

Αδιάσπαστοι πίνακες

Ορισμός 1: Για $n \geq 2$, ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται διασπασίμος (reducible) αν υπάρχει ένας $n \times n$ μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

όπου A_{11} είναι ένας $r \times r$ υποπίνακας και A_{22} είναι ένας $(n-r) \times (n-r)$ υποπίνακας με $1 \leq r < n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος μεταθετικός πίνακας τότε ο A λέγεται αδιάσπαστος (irreducible).

Ένας 1×1 μιγαδικός πίνακας A καλείται αδιάσπαστος αν το μοναδικό στοιχείο που έχει είναι διάφορο του μηδενός. Σε αντίθετη περίπτωση ο πίνακας αυτός καλείται διασπασίμος.

Ορισμός 2: Ένας πίνακας A τάξης n είναι αδιάσπαστος αν $n=1$ ή αν $n > 1$ και για οποιαδήποτε δεδομένα μη κενά και ζένα μεταξύ τους υποσύνολα S και T του συνόλου W των πρώτων ή δευτικών ακεραίων αριθμών τέτοια ώστε $S \cup T = W$, υπάρχει $i \in S$ και $j \in T$ τέτοια ώστε $a_{ij} \neq 0$.

Η έννοια της διασπασιμότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς το αρχικό σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί στο $Au=k$, όπου

$A = PAP^T$ είναι της μορφής (1). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A_{11} u_1 + A_{12} u_2 = k_1 \quad (2)$$

$$A_{22} u_2 = k_2$$

οπότε το αρχικό σύστημα υποβιβάζεται σε δύο μικρότερα τμήματα συστήματα, τα οποία διαχωρούν μεταξύ τους τη σχέση των εξισώσεων με τους αγνώστους και μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα.

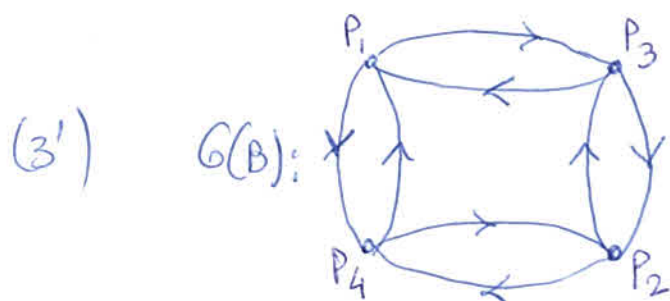
Ένας εναλλακτικός και εύκολος τρόπος για να ελέγχουμε αν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος δίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας των γραφημάτων.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, θεωρούμε τα διακεκριμένα σημεία $P_1, P_2, \dots, P_n$ του επιπέδου που λέγονται κόμβοι, και κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα του A , σχεδιάζοντας ένα τόξο από το P_i προς το P_j , για κάθε $a_{ij} \neq 0$. Αν $a_{ii} \neq 0$, τότε απλά σχεδιάζουμε ένα κυκλικό τόξο που περιέχει το P_i . Αυτός ο τρόπος συνδέει τους κόμβους δεικνύει την ύπαρξη ενός μονοπατιού $P_i \rightarrow P_j$ από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j . Εφαρμόζοντας με αυτόν τον τρόπο, κάθε πίνακας A τμήματος μπορεί να συσχετισθεί με ένα πεπερασμένο γράφημα $G(A)$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα

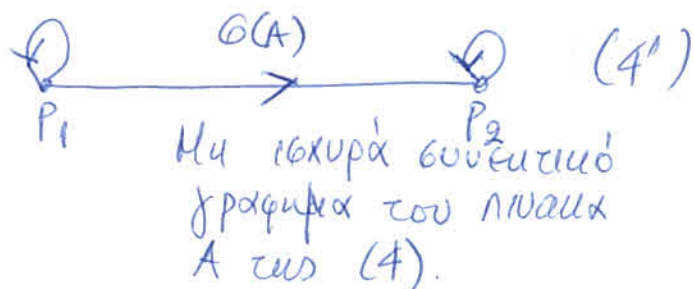


Ισχυρά συνεκτικό γράφημα του πίνακα B της (3).

