

## Ορθογώνιες Παραγοντοποιήσεις Πινάκων.

Η χρήση ορθογώνιων μετασχηματισμών μπορεί να οδηγεί στην εμφάνιση ορθογώνιων παραγόντων κατά την ανάλυση ενός πίνακα σε γινόμενο παραγόντων. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, λόγω των χρήσιμων ιδιοτήτων που τους χαρακτηρίζουν αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας. Η πιο σημαντική ιδιότητα που μπορούν να εξασφαλίσουν οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι η ευστάθεια.

Για παράδειγμα: Έδω  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $x' = x + e$  μια πρόεχση του  $x$ . Αν  $Q$  ορθογώνιος πίνακας, τότε  $Qx' = Qx + Qe$ . Το βήγμα στο  $Qx'$  είναι  $Qe$ . Ως προς τη 2-νόρμα ισχύει  $\|Qe\|_2 = \|e\|_2$ , δηλαδή  $Qe$  και  $e$  έχουν το ίδιο μέγεθος. Αυτό ισχύει γιατί αν  $\hat{x} = e$ , τότε

$$\bullet Q \text{ ορθογώνιος} \Rightarrow Q^T Q = I$$

$$\|Q\hat{x}\|_2^2 = (Q\hat{x})^T (Q\hat{x}) = \hat{x}^T (Q^T Q) \hat{x} = \hat{x}^T I \hat{x} = \hat{x}^T \hat{x} = \|\hat{x}\|_2^2$$

Παρόμοια, αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $A' = A + E$  τότε  $QA' = QA + QE$  και

$$\|QE\|_2 = \|E\|_2. \text{ Επομένως, όταν ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός}$$

εφαρμόζεται σ' ένα διάνυσμα ή σ' έναν πίνακα, το βήγμα ως προς τη 2-νόρμα δεν αυξάνεται. Επίσης, οι υπολογισμοί με ορθογώνιους πίνακες ποτέ δεν οδηγούν σε υπερχείλιση.

## Βασικές Έννοιες Ορθογωνιότητας

1. Ορθογώνια διανύσματα  $x$  και  $y$ :

$$\text{Αν } x, y \in \mathbb{R}^n, (x, y) = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0.$$

2. Ορθογώνια βάση διανυσμάτων  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  για έναν υποχώρο:

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων της βάσης ισχύει  $v_i^T v_j = 0$ .

Ορθοκανονική βάση:

Ορθογώνια βάση από μοναδιαία διανύσματα (unit vectors):  $v_i^T v_i = 1$ .

Από ορθογώνια διανύσματα πηγαίνουμε σε ορθοκανονικά διαιρώντας κάθε διάνυσμα  $v_i$  με το μήκος του  $\|v_i\|_2$ .

3. Πίνακες  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m > n$  με ορθοκανονικές στήλες

(ONC  $\rightarrow$  Orthogonal Columns matrix)

$$Q^T Q = I$$

$$\text{Αν } Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \ \dots \ q_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Λήμμα: Έστω  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  με ορθοκανονικές στήλες και  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(i) \|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \quad (ii) (Qx, Qy) = (x, y) \quad (iii) \|Q\|_2^2 = 1$$

Απόδειξη:

$$(i) \text{ Βλ. βελ. 1.} \quad (ii) (Qx, Qy) = (Qx)^T (Qy) = x^T Q^T Q y = x^T y = (x, y)$$

$$(iii) \|Q\|_2^2 = 1$$

Παρατήρηση: Έστω  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m > n$  (tall thin matrices).

Οι  $m$  γραμμές δεν μπορούν να είναι ορθογώνιες στον  $\mathbb{R}^n \Rightarrow QQ^T \neq I$   
(Διαφορετικά θα αποτελούσαν βάση για τον  $\mathbb{R}^n$ , αδύνατο αφού  $m > n$ ).

#### 4. Ορθογώνιοι πίνακες.

Είναι τετραγωνικοί με ορθοκανονικές στήλες.

Για τους τετραγωνικούς πίνακες ισχύει

$$Q^T Q = I \Rightarrow Q^T = Q^{-1} \Rightarrow Q Q^T = I$$

Αν  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ορθογώνιος

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  ορθοκανονική βάση για τον  $\mathbb{R}^n$

$$Q = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix}, \quad \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \text{ διαφορετική ορθοκανονική βάση για τον } \mathbb{R}^n$$

Παρατήρηση: Αν  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ορθογώνιος  $\Rightarrow$  ορθοκανονικός

Ορθογώνια βάση για τον  $\mathbb{R}^n$ :

Έστω  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ . Κάθε διάνυσμα  $v \in \mathbb{R}^n$  θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των  $q_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

$$v = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_n q_n \quad (*)$$

Προβλεπόμενος των συντελεστών  $c_i$ :

Πολλαπλασιάζουμε την (\*) με  $q_k^T \Rightarrow$

-4-

$$q_k^T v = c_1 q_k^T q_1 + c_2 q_k^T q_2 + \dots + c_n q_k^T q_n \Rightarrow$$

$$q_k^T v = c_k q_k^T q_k \Rightarrow c_k = q_k^T v$$

Τελικά, αν εκφράσουμε την (\*) υπό μορφή πίνακων

$$v = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] c \Rightarrow$$

$$Q^T v = Q^T Q c \Rightarrow Q^T v = c \Rightarrow c_k = q_k^T v.$$

Κάθε  $c_k$  προσδιορίζεται άμεσα.

---