rightarrow \\ D\mathbf{u}^{(m+1)} &= C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1 - \tau)D\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)C_L\mathbf{u}^{(m)} + \tau C_U\mathbf{u}^{(m)} + \tau \mathbf{k} \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1)} &= D^{(-1)}C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1 - \tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)D^{(-1)}C_L\mathbf{u}^{(m)} \\ &\quad + \tau D^{(-1)}C_U\mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}\mathbf{k} \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1)} &= L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1 - \tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)L\mathbf{u}^{(m)} + \tau U\mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου είναι

$$u_i^{(m+1)} = (-b/a)u_{i-2}^{(m+1)} + (1 - \tau)u_i^{(m)} + (\tau - 1)(-b/a)u_{i-2}^{(m)} - \tau(-b/a)u_{i+2}^{(m)} + \tau k_i/a$$

$i = 1, 2, \dots, n$ και $m = 0, 1, 2, \dots$.

β) Για $n = 5$, $a = 2$, $b = -1$, $\mathbf{k} = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = 1$ οι εξισώσεις (1) γίνονται:

$$u_i^{(m+1)} = 1/2u_{i-2}^{(m+1)} + 1/2u_{i+2}^{(m)} + k_i/2 \quad i = 1, \dots, 5 \quad \text{και} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Για $m = 0$

$$\begin{aligned}u_1^{(1)} &= 1/2u_3^{(0)} + k_1/2 = 1/2 \\ u_2^{(1)} &= 1/2u_4^{(0)} + k_2/2 = 1 \\ u_3^{(1)} &= 1/2u_1^{(1)} + 1/2u_5^{(0)} + k_3/2 = 3/4 \\ u_4^{(1)} &= 1/2u_2^{(1)} + k_4/2 = 1 \\ u_5^{(1)} &= 1/2u_3^{(1)} + k_5/2 = 7/8\end{aligned}$$

Για $m = 1$

$$\begin{aligned}u_1^{(2)} &= 1/2u_3^{(1)} + k_1/2 = 7/8 \\ u_2^{(2)} &= 1/2u_4^{(1)} + k_2/2 = 1 \\ u_3^{(2)} &= 1/2u_1^{(2)} + 1/2u_5^{(1)} + k_3/2 = 7/8 \\ u_4^{(2)} &= 1/2u_2^{(2)} + k_4/2 = 1 \\ u_5^{(2)} &= 1/2u_3^{(2)} + k_5/2 = 15/16\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{u} = \mathbf{k}$ όπου $A \in R^{n \times n}$, $a \neq 0$, $\mathbf{u} = (u_i) \in R^n$ και $\mathbf{k} = (k_i) \in R^n$. Έστω $A = D - C_L - C_U$, όπου $D = \text{diag}(A)$ και $-C_L, -C_U$ τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A αντίστοιχα.

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου:

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau[(D - \omega_1 C_L)D^{-1}(D - \omega_2 C_U)]^{-1}(\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

όπου $\omega_1, \omega_2, \tau \in R$, $\tau \neq 0$.

β) Το ίδιο όπως το (α) αν ο πίνακας A είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} d & e & f & & & \\ b & d & e & f & & 0 \\ a & b & d & e & f & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a & b & d & e & f \\ 0 & & & a & b & d & e \\ & & & & a & b & d \end{bmatrix}$$

Υ) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{u}^{(1)}$ της παραπάνω επαναληπτικής μεθόδου για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου: $n = 3$, $a = b = e = f = -1/4$, $d = 1$, $\mathbf{k} = (1/2, 1/2, 1/2)$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = \omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$.

Λύση

Οι πίνακες L και U στη βασική διάσπαση $A = D(I - L - U)$ είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & & & & \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,n-2}} & -\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,n-2}} & \dots & -\frac{a_{n-2,n-3}}{a_{n-2,n-2}} & 0 & & \\ -\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}} & -\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}} & \dots & -\frac{a_{n-1,n-3}}{a_{n-1,n-1}} & -\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & 0 & \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \dots & -\frac{a_{n,n-3}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & -\frac{a_{14}}{a_{11}} & -\frac{a_{15}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & -\frac{a_{24}}{a_{22}} & -\frac{a_{25}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & 0 & -\frac{a_{34}}{a_{33}} & -\frac{a_{35}}{a_{33}} & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -\frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-2,n-2}} & -\frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-2}} \\ & & & & & 0 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (D - \omega_1 C_L) D^{-1} (D - \omega_2 C_U) &= \\ D(I - \omega_1 D^{-1} C_L) D^{-1} D(I - \omega_2 D^{-1} C_U) &= \\ D(I - \omega_1 L)(I - \omega_2 U) \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει

$$[D(I - \omega_1 L)(I - \omega_2 U)]^{-1} = (I - \omega_2 U)^{-1} (I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1}.$$

Άρα η επαναληπτική μέθοδος γίνεται

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(m+1)} &= \mathbf{u}^{(m)} + \tau (I - \omega_2 U)^{-1} (I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1} (\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1)} - \omega_2 U \mathbf{u}^{(m+1)} + \omega_2 U \mathbf{u}^{(m)} &= \mathbf{u}^{(m)} + \tau (I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1} (\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \end{aligned}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(m+1/2)} &= \mathbf{u}^{(m)} + \tau (I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1} (\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \Rightarrow \\ (I - \omega_1 L) \mathbf{u}^{(m+1/2)} &= (I - \omega_1 L) \mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1} (\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1/2)} &= \omega_1 L \mathbf{u}^{(m+1/2)} + (1 - \tau) \mathbf{u}^{(m)} + (\tau - \omega_1) L \mathbf{u}^{(m)} + \tau U \mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Άρα οδηγούμαστε στο ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα δύο επιπέδων

