Μέθοδος του HUARD

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται μια μέθοδος διαγωνοποίησης του πίνακα A που προκύπτει με μία τροποποίηση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss και η οποία οδηγεί μετά από n βήματα στο ίδιο διαγώνιο σύστημα που μας οδηγεί και η μέθοδος GJ. Έστω το αρχικό γραμμικό σύστημα:

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \tag{3.3.1}$$

όπου $A^{(1)} = A$ και $b^{(1)} = b$ μετά την εκτέλεση του πρώτου βήματος έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & a_{12}^{(2)}x_2 & + & a_{13}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 & + & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 & + & a_{32}^{(1)}x_2 & + & a_{33}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)} \end{array} \tag{3.3.2}$$

όπου οι συντελεστές των αγνώστων της 1ης εξίσωσης έχουν διαιρεθεί με το οδηγό στοιχείο $a_{11}^{(1)}$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \tag{3.3.3}$$

2ο βήμα

Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου απαλείφεται ο άγνωστος x_1 από τη δεύτερη εξίσωση και ο άγνωστος x_2 από την πρώτη γραμμή. Ετσι προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & & + & a_{13}^{(3)}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(3)}x_n & = & b_1^{(3)} \\ & & x_2 & + & a_{23}^{(3)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(3)}x_n & = & b_2^{(3)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 & + & a_{32}^{(1)}x_2 & + & a_{33}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)} \end{array} \tag{3.3.4}$$

ή

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \tag{3.3.5}$$

3ο βήμα

Στο τρίτο βήμα της μεθόδου απαλείφονται οι άγνωστοι x_1 και x_2 από την 3η εξίσωση και ο άγνωστος x_3 από την 1η και 2η γραμμή. Ετσι προκύπτει το σύστημα:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & & & & & + & a_{14}^{(4)}x_4 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(4)}x_n & = & b_1^{(4)} \\
 & & x_2 & & & + & a_{24}^{(4)}x_4 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(4)}x_n & = & b_2^{(4)} \\
 & & & & x_3 & + & a_{34}^{(4)}x_4 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(4)}x_n & = & b_3^{(4)} \\
a_{41}^{(1)}x_1 & + & a_{42}^{(1)}x_2 & + & a_{43}^{(1)}x_3 & + & a_{44}^{(1)}x_4 & + & \cdots & + & a_{4n}^{(1)}x_n & = & b_4^{(1)} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \\
a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & a_{n4}^{(1)}x_4 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array} \tag{3.3.6}
$$

ή

$$A^{(4)}x = b^{(4)} \tag{3.3.7}$$

$k-1$ βήμα

Μετά από $k-1$ τέτοια βήματα προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & & & & & & & + & a_{1k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{1n}^{(k)}x_n & = \\
 & & x_2 & & & & & + & a_{2k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{2n}^{(k)}x_n & = \\
 & & & & \ddots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & & & & & & x_{k-1} & + & a_{k-1,k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{k-1,n}^{(k)}x_n & = \\
a_{k1}^{(1)}x_1 & + & a_{k2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{k,k-1}^{(1)}x_{k-1} & + & a_{kk}^{(1)}x_k & + & \cdots & + & a_{k,n}^{(1)}x_n & = \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \\
a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,k-1}^{(1)}x_{k-1} & + & a_{nk}^{(1)}x_k & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & =
\end{array}
\tag{3.3.8}
$$

ή

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \tag{3.3.9}$$

$n-1$ βήμα

Τελικά μετά από $n-1$ τέτοια βήματα προκύπτει το ισοδύναμο διαγώνιο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= b_1^{(n)} \\ x_2 \qquad\qquad &= b_2^{(n)} \\ \ddots \qquad &\;\;\vdots \\ x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

ή

$$x = b^{(n)} \tag{3.3.11}$$

η οποία είναι η λύση του αρχικού συστήματος.

Αναλυτικώτερα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, \qquad i,j = 1(1)n$$

$$a_{i,n+1}^{(1)} = b_i, \qquad i = 1(1)n$$

Στο πρώτο βήμα διαιρείται η πρώτη εξίσωση με το οδηγό στοιχείο $a_{11}^{(1)}$, οπότε προκύπτει το σύστημα (3.3.2) όπου:

$$a_{11}^{(2)} = 1$$

και

$$a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad j = 2(1)n+1$$

2ο βήμα

Στο δεύτερο βήμα ορίζουμε τον πολλαπλασιαστή:

$$h_{21} = -a_{21}^{(1)}$$

τότε για να απαλειφθεί ο x_1 από την 2η εξίσωση, αρκεί να προστεθεί σάυτή η πρώτη εξίσωση πολλαπλασιασμένη με h_{21}, οπότε έχουμε:

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} + h_{21} \cdot a_{1j}^{(2)}, \quad j = 2(1)n+1$$