Ενώ ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα



Το μήκος ενός μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος των ακμών του.

Για παράδειγμα το γράφημα (3') είναι ισχυρά συνεκτικό, γιατί

για κάθε ζεύγος κόμβων υπάρχει ένα μονοπάτι, ενώ το γράφημα

(4') δεν είναι ισχυρά συνεκτικό γιατί δεν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο P_2 προς τον κόμβο P_1 .

Ορισμός 3: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κόμβων (P_i, P_j) , υπάρχει ένα μονοπάτι από τον P_i στον P_j και από τον P_j στον P_i . Δηλ. οι κόμβοι P_i και P_j βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο.

Θεώρημα: Ένας μηαδικός πίνακας A τάξης n είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.

Να σημειωθεί ότι όταν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος, όλα τα εκτός της διαγωνίου του στοιχεία σε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα δεν είναι μηδενικά.

Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες

Ορισμός 4: Ένας $n \times n$ μηαδικός πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται

διαγώνια υπέρτερος αν $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n.$

Επιπλέον, ο A καλείται αυστηρά διαγώνια υπέρτερος αν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

Ο πίνακας A καλείται αδenia διαγώνια υπέρτερος, αν ο A είναι διαγώνια υπέρτερος με την (5) να ισχύει για ένα τουλάχιστον i .

Όμοια, ο πίνακας A καλείται αδιάσπαστος διαγώνια υπέρτερος αν ο A είναι αδιάσπαστος και διαγώνια υπέρτερος με την (5) να ισχύει για κάθε i .

Επειδή είναι αρκετά δύσκολο να διαπιστωθεί αν $\det A \neq 0$ προτιμώ-
ναι να αποδείξουμε ότι ο A είναι μη ιδιάζων, γι' αυτό συνηθώς
αναφερόμαστε στο ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα: Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας αυστηρά ή αδιάσπαστα
διαγώνια υπέρτερος μιγαδικός πίνακας. Τότε ο πίνακας A είναι
μη ιδιάζων. Αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι επίσης
και θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι ιδιοτιμές λ_i του A
ικανοποιούν την $\operatorname{Re} \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq n$.

Πρόταση: Αν ο $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ένας Ερμιτιανός αυστηρά
διαγώνια υπέρτερος ή αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος πίνακας
με θετικά και πραγματικά διαγώνια στοιχεία, τότε ο A είναι
θετικά ορισμένος.

p-κυκλικοί πίνακες (ή πίνακες με την ιδιότητα A)

Ορισμός 5: Έστω $A \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και k το
πλήθος των ιδιοτιμών του A με μέτρο $\rho(A)$. Αν $k=1$, τότε ο A
λέγεται πρωτεύων. Αν $k > 1$, τότε ο A λέγεται κυκλικός με
δείκτη k .

Ορισμός 6: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι αδενά κυκλικός με
δείκτη $k (> 1)$ αν υπάρχει ένας μεταθετικός $n \times n$ πίνακας P
έτσι ώστε ο PAP^T να είναι της μορφής

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1k} \\ A_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου οι μηδενικοί
διαγώνιοι υποπίνακες
είναι τετραγωνικοί

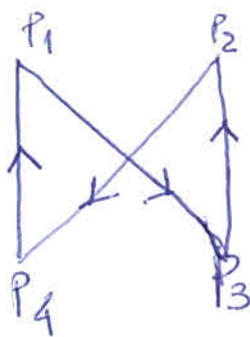
Θεώρημα: Έστω $A = (a_{ij}) \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και $G(A)$ το κατευθυνόμενο γράφημά του. Για κάθε κόμβο P_i του $G(A)$ θεωρούμε όλα τα κλειστά μονοπάτια (κύκλοι) που συνδέουν το P_i με τον εαυτό του. Αν S_i είναι το σύνολο όλων των μικρών P_i αυτών των κλειστών μονοπατιών και k_i είναι ο ΜΚΔ των μεγθών, δηλ.

$$L_i = MK\Delta \{m_i\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

τότε ο Νυσιας A είναι ηρωτέων αν $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ όπου $k \geq 1$
και είναι κρυπτός με δείκτη k όταν $k > 1$.

