Householder Μετασχηματισμοί

Έστω $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Ένας ~~πίνακας~~ $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$

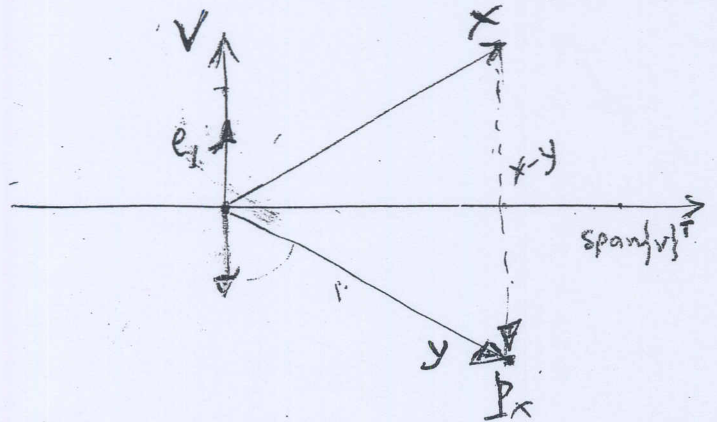
της μορφής:

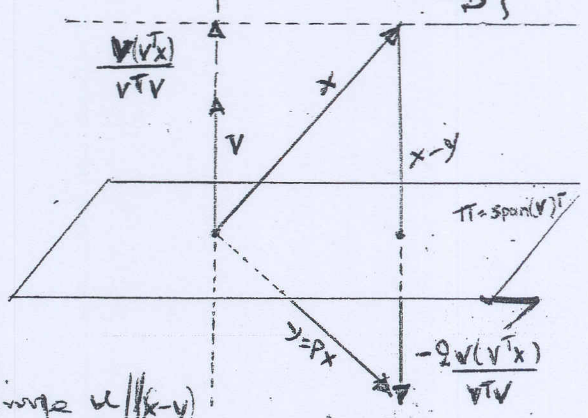
$$P = I - \frac{2vv^T}{\boxed{v^T v}} \qquad (1)$$

← κανονικοποίηση

λέγεται μετασχηματισμός Householder

Όταν ένα διάνυσμα x πολλαπλασιάζεται με τον P.. προβάλλεται στο υπ~~ερεπίπεδ~~ο χώρο $\text{span}\{v\}^\perp$ που παράγεται από το $v^\perp$ (orthogonal complement του συνόλου $S \subset \mathbb{R}^n$: $S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n / y^T x = 0$ για κάθε $x \in S\}$





Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_2 = \|y\|_2$, αν επιλέξουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u \| (x-y)$ τότε ο $P = I - 2vv^T$ προβάλλει το x στο y.

$y = Px = I - 2vv^T$

Οι Householder πίνακες είναι συμμετρικοί και ορθογώνιοι και έχουν πρακτικό ενδιαφέρον γιατί έχουν την δυνατότητα να βάζουν μηδενικά σε ένα πίνακα ή διάνυσμα:

$$\boxed{vv^Tx = v^Txv}$$

Γενικά, έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq 0$ τότε είναι εύκολο να κατασκευάσουμε το διάνυσμα v στην (1) τέτοιο ώστε $Px = ke_1$

Έχουμε:

$$Px = \left[I - \frac{2vv^T}{v^Tv}\right]x = x - \frac{2v^Tx}{v^Tv}v$$

($vv^Tx = v^Txv$)
ιδιότητα γινομένων

Άρα $Px \in span\{e_1\}$ απαιτεί $v \in span\{x, e_1\}$.

Θέτουμε $v = x + \alpha e_1$

Τότε $v^Tx = (x^T + \alpha e_1^T)x = x^Tx + \alpha x_1$

και

$$v^Tv = x^Tx + 2\alpha x_1 + \alpha^2$$

και επομένως

$$Px = \underbrace{\left[1 - 2\,\frac{x^Tx + \alpha x_1}{x^Tx + 2\alpha x_1 + \alpha^2}\right]}x - 2\alpha\frac{v^Tx}{v^Tv}e_1$$

Στη συνέχεια για να είναι ο συντελεστής του x μηδέν

αρκεί να θέσουμε $\alpha = \pm\|x\|_2$

Έτσι λοιπόν, αν $v = x \pm \|x\|_2 e_1$ τότε

$$Px = \pm\|x\|_2 e_1$$

Επιλογή προσήμου

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Αν x είναι (πολύ κοντά σε) παράλληλο του e_1 τότε το $v = x - sign(x_1)\|x\|_2 e_1$ έχει μικρή νόρμα.

Συνεπώς μπορεί να έχει μεγάλο σχετικό σφάλμα στον παράγοντα $\beta = \frac{2}{v^Tv}$

Η δυσκολία αυτή μπορεί να αποφευχθεί επιλέγοντας $sign(\alpha) = sign(x_1)$

οπότε $v = x + sign(x_1)\|x\|_2 e_1$

Αυτό εξασφαλ

Παράδειγμα (Μετασχηματισμός Householder)

Έστω $x = [\overset{x_1}{\overset{\downarrow}{3}}, 1, 5, 1]^T$. Τότε $\|x\|_2 = \sqrt{9+1+25+1} = \sqrt{36} = 6$

Αν $$v = x \overset{\text{sign}(x_1)}{\textcircled{\pm}} \|x\|_2\, e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \pm 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε $$P \cdot x = \pm \|x\|_2\, e_1 = \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Είναι: $$P = I - 2\,\frac{v v^T}{v^T v}$$

$$v \cdot v^T = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} [9 \; 1 \; 5 \; 1] = \begin{bmatrix} 81 & 9 & 45 & 9 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \\ 45 & 5 & 25 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v^T \cdot v = [9 \; 1 \; 5 \; 1] \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 81 + 1 + 25 + 1 = 108$$

Άρα $$P = I - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\underset{54}{\cancel{108}}} \cdot \begin{bmatrix} 81 & 9 & 45 & 9 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \\ 45 & 5 & 25 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} - \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 81 & 9 & 45 & 9 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \\ 45 & 5 & 25 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{54} \begin{bmatrix} -27 & -9 & -45 & -9 \\ -9 & 53 & -5 & -1 \\ -45 & -5 & 29 & -5 \\ -9 & -1 & -5 & 53 \end{bmatrix}$$

Οπότε έχουμε: $$P \cdot x = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -6 \cdot e_1$$

Αλγόριθμος 1 (Δημιουργία μηδενικών σε ένα διάνυσμα με ένα μετασχηματισμό Householder)

$$Px = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\right)x = (\sigma, 0, 0, \dots 0)^T$$

το u ισοχωρήσιμο στο x

$$v = x + \mathrm{sign}(x_1)\|x\|_2 e_1 \Rightarrow Px = (-\mathrm{sign}(x_1)\|x\|_2, 0, \dots, 0)^T$$

B1 : $m = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$

B2 : Για $i = 1(1)n$ $x_i = u_i = \dfrac{x_i}{m}$ (scaling)

B3 $\sigma = \mathrm{sign}(u_1)\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

B4 $x_1 = u_1 = u_1 + \sigma$

B5 $\sigma = -m \cdot \sigma$

Παράδειγμα : $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ Ζητείται P : $Px = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P = I - 2\dfrac{vv^T}{v^Tv}$

B1 $m = 4$

B2 $\underline{i=1}$ $x_1 = 0$ $u_1 = 0$ (αν ήταν 0 επιλέγουμε + ή −)

$\underline{i=2}$ $x_2 = 1$ $u_2 = 1$

$\underline{i=3}$ $x_3 = 0{,}25$ $u_3 = 0.25$

B3 $\sigma = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0.25^2} \simeq 1.0308$

B4 $x_1 = u_1 = u_1 + \sigma = 1.0308$

B5 $\sigma = -4 \cdot 1{,}0308 = -4{,}1232$

Επαληθεύεται ότι $Px = (-4{,}1232, 0, 0)^T$

Πραγματοποιούμε $2(n+1)$ flops για την εισαγωγή μηδενικών στις + 1 τετραγωνική ρίζα όταν λύση ενός διανύσματος

Αποδεικνύεται : $\|P - \hat{P}\| \leq 10u$

Αν χρησιμοποιηθεί διπλή ακρίβεια για το εσωτερικό γινόμενο τότε $fl(\hat{P}x) = P(x + \varepsilon)$ όπου $|\varepsilon| \leq c u\|x\|_2$

$\overset{\text{σταθερά}}{c = O(1)} \uparrow$

Αλγόριθμος 2 (Γινόμενο πίνακα με διάνυσμα με ένα πίνακα Householder Px

```
B1   $b = \frac{2}{v^T v}$

B2   $s = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$

B3   $b = b \cdot s$

B4   Για $i = 1(1)n$
         $x_i = x_i - b v_i$
```

Πολυπλοκότητα $O(n)$

(είναι $O(n^2)$ για το συνήθη
γινόμενο πίνακα με διάνυσμα)

Παραγοντοποίηση QR

Θεώρημα : ~~Αν~~ A n×n πίνακας, τότε υπάρχουν ένας ορθογώνιος πίνακας Q και ένας άνω τριγωνικός πίνακας R τέτοιοι ώστε $A = QR$.

ο πίνακας $Q = P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$ όπου P_i πίνακες Householder.

Β1 Κατασκευάζουμε ένα πίνακα Householder P_1 έτσι ώστε να εισάγει μηδενικά στη πρώτη στήλη κάτω από το $(1,1)$ δηλ.

$$P_1 A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

Αρκεί να κατασκευάσουμε $P_1 = I - 2\frac{v_n v_n^T}{v_n^T v_n}$: $H_1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Β2 Κατασκευάζουμε ένα πίνακα Householder P_2 έτσι ώστε

$$A^{(2)} = P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

ο $\underset{P}{P_2}$ μπορεί να κατασκευασθεί ως εξής

Πρώτα κατασκευάζουμε ένα πίνακα Householder

$\hat{P}_2 = I_{n-1} - 2\frac{v_{n-1} v_{n-1}^T}{v_{n-1}^T v_{n-1}}$ τάξης $n-1$ έτσι ώστε:

$\hat{P}_2 \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ και έπειτα ορίζουμε $P_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \hat{H}_2 \\ 0 & \end{array}\right]$

$A_2^{(2)} = P_2 A^{(1)}$

Βήμα k. Γενικά στο k βήμα δημιουργούμε πρώτα τον πίνακα Householder

$$\hat{P}_k = I_{n-k+1} - \frac{2\, v_{n-k+1} v_{n-k+1}^T}{v_{n-k+1}^T v_{n-k+1}}$$ τάξης n-k+1

έτσι ώστε:

$$\hat{P}_k \begin{bmatrix} \alpha_{kk} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και μετά ορίζουμε:

$$P_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \hat{P}_k \end{bmatrix}$$

και υπολογίζουμε

$$A^{(k)} = P_k A^{(k-1)} \quad , \; k = n-1(-1)2$$

Έχουμε:

$$A^{(n-1)} = P_{n-1} A^{(n-2)} = P_{n-1} P_{n-2} A^{(n-3)}$$
$$= \cdots = \underbrace{P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_2 P_1 A}_{R} = R \qquad (1)$$

όπου $Q^T = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_2 \cdot P_1$

Επειδή κάθε P_i είναι ορθογώνιος $\Rightarrow$ Q^T ορθογώνιος

Από την (1) έχουμε: $R = Q^T A \iff A = Q \cdot R$

(όπου $Q = H_1^T H_2^T \cdots H_{n-1}^T$ ορθογώνιος)

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1 $k=1$ Κατασκευή P_1 : $P_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \overset{\|x\|_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = I_3 - \frac{2 V_3 V_3^T}{V_3^T V_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Σχηματισμός $$A^{(1)} = P_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & -\frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Άρα $$A \equiv A^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} -1.4142 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & -0.2071 & 0.2929 \\ 0 & -1.2071 & -1.7071 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2 $k=2$ Κατασκευή P_2 : $\hat{P}_2$: $\hat{P}_2 \begin{bmatrix} -0.2071 \\ -1.2071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -0.2071 \\ -1.2071 \end{bmatrix} - 1.2247 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4318 \\ -1.2071 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = I_2 - \frac{2 v_2 v_2^T}{v_2^T v_2} = \begin{bmatrix} -0.1691 & -0.9856 \\ -0.9856 & 0.1691 \end{bmatrix}$$

Κατασκευή H_2 : $$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1691 & -0.9856 \\ 0 & -0.9856 & 0.1691 \end{bmatrix}$$

Σχηματισμός $$A^{(2)} = P_2 A^{(1)} = P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} -1.4142 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & -0.5774 \end{bmatrix} = R$$

Σχηματισμός: $$Q = P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & 0.5774 \\ -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

Πίνακας Givens

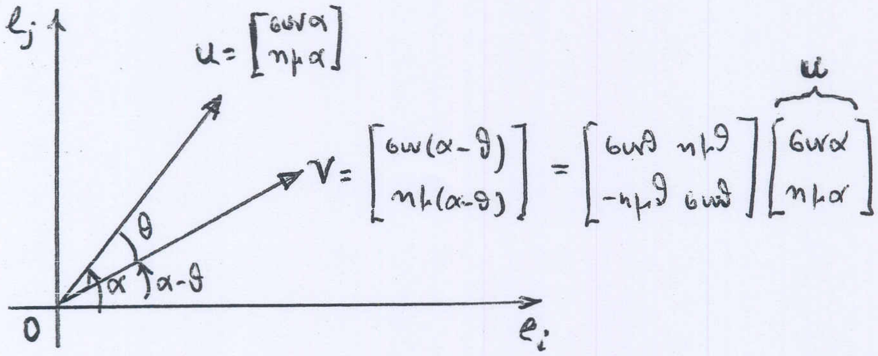
Ορισμός Κάθε πίνακας της μορφής

$$J(i,j,c,s) = \begin{array}{cccccc}
 & & i & & j & \\
 & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{smallmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{smallmatrix} & & 0 & & 0 \\
\hline
 & c & \cdots & s & \\
\hline
0 & \vdots & \begin{smallmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{smallmatrix} & \vdots & 0 \\
\hline
 & -s & \cdots & c & \\
\hline
0 & & 0 & & \begin{smallmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{smallmatrix}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

όπου $c^2+s^2=1$

λέγεται πίνακας του Givens.

Επιλέγοντας $c = συνθ$ και $s = ημθ$ ο πίνακας Givens συμβολίζεται με $J(i,j,θ)$.



$$v=\begin{bmatrix}συν(α-θ)\\ημ(α-θ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}συνθ & ημθ\\-ημθ & συνθ\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}συνα\\ημα\end{bmatrix}}^{u}$$

Γεωμετρικά, ο πίνακας Givens $J(i,j,θ)$ περιστρέφει το ζεύγος αξόνων συντεταγμένων $(0, \overset{x}{e_i}, \overset{y}{e_j})$ κατά τη δοθείσα γωνία $θ$ στο (i,j) επίπεδο. Για αυτό ο μετασχηματισμός αυτός είναι γνωστός ως περιστροφή του Givens.

Έτσι λοιπόν αν ένα διάνυσμα $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}$ πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα Givens $J(i,j,θ)$ τροποποιούνται μόνο οι i και j συντεταγμένες του x.

Ο μετασχηματισμός Givens είναι ορθογώνιος, γιατί $J(i,j,θ)\,J(i,j,θ)^T=I$ όπου $c^2+s^2=1$.

Οι περιστροφές Givens είναι ειδικά χρήσιμοι στην εισαγωγή μηδενικών σε μια συγκεκριμένη θέση ενός διανύσματος.

Έτσι λοιπόν, αν

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

και θέλουμε να μηδενίσουμε μόνο το x_k, μπορούμε να κατασκευάσουμε την περιστροφή $J(i,k,\theta)$ $(i<k)$ τέτοια ώστε το διάνυσμα $J(i,k,\theta)\cdot x$ να έχει 0 στη k θέση.

Για να κατασκευάσουμε το $J(i,k,\theta)$, κατασκευάζουμε πρώτα μια 2x2 περιστροφή Givens $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{είναι:} \quad c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, \quad s = \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$$

και έπειτα σχηματίζουμε τον πίνακα $J(i,k,\theta)$ με τη εισαγωγή του c στην θέση (i,i) και (k,k), s και $-s$ αντίστοιχα στις θέσεις (i,k) και (k,i) και συμπληρώνουμε το υπόλοιπο τμήμα του πίνακα με τα στοιχεία του μοναδιαίου πίνακα

Παράδειγμα Έστω $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Έστω ότι θέλουμε να εισάγουμε 0 στην 3 συνιστώσα δηλ. $k=3$.
Επιλέγουμε $i = 2 < 3$

B1 Σχηματισμός μιας 2x2 περιστροφής τέτοιας ώστε:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \frac{-1}{\sqrt{10}}, \quad s = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

B2 Σχηματισμός του πίνακα Givens $J(2,3,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

Τότε έχουμε

$$J(2,3,\theta)\cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δημιουργία μηδενικών σε ένα διάνυσμα εκτός της 1ης συντεταγμένης.

Παράδειγμα Έστω $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και έστω ότι θέλουμε να εισάγουμε 0 στην 2η και 3η συντεταγμένη.

Σχηματισμός

$$J(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad x^{(1)} = J(1,2,\theta)\,x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Σχηματισμός

$$J(1,3,\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{6}} \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad x^{(2)} = J(1,3,\theta)\,x^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$P = J(1,3,\theta)\,J(1,2,\theta) \doteq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{6}} & \sqrt{\frac{2}{6}} & \sqrt{\frac{2}{6}} \end{bmatrix}$$

και

$$Px = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία της εισαγωγής μηδενικών εκτός της 1ης συντεταγμένης σε ένα διάνυσμα x εφαρμόζοντας περιστροφή Givens είναι διπλά δαπανηρή από εκείνη που εφαρμόζονται μετασχηματισμοί Householder. Στην πράξη απαιτεί μόνο $1\frac{1}{2}$ φορά flops παραπάνω σε σύγκριση με τους μετασχηματισμούς Householder.

Η ιδέα αυτή επεκτείνεται και για την εισαγωγή μηδενικών σε συγκεκριμένες θέσεις ενός πίνακα.