Στη συνέχεια διαιρείται η 2η εξίσωση με το οδηγό στοιχείο $a_{22}^{(2)}$, οπότε έχουμε:

$$a_{22}^{(3)} = 1$$

$$a_{2j}^{(3)} = \frac{a_{2j}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad j = 3(1)n+1$$

Ορίζουμε τον πολλαπλασιαστή:

$$g_{12} = -a_{12}^{(2)}$$

τότε για να απαλειφθεί ο x_2 από την πρώτη εξίσωση, αρκεί να προστεθεί σάυτή η δεύτερη εξίσωση πολλαπλασιασμένη με g_{12}, οπότε έχουμε:

$$a_{1j}^{(3)} = a_{1j}^{(2)} + g_{12} \cdot a_{2j}^{(3)}, \quad j = 3(1)n + 1$$

έτσι καταλήγουμε στο σύστημα (3.3.4).

n βήμα

Τελικά, μετά από n παρόμοια βήματα καταλήγουμε στο διαγώνιο σύστημα (3.3.10) που δίνει άμεσα τη λύση του αρχικού συστήματος.

Υπό μορφή πινάκων η μέθοδος HU

αναζητά ένα μη ιδιάζοντα πίνακα H τέτοιο ώστε:

$$HAx = Hb \tag{3.3.12}$$

με

$$HA = I \tag{3.3.13}$$

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό σύστημα είναι το $A^{(1)}x = b^{(1)}$ τότε δημιουργούνται οι ακολουθίες πινάκων:

$$\left.\begin{aligned} A^{(k+1)} &= G^{(k)}H^{(k)}A^{(k)} \\ b^{(k+1)} &= G^{(k)}H^{(k)}b^{(k)} \end{aligned}\right. \quad , \quad k = 1(1)n-1 \tag{3.3.14}$$

όπου

$$H^{(k)} = I_n + \sum_{i=1}^{k-1} h_{ki}E_{ki}$$

$$G^{(k)} = I_n + \sum_{i=1}^{k-1} g_{ik}E_{ik}$$

$$\left.\begin{aligned} h_{ki} &= -a_{ki} \\ g_{ik} &= -a_{ik} \end{aligned}\right. \quad , \quad i = 1(1)k-1$$

$$E_{ki} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow k \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad E_{ik} = E_{ki}^T$$

ώστε το γραμμικό σύστημα $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$ να είναι ισοδύναμο με το $A^{(k)}x = b^{(k)}$.

Μετά από n βήματα οι αναδρομικοί τύποι (3.3.14) οδηγούν σ΄ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$A^{(n)}x = b^{(n)} \tag{3.3.15}$$

όπου

$$A^{(n)} = (G^{(n)}H^{(n)})(G^{(n-1)}H^{(n-1)})\cdots(G^{(1)}H^{(1)})$$

είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Η μέθοδος Huard

περιλαμβάνει στο k βήμα τις παρακάτω δύο φάσεις εργασιών:

1. **Φάση καθόδου**
   Περιλαμβάνει το μηδενισμό των $k-1$ πρώτων στοιχείων της k γραμμής του πίνακα A και τις αντίστοιχες τροποποιήσεις των $n-k+2$ επομένων στοιχείων της.
2. **Φάση ανόδου**
   Περιλαμβάνει το μηδενισμό των $k-1$ πρώτων στοιχείων της k στήλης του πίνακα A και τις αντίστοιχες τροποποιήσεις των $n-k+1$ τελευταίων στοιχείων των $k-1$ πρώτων γραμμών.

Η σειρά προσπέλασης στα στοιχεία του πίνακα A μας οδηγεί σε δύο διαφορετικούς τρόπους εκτέλεσης των εργασιών σε καθεμιά από τις παραπάνω φάσεις: κατά γραμμές ή κατά στήλες. Ετσι προκύπτουν 4 διαφορετικοί αλγόριθμοι που είναι οι παρακάτω:

(*Κάθοδος κατά γραμμές*)

Για $i := 1(1)k-1$ επανάλαβε
  για $j := k(1)n+1$ επανάλαβε
    $a_{kj} := a_{kj} - a_{ki} * a_{ij}$

(*Κάθοδος κατά στήλες*)

Για $j := k(1)n+1$ επανάλαβε
  για $i := 1(1)k-1$ επανάλαβε
    $a_{kj} := a_{kj} - a_{ki} * a_{ij}$

(*Ανοδος κατά γραμμές*)

Για $i := 1(1)k-1$ επανάλαβε
  για $j := k+1(1)n+1$ επανάλαβε
    $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} * a_{kj}$

(*Ανοδος κατά στήλες*)

Για $j := k+1(1)n+1$ επανάλαβε
  για $i := 1(1)k-1$ επανάλαβε
    $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} * a_{kj}$