Παράδειγμα: Έχω ο μη αρνητικό νούμερο

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ με κατευθυνόμενο
γραφικό. $G(B_1):$

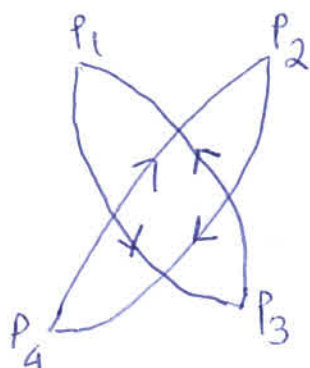


Ο Β₁ είναι υπολιπιδικός πίνακας με δείκτη 4
γιατί από το γραφικό του έχουμε ότι

$$k_1 = NK\Delta \{4, 8, 12, \dots\} = 4$$

En el nivel

$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει κανονικοποιηνο
γραφφα $G(B_2)$:



Σημ. το γράφημα $G(B_2)$ είναι μη συνεκτικό καθώς δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει τους κόμβους P_1, P_3 με τους κόμβους P_2, P_4 και αντίστροφα, με αποτέλεσμα ο πίνακας B_2 να είναι μη κυκλικός

Ορισμός 7: Αν G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό και πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα, τότε το G είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη $k \geq 1$ ή ένα πρωτεύων γράφημα, αν ο ΜΚΔ όλων των μηκών των κύκλων του είναι ακέραιος $k \geq 1$ ή $k=1$.

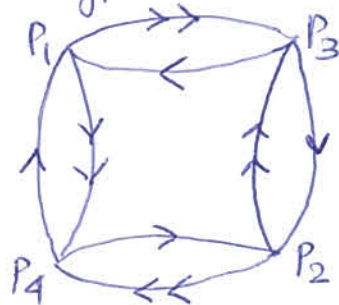
Συνεπώς διατεταγμένοι κυκλικοί πίνακες με δείκτη 2:

Γραφοθεωρητική ερμηνεία: Αν δοθεί ο πίνακας $B = (b_{ij})$, τότε παρισυνάγεται το κατευθυνόμενο γράφημα $\hat{G}(B)$ τύπου 2 του B με τέτοιο τρόπο ώστε αν $b_{ij} \neq 0$, τότε το μονοπάτι από τον κόμβο P_i προς τον κόμβο P_j να συμβολίζεται με ένα διηλίκως κατεύθυνσης τόξο μόνο αν $(j > i)$ και λέγεται "μείζον" μονοπάτι, διαφορετικά να συμβολίζεται με ένα μονής κατεύθυνσης τόξο και λέγεται "ελάττωον" μονοπάτι. Ο πίνακας B θα λέγεται συνεπώς διατεταγμένος αν και μόνο αν κάθε κύκλος του κατευθυνόμενου γραφήματος του έχει ίσο πλήθος από "μείζονα" και

Πχ. 1 όπου ο B είναι συνεπώς διατεταγμένος

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(B):$

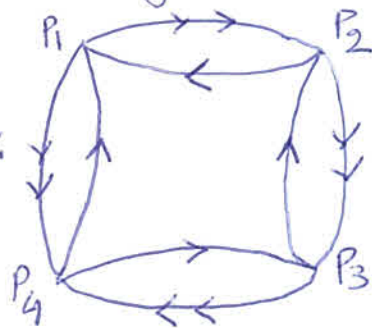


Ο πίνακας B είναι συνεπώς διατεταγμένος γιατί το κατευθυνόμενο γράφημα του τύπου 2 έχει κύκλους με ίσο ημίτος από μείζονα και ελάσσονα μονοπάτια.

Πχ. 2 όπου ο B_Φ είναι μη συνεπώς διατεταγμένος

$$B_\Phi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(B_\Phi):$



Στο γράφημα του B_Φ υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι του κύκλου του με ίσο αριθμό μείζονων και ελάσσονων μονοπατιών. Άρα, ο πίνακας B_Φ είναι μη συνεπώς διατεταγμένος.