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(m+1/2)} = \omega_1 L \mathbf{u}^{(m+1/2)} + (1 - \tau) \mathbf{u}^{(m)} + (\tau - \omega_1) L \mathbf{u}^{(m)} + \tau U \mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1} \mathbf{k} \\ \mathbf{u}^{(m+1)} = \omega_2 U \mathbf{u}^{(m+1)} - \omega_2 U \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m+1/2)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Σε μορφή συντεταγμένων οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$u_i^{(m+1/2)} = \omega_1 \left(- \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m+1/2)} \right) + (1 - \tau) u_i^{(m)} + (\tau - \omega_1) \left(- \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right) \\ + \tau \left(- \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right) + \tau \frac{k_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n$$

και

$$u_i^{(m+1)} = \omega_2 \left(- \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m+1)} \right) - \omega_2 \left(- \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right) + u_i^{(m+1/2)}, \quad i = n(-1)1, \\ m = 0, 1, 2, \dots$$

β) Για την ειδική δομή του πίνακα A οι πίνακες L και U είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -b/d & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ -a/d & -b/d & 0 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a/d & -b/d & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & -a/d & -b/d & 0 & 0 \\ & & & & -a/d & -b/d & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -e/d & -f/d & & & & \\ 0 & 0 & -e/d & -f/d & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e/d & -f/d & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 & -e/d & -f/d \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 & -e/d \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου είναι

Για $\mathbf{m} = 0, 1, 2, \dots$

για $\mathbf{i} = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$

$$u_i^{(m+1/2)} = \omega_1 \left(- \frac{a}{d} u_{i-2}^{(m+1/2)} - \frac{b}{d} u_{i-1}^{(m+1/2)} \right) + (1 - \tau) u_i^{(m)} + (\tau - \omega_1) \left(- \frac{a}{d} u_{i-2}^{(m)} - \frac{b}{d} u_{i-1}^{(m)} \right) \\ + \tau \left(- \frac{e}{d} u_{i+1}^{(m)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m)} \right) + \tau \frac{k_i}{d}$$

για $\mathbf{i} = \mathbf{n}, \mathbf{n} - 1, \dots, 1$

$$u_i^{(m+1)} = \omega_2 \left(- \frac{e}{d} u_{i+1}^{(m+1)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m+1)} \right) - \omega_2 \left(- \frac{e}{d} u_{i+1}^{(m)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m)} \right) + u_i^{(m+1/2)}$$

Εφαρμογή: Για $m = 0$

Επίπεδο 1/2 (προς τα εμπρός)

$i = 1$

$$u_1^{(1/2)} = (1 - \tau)u_1^{(0)} + \tau(-\frac{e}{d}u_2^{(0)} - \frac{f}{d}u_3^{(0)}) + \tau\frac{k_1}{d},$$

$i = 2$

$$u_2^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{b}{d}u_1^{(1/2)}) + (1 - \tau)u_2^{(0)} + (\tau - \omega_1)(-\frac{b}{d})u_1^{(0)} \\ + \tau(-\frac{e}{d}u_3^{(0)} - \frac{f}{d}u_4^{(0)}) + \tau\frac{k_2}{d},$$

$i = 3, 4, \dots, n - 2$

$$u_i^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{i-2}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{i-1}^{(1/2)}) + (1 - \tau)u_i^{(0)} + (\tau - \omega_1)(-\frac{a}{d}u_{i-2}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{i-1}^{(0)}) \\ + \tau(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(0)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(0)}) + \tau\frac{k_i}{d}$$

$i = n - 1$

$$u_{n-1}^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{n-3}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{n-2}^{(1/2)}) + (1 - \tau)u_{n-1}^{(0)} + (\tau - \omega_1)(-\frac{a}{d}u_{n-3}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{n-2}^{(0)}) + \tau\frac{k_{n-1}}{d}$$

$i = n$

$$u_n^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{n-2}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{n-1}^{(1/2)}) + (1 - \tau)u_n^{(0)} + (\tau - \omega_1)(-\frac{a}{d}u_{n-2}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{n-1}^{(0)}) + \tau\frac{k_n}{d}$$

Επίπεδο 1 (προς τα πίσω)

$i = n$

$$u_n^{(1)} = u_n^{(1/2)}$$

$i = n - 1$

$$u_{n-1}^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_n^{(1)} + \frac{e}{d}u_n^{(0)}) + u_{n-1}^{(1/2)}$$

$i = n - 2, n - 3, \dots, 4, 3$

$$u_i^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(1)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(0)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(0)}) + u_i^{(1/2)}$$

$i = 2$

$$u_1^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_3^{(1)} - \frac{f}{d}u_4^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_3^{(0)} - \frac{f}{d}u_4^{(0)}) + u_2^{(1/2)}$$

$i = 1$

$$u_1^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_2^{(1)} - \frac{f}{d}u_3^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_2^{(0)} - \frac{f}{d}u_3^{(0)}) + u_1^{(1/2)}$$

Υ) Υπολογισμός του διανύσματος προσεγγιστικής λύσης $\mathbf{u}^{(1)}$ με αντικατάσταση στους ανωτέρω τύπους